УДК 621.391

В.К. Трофимов

РАВНОМЕРНОЕ ПО ВЫХОДУ КОДИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ИСТОЧНИКОВ СООБЩЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНОЙ СТАТИСТИКОЙ[1]

Предложен метод универсального равномерного по выходу кодирования для множества дискретных стационарных источников. Получены оценки избыточности предложенного кодирования. Установлены необходимые и достаточные условия существования универсального равномерного по выходу кодирования.

Ключевые слова: *кодирование*, *избыточность*, *стоимость кодирования.*

Проблемы сжатия (кодирования) информации [1] относятся к фундаментальным в области инфокоммуникаций. Как отмечено в книги В.Г. Хорошевского [2], решение этих проблем значимо и при создании большемасштабных распределённых вычислительных систем. Методы сжатия информации в таких системах, как правило, используют параллельные информационно-вычислительные технологии.

Настоящая работа посвящена кодированию информации, порождённой источником, в классической постановке К. Шеннона [1]. Вопросы сжатия данных также рассматривались Ф.П. Тарасенко [3].

1. Основные определения. Постановка задачи

Пусть буквы конечного алфавита $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $2 \le k < \infty$, порождаются источником θ. Мера, заданная на последовательности букв, порождаемой источником, определяет тип источника. Если буквы порождаются независимо, то источник называют бернуллиевским. В этом случае $P_\theta(a_j) = \theta_j$, $\theta_1 + \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$, где $P_\theta(a_j)$ – вероятность порождения буквы a_j источником θ. Если же появление очередной буквы зависит от предыдущей, то для условной вероятности $P_\theta(a_i/a_j)$ появления буквы a_i после a_j имеют место равенства $P_\theta(a_i/a_j) = \theta_{ij}$, $\sum_{i=1}^{k}\theta_{ij} = 1$, $j = \overline{1,k}$, и в этом случае источник называют марковским. Если появление очередной буквы зависит от s предшествующих букв, то условные вероятности $P_\theta\left(a_j/\nu\right)$ определяются равенствами $P_\theta(a_j/\nu) = \theta_{j\nu}$, где $\nu \in A^s$, источник θ называют марковским с памятью S. Следует отметить, что для любого слова $\nu \in A^s$, $0 \le s < \infty$, выполняется равенство $\sum_{j=1}^{k}\theta_{\nu j} = 1$. Множество всех марковских источников с памятью S обозначим Ω_s. Дискретный стационарный источник θ задаётся

[1] Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 113 СО РАН, при поддержке РФФИ (гранты № 09-07-00095, 10-07-00157, 08-07-00022), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-5176.2010.9) и в рамках государственного контракта № 02.740.11.0006 с Минобрнауки РФ.

всеми условными распределениями вероятностей $P_\theta(a_j / v) = \theta_{jv}$ порождения источником букв a_j, $j=\overline{1,k}$, при заданных предшествующих v, $V \in A^s$, s любое целое неотрицательное число, причём при любом заданном V, $v \in A^s$, $s = 0, 1, 2, \dots$, выполняется равенство $\theta_{v1}+\theta_{v2}+\dots+\theta_{vk}=1$.

Если u – произвольное слово в алфавите A, то через $P_\theta(u)$ обозначим вероятность слова u, порождённого источником θ. Число $|u|$ букв в слове u назовём его длиной. Энтропию источника θ обозначим $H(\theta)$ [4, 5]. Если θ – произвольный дискретный стационарный источник и $H(\theta)$ – его энтропия, то справедливо равенство [4, 5]: $H(\theta)=\lim\limits_{s\to\infty} H_s(\theta)$.

Пусть Ω_∞ – множество всех дискретных стационарных источников с конечной энтропией. Конечное полное префиксное множество слов T во входном алфавите назовём кодовым.

Пусть θ – произвольный источник из Ω_s, T – произвольное кодовое множество. Обозначим через $\theta(T)$ марковскую цепь, состояниями которой являются слова из T, а переходные вероятности $P_{\theta(T)}(u/\nu)$, $u, \nu \in T$, индуцируются источником θ. Будем рассматривать только марковские источники с памятью s, переходные вероятности которых строго положительны. Тогда для марковской цепи $\theta(T)$ существует стационарное распределение $P^0_{\theta(T)}(u)>0$, $u\in T$. Средняя длина слова $d(T,\theta)$ для множества T, как доказано в [6], равна

$$d(T,\theta)=\sum_{u\in T} P^0_{\theta(T)}(u)|u|. \tag{1}$$

В этой же работе доказаны тождества Вальда, которые имеют вид

$$\sum_{u\in T} P^0_{\theta(T)}(u)\cdot r_\nu(u)=(d(T,\theta)-\hat{s}+1)\theta_{0\nu}, \quad \sum_{u\in T} P^0_{\theta(T)}(u)\cdot r_{\nu i}(u)=(d(T,\theta)-s)\theta_{0\nu}\theta_{\nu i}, \tag{2}$$

где $r_\nu(u)$, $r_{\nu i}(u)$ – число вхождений блоков v, va_i, $v\in A^s$, соответственно в слово u, $\hat{s}=\max(s,1)$.

Полубесконечная последовательность букв, порождаемая источником θ, однозначно разбивается на последовательность слов из фиксированного кодового множества T. Полученная последовательность слов из T с помощью отображения φ переводится в слова выходного алфавита B, который, не уменьшая общности, можно считать двоичным. Из неравенства Мак-Милана – Крафта [4, 5] следует, что множество $\varphi(T)=\{\varphi(u),\ u\in T\}$ является префиксным. Если длины всех слов множеств $T(\varphi(T))$ равны между собой, то говорят, что $T(\varphi(T))$ состоит из блоков; в противном случае – из слов переменной длины. В зависимости от видов множеств T и $\varphi(T)$ логически возможны следующие виды кодирований: блоки в слова переменной длины (обозначается BV; слова переменной длины в блоки (обозначается VB); слова переменной длины в слова переменной длины (обозначается VV); блоки в блоки (обозначается BB).

Среднее число букв выходного алфавита при кодировании типа σ, $\sigma = BV, VB, VV$, приходящихся на одну букву входного, назовём стоимостью кодирования и обозначим через $C_\sigma(T, \theta, \varphi)$. Как доказано в [6], величина $C_\sigma(T, \theta, \varphi)$ находится по формуле

$$C_\sigma(T, \theta, \varphi) = \frac{1}{d_s(T, \theta) - \hat{s} + 1} \sum_{u \in T} P^0_{\theta(T)}(u) |\varphi(u)| . \tag{3}$$

Эффективность кодирования φ будем оценивать разностью между стоимостью кодирования $C_\sigma(T, \theta, \varphi)$ и энтропией источника $H(\theta)$. Эта разность в дальнейшем называется избыточностью кодирования и обозначается $r_\sigma(T, \theta, \varphi)$, т.е.

$$r_\sigma(T, \theta, \varphi) = C_\sigma(T, \theta, \varphi) - H(\theta) . \tag{4}$$

Избыточностью универсального кодирования типа σ для множества источников Ω и с заданной сложностью N назовём величину $R_\sigma(N, \Omega)$

$$R_\sigma(N, \Omega) = \inf_{\varphi} \sup_{\theta \in \Omega} r_\sigma(T, \theta, \varphi) . \tag{5}$$

Здесь нижняя грань берётся по всем кодированиям φ, для которых кодовое множество T имеет не более чем k^N слов. Построение хорошего кодирования при заданной сложности – основной вопрос при изучении передачи сообщений по каналу без шума.

Если множество источников Ω состоит из единственного источника, то мы имеем дело с кодированием известного источника, которое подробно изучено для различных типов кодирования, например, в работах [1, 3 – 5, 7 – 13]. Универсальное кодирование марковских источников различных типов также хорошо изучено [14 – 18]. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в [14, 17 – 19]. Особо отметим работу В.Ф. Бабкина, Ю.М. Штарькова [16], в которой изучалось BV-кодирование для стационарных источников. В частности, в этой работе было доказано, что существует последовательность BV-кодирований φ_N, такая, что для любого стационарного источника θ избыточность кодирования $r_{BV}(A^N, \theta, \varphi_N)$ стремится к нулю. В то же время легко показать, что при $N \to \infty$ избыточность универсального кодирования множества всех стационарных источников $R_{BV}(N, \Omega_\infty)$ стремится к бесконечности. Вопрос о равномерной сходимости $r_{BV}(A^N, \theta, \varphi_N)$ в [16] не исследовался. Кодирование, построенное в [16], получило название слабоуниверсального кодирования. При построении слабоуниверсального BV-кодирования основная сложность состоит в определении отображения φ_N, так как область определения при таком кодировании определена – это множество всех слов длины N в алфавите A. При построении кодирования типа VB основная трудность состоит в конструировании области определения кодирования φ_N, т.е. в определении кодового множества T_N.

2. Равномерное по выходу кодирование марковских источников

В этом параграфе предложен метод кодирования марковских источников с памятью s, получена оценка избыточности предложенного метода и доказана его универсальность. При доказательстве основного утверждения параграфа нам потребуются следующие понятия и обозначения. Марковский источник θ связанности s задаётся начальным распределением вероятностей θ_{0v} появления блока v за первые s шагов работы источника и вероятностями θ_{vi} появления буквы a_i после блока v, $a_i \in A$, $v \in A^s$.

На множестве источников Ω_s определим КТ-распределение $\omega(\theta)$ [14], которое задаётся формулой

$$\omega(\theta)=\left[\frac{r\left(k/2\right)}{k\pi^{\frac{k}{2}}}\right]^k \cdot \frac{1}{\sqrt{\prod\limits_{v\in A^s}\prod\limits_{i=1}^{k}\theta_{vi}}}, \tag{6}$$

Проинтегрировав вероятность слова u, порождённого источником θ, по множеству источников Ω_s, если на Ω_s задана плотность $\omega(\theta)$, получим [14]

$$\overline{P_s}(u)=\left[\frac{\Gamma\left(k/2\right)}{k\pi^{\frac{k}{2}}}\right]^{ks}\prod_{v\in A^s}\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}\Gamma\left(r_{vj}(u)+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(r_v(u)+\frac{k}{2}\right)}. \tag{7}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция от z. Используя для функции $\Gamma(z)$ формулу Стирлинга, из (7) получим

$$-\log\overline{P_s}(u)=\sum_{v\in A^s} r_v(u)F_s(u)+\frac{k-1}{2}\sum_{v\in A^s}\log\hat{r}_v(u)+c, \tag{8}$$

где $\hat{x}=\max(x,1)$, $\log x=\log_2 x$, $0\log 0=0$, $F_s(u)$ – квазиэнтропия u, определяемая равенством

$$F_s(u)=-\sum_{v\in A^s}\frac{r_v(u)}{|u|-s}\sum_{i=1}^{k}\frac{r_{vi}(u)}{r_v(u)}\log\frac{r_{vi}(u)}{r_v(u)}.$$

Сформулируем и докажем основное утверждение параграфа.

Теорема 1. *Для любого фиксированного s, $0\le s<\infty$, существует последовательность кодирований φ_N типа VB, для которых избыточность кодирования $r_{VB}(T_N,\theta,\varphi_N)$ при любом источнике θ, $\theta\in\Omega_s$, удовлетворяет неравенству*

$$r_{VB}(\varphi_N,\theta,T_N)\le\frac{k^s(k-1)+2}{2}\cdot\frac{\log d_s(T_N,\theta)+c}{d_s(T_N,\theta)},$$

где постоянная c не зависит ни от θ, ни от T_N.

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, каждое кодирование определяется тройкой $(T,\varphi,\varphi(T))$, где T – область определения T, $\varphi(T)$ – область значений отображения φ. Для равномерного по выходу кодирования $\varphi(T)=B^{\lceil\log\|T\|\rceil}$, где

$\lceil x \rceil$ – наименьшее целое, большее или равное x, $\|T\|$ – мощность множества T. Таким образом, при построении равномерных по выходу кодирований вся сложность заключается в построении кодовых множеств.

Зафиксируем произвольное натуральное N, в кодовое множество T_N включим все слова u, для которых выполняется неравенство

$$\frac{1}{\overline{P_s}(u)} \le k^N , \tag{9}$$

и в то же время существует буква a_j, $a_j \in A$, такая, что для конкатенации слова u и a_j выполняется неравенство

$$\frac{1}{\overline{P_s}(ua_j)} > k^N . \tag{10}$$

Совершенно очевидно, что построенное таким образом кодовое множество T_N является конечным, полным, префиксным множеством слов во входном алфавите, т.е. T_N – кодовое множество. При равномерном по выходу кодировании каждому слову u ставится в соответствие слово $\varphi_N(u)$, $u \in T_N$, длины $\lceil \log\|T_N\| \rceil$. Оценим избыточность предложенного метода кодирования. Из определения избыточности (4) имеем

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) = \frac{\lceil \log\|T_N\| \rceil}{d_s(T_N, \theta) - \hat{s} + 1} - H(\theta) . \tag{11}$$

Кодирование φ_N – дешифруемое, поэтому величина $r_{VB}(T_N, \varphi_N, \theta)$ неотрицательна. Найдём верхнюю оценку этой величины. Из соотношения (9) следует, что при любом u, $u \in T_N$, справедливо неравенство $\overline{P_s}(u) \ge \frac{1}{k^N}$. Просуммировав это неравенство по всем словам u из T_N и учитывая, что в силу полноты T_N выполняется равенство $\sum\limits_{u \in T_N} \overline{P_s}(u) = 1$, получим

$$k^N \ge \|T_N\| . \tag{12}$$

Из (11) с учётом (10) и (12) следует

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) \le \frac{\sum\limits_{u \in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u) \log\|T_N\|}{d_s(T_N, \theta)} - H(\theta) + \frac{1}{d_s(T_N, \theta)} \le$$

$$\le \frac{-\sum\limits_{u \in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u) \log \overline{P_s}(ua_j)}{d_s(T_N, \theta)} - H(\theta) + \frac{1}{d_s(T_N, \theta)} . \tag{13}$$

Из определения средней вероятности $\overline{P_s}(ua_j)$ слова ua_j по множеству источников Ω_s, свойств гамма-функции и (7) для слова u, заканчивающегося блоком v, справедливо неравенство

$$-\log \overline{P_s}(ua_j) \le -\log \overline{P_s}(u) + \log\left(|u| - s + \frac{k}{2}\right).$$

Отсюда и из (13) получаем

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) \le \frac{-\sum\limits_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u) \log \overline{P_s}(u)}{d_s(T_N, \theta)} - H(\theta) + \frac{\sum\limits_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u) \log\left(u - s + \frac{k}{2}\right) + 1}{d_s(T_N, \theta)}.$$

Воспользовавшись (8), имеем

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) \le \frac{\sum\limits_{v\in A^s} \sum\limits_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u) r_v(u) F_s(u)}{d_s(T_N, \theta)} - H(\theta) +$$

$$+\frac{\frac{k-1}{2} \sum\limits_{v\in A^s} \sum\limits_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u) \log \hat{r}_\alpha(u) + c}{d(T_N, \theta)} + \frac{\sum\limits_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u) \log\left(|u| - s + \frac{k}{2}\right)}{d_s(T_N, \theta)}. \quad (14)$$

Используя неравенство Иенсена для функций $-x\log x$ и $\log x$, а также тождествами Вальда (2) и определения величины $d_s(T_N, \theta)$, см. (1), получаем

$$\frac{\sum\limits_{v\in A^s} \sum\limits_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)}(u)\ r_v(u) F_s(u)}{d_s(T_N, \theta)} - H(\theta) \le 0; \quad (15)$$

$$\sum_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)} \log(|u| - s) \le \log(d_s(T_N, \theta) - s); \quad (16)$$

$$\sum_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)} \log \hat{r}_v(u) \le \sum_{u\in T_N} P^0_{\theta(T_N)} \log(|u| - s) \le \log(d_s(T_N, \theta) - s). \quad (17)$$

Из (14) и соотношений (15) – (17) окончательно вытекает

$$r_{VB}(T_N, \theta, \varphi_N) \le \frac{k^s(k-1)}{2} \cdot \frac{\log d_s(T_N, \theta)}{d_s(T_N, \theta)} + \frac{\log d_s(T_N, \theta) + c}{d_s(T_N, \theta)},$$

где c не зависит от θ. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что для множества Ω_s марковских источников с памятью s, $0 \le s < \infty$, существует универсальное равномерное по выходу кодирование.

Следствие. *Для избыточности $R_{VB}(N, \Omega_s)$ универсального равномерного по выходу кодирования с заданной сложностью N справедлива оценка*

$$R_{VB}(N, \Omega_s) \le \frac{k^s(k-1)+2}{2} \cdot \frac{\log d_s(T_N)}{d_s(T_N)} + \frac{c}{d_s(T_N)}, \quad (18)$$

где $d_s(T_N) = \inf\limits_{\theta\in\Omega_s} d_s(T_N, \theta)$, c не зависит от θ, т.е. существует универсальное равномерное по выходу кодирование для множества источников Ω_s.

Доказательство. Утверждение следствия вытекает непосредственно из теоремы и определения величин $R_{VB}(N, \Omega_s)$ и $r(T_N, \theta, \varphi_N)$ (см (5)).

3. Кодирование типа *VB* для стационарных источников

Сформулируем и докажем основные результаты работы.

Теорема 2. *Для множества стационарных источников* Ω_∞ *существует слабоуниверсальное равномерное по выходу кодирование.*

Доказательство. Каждый стационарный источник θ, $\theta \in \Omega_\infty$, задается условными вероятностными распределениями $\theta_s(a_i|\nu)$, $a_i \in A$, $\nu \in A^s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ появления буквы a_i после блока ν. Таким образом, каждый стационарный источник θ определяет последовательность марковских источников θ_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$, при s, стремящемся к бесконечности, энтропия $H(\theta_s)$ источника θ_s, не возрастая, сходится к энтропии $H(\theta)$ источника θ, т.е. $\lim\limits_{s\to\infty} H(\theta_s) = H(\theta)$.

Для любого фиксированного s, $0 \le s < \infty$, определена стоимость кодирования $C_{VB}(T, \theta, \varphi)$ (см. (3)). Покажем, что стоимость кодирования $C_{VB}\left(T_N^s, \theta, \varphi^s\right)$, предложенного ранее, при N и s, стремящихся к бесконечности, существует и равна энтропии источника $H(\theta)$. Для этого нам нужно установить, что избыточность кодирования $r_{VB}\left(T_N^s, \theta, \varphi_N^s\right)$ для стационарного источника $\theta, \theta \in \Omega_\infty$, стремится к нулю с ростом N и s. Используя определение величины $r_{VB}\left(T_N^s, \theta, \varphi_N^s\right)$ (см. (11)), имеем

$$r_{VB}\left(T_N^s, \theta, \varphi_N^s\right) = \left[\frac{\left\lceil \log\left\|T_N^s\right\| \right\rceil}{d_s(T_N^s, \theta_s) - \hat{s} + 1} - H(\theta_s)\right] + \left[H(\theta_s) - H(\theta)\right]. \tag{19}$$

В равенстве (19) первое слагаемое в правой части, согласно следствию из предыдущего параграфа, ограничено асимптотически сверху величиной

$$\frac{k^s(k-1)+2}{2} \cdot \frac{\log d_s(T_N^s)}{d_s(T_N^s)}. \tag{20}$$

Если выбрать $s = o\left(\log d_s\left(T_N^s\right) - \log\log u_s\left(T_N^s\right)\right)$, то из (20) и свойств энтропии следует, что с ростом s оба слагаемых в (19) стремятся к нулю, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} r_{VB}\left(T_N^s, \theta, \varphi_N^s\right) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{N\to\infty} C\left(T_N^s, \theta_s, \varphi_N\right) = H(\theta).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что существует кодирование, при котором для любого фиксированного источника θ из Ω_∞ его избыточность стремится к нулю. Однако это стремление не является равномерным по множеству источников Ω_∞. Нижеследующее утверждение даёт ответ на вопрос о существовании универсального равномерного по выходу кодирования для множества источников Ω.

Теорема 3. *Для существования универсального равномерного по выходу кодирования множества источников* Ω *необходимо и достаточно, чтобы при* s, *стремящемся к бесконечности, энтропия* $H(\theta_s)$ *сходилась равномерно по* θ, $\theta \in \Omega$, *к энтропии* $H(\theta)$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $H(\theta_s)$ сходится равномерно по θ к $H(\theta)$ на множестве Ω, при $s \to \infty$. Согласно определению, для любой последовательности кодовых множеств $\{T_N^s\}$, $N = 1, 2, \ldots$, $0 \le s < \infty$, справедливо равенство

$$r\left(T_N^s, \theta, \varphi_N\right) = r\left(T_N^s, \theta_s, \varphi_N\right) + H(\theta_s) - H(\theta).$$

Так как $r\left(T_N^s, \theta_s, \varphi_N\right) \ge 0$, то из последнего равенства имеем

$$H(\theta_s) - H(\theta) \le r\left(T_N^s, \theta, \varphi_N\right) = r\left(T_N^s, \theta_s, \varphi_N\right) + H(\theta_s) - H(\theta). \tag{21}$$

В качестве T_N^s возьмём кодовые множества, построенные при доказательстве теоремы 1. Согласно следствию, из (18) и (21) имеем

$$r\left(T_N^s, \theta, \varphi_N\right) \le \frac{k^s(k-1)+2}{2} \cdot \frac{\log d_s(T_N^s)}{d_s(T_N^s)} + \frac{c}{d(T_N^s)} + H(\theta_s) - H(\theta) \tag{22}$$

Из (22) условия теоремы и следствия из теоремы 1 вытекает справедливость утверждения.

Достаточность. Если $H(\theta_s) - H(\theta)$ не стремится к нулю равномерно по множеству Ω, то из (20), точнее, из нижней оценки (21), следует, что для любой последовательности кодовых множеств T_N^s избыточность $r\left(T_N^s, \theta, \varphi_N\right)$ не стремится к нулю равномерно по множеству Ω. Теорема доказана.

Заключение

В работе предложен метод универсального равномерного по выходу кодирования сообщений, порожденных известным марковским источником связанности s; получена верхняя оценка избыточности этого кодирования, которая примерно в два раза меньше полученной ранее оценки [17]. Доказано существование слабо-универсального кодирования типа BV для множества всех стационарных дискретных источников и сформулированы необходимые и достаточные условия существования универсального кодирования для произвольного множества источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеннон К.* Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1969. С. 243–332.
2. *Хорошевский В.Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
3. *Тарасенко Ф.П.* Введение в курс теории информации. Томск: ТГУ, 1963.
4. *Фано Р.* Передача информации. Статистическая теория связи. М.: Мир, 1965. 440 с.
5. *Галлагер Р.* Теория информации и надёжная связь. М.: Сов.радио, 1974. 720 с.
6. *Могульский А.А.*, *Трофимов В.К.* Тождество Вальда и стоимость кодирования для цепей Маркова // VII Всесоюзная конференция по теории кодирования и передачи информации (Теория информации). М.; Вильнюс, 1978. Ч. I. С. 112–116.
7. *Кричевский Р.Е.* Длина блока, необходимая для получения заданной избыточности // ДАН СССР. 1966. Т. 171. № 1.

8. *Гильберт Э.Н.*, *Мур Э.Ф.* Двоичные кодовые системы переменной длины // Кибернетический сборник. М.: ИЛ, 1961. № 3. С. 103–141.
9. *Ходак Г.Л.* Оценки избыточности при пословном кодировании сообщений, порождаемых бернуллиевским источником // Пробл. передачи информ. 1972. Т. 8. № 2. С. 21–32.
10. *Khodak G.L*. Coding of markov sources with low redundancy // Proc. of 2 International Symp. Inform. Theory Tsahkadzor. 1973. P. 201–204.
11. *Jelinek F.*, *Shneider K.* On variable-length to block coding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1972. V.18. No. 6. P. 756–774.
12. *Трофимов В.К.* Эффективное кодирование блоками слов различной длины, порождённых известным марковским источником // Обработка информации в системах связи. Л.: ЛЭИС, 1985. С. 9–15.
13. *Ziv J.* Variable-to-fixed length codes are better than fixed-to-variable length codes for marcov sources // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. V. 36. No.4. P. 861–863.
14. *Кричевский Р.Е.* Связь между избыточностью кодирования и достоверностью сведений об источнике // Пробл. передачи информ. 1968. Т.4. № 3. С. 48–57.
15. *Krichevskii R.E.*, *Trofimov V.K.* The performace of universal encoding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1981. V. IT-27. No. 2. P. 199–207.
16. *Shtarkov Yu.M.*, *Babkin V.F.* Combinatorial encoding for discrete stationary sources // 2 Internat. Symp. on Inform. Theory Tsahkadzor. 1973. P. 249–256.
17. *Трофимов В.К.* Равномерное по выходу кодирование марковских источников при неизвестной статистике // Пятый Международный симпозиум по теории информации. 1979. Ч. II. С.172–175.
18. *Krichevsky R*. Universal Compression and Retrieval. London, 1994. 219 p.
19. *Sergio Verdu.* Fifty Years of Shannon Theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. VIT 44. No 6. P. 2057–2077.

Трофимов Виктор Куприянович
ГОУ ВПО «Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»
E-mail: trofimov@sibsutis.ru

Поступила в редакцию 3 декабря 2010 г.