ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2011 Управление, вычислительная техника и информатика № 2(15)

УДК 519.872

Д.Д. Даммер, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ НА СТРАХОВЫЕ ВЫПЛАТЫ В КОМПАНИИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ДОГОВОРА

Настоящая работа посвящена исследованию модели страховой компании с неограниченным страховым полем, простейшим потоком входящих страховых рисков и величиной продолжительности договора страхования с произвольной функцией распределения. С помощью метода предельной декомпозиции получена формула для производящей функция числа требований на страховые выплаты, а также выражение для математического ожидания и дисперсии величины общей суммы страховых выплат.

Ключевые слова: *математическая модель*, *страховая компания*, *производящая функция*, *страховые выплаты*, *метод предельной декомпозиции.*

Математическим моделям экономических систем и их исследованию в последнее время уделяется достаточно большое внимание. В стороне не остаются и модели актуарной математики, изучающей различные аспекты страхового дела. В основном, во всех работах, посвященных исследованию математических моделей страховых компаний, все результаты получены для случая, когда величина продолжительности договора страхования распределена по экспоненциальному закону. Так, в работе [1] исследуется классическая модель страховой компании, в [2] рассматривается модель с учетом расходов на рекламу, в [3] – модель с неявной рекламой, когда интенсивность потока входящих рисков зависит от уже застраховавшихся в компании рисков, и компания не тратит на рекламу никаких денежных средств, а инвестирует часть своего капитала в безрисковые активы. В [4] рассматривается модель с возможностью перестраховки некоторых рисков. В этих работах находятся статистические характеристики капитала, числа застрахованных в компании рисков, также вероятность разорения или выживания компании. В данной же работе исследуется такая характеристика, как суммарное число требований на выплату страховых сумм всеми застрахованными в компании рисками при произвольном распределении величины продолжительности договора страхования, что, несомненно, приближает исследуемую математическую модель к адекватной.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель страховой компании с неограниченным страховым полем [5] в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов (рис. 1). Пусть в компанию поступают риски, образуя простейший поток событий интенсивности λ. Каждый риск, находящийся в компании, на протяжении длительности действия договора страхования независимо от других рисков генерирует с интенсивностью γ требование на выплату страховых сумм. И эти требования также образуют простейший поток событий. Естественно считать, что требование риска на выплату определяется наступлением страхового случая.

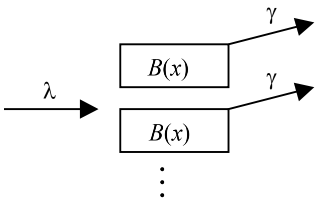

Рис. 1. Представление модели страховой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов

Величину продолжительности договора страхования для каждого риска, находящегося в компании, будем считать случайной величиной с функцией распределения $B(x)$. Задача состоит в нахождении распределения числа требований на выплату страховых сумм, сгенерированных всеми рисками компании, а также среднего значения и дисперсии общей суммы всех страховых выплат.

Для решения данной задачи будем использовать метод предельной декомпозиции [6], согласно которому входящий поток по полиномиальной схеме делится на N независимых простейших потоков, каждый из которых имеет интенсивность λ/N. Заявка каждого такого потока попадает на соответствующий прибор. В момент времени, когда прибор занят, заявка, поступающая на этот прибор, теряется.

Таким образом, наша система массового обслуживания разделена на N независимых однолинейных СМО с потерями. При $N\to\infty$ вероятностью потерь заявок можно пренебречь, и тогда суммарные характеристики совокупности N однолинейных СМО сходятся к характеристикам исходной системы [6].

2. Распределение числа требований на страховые выплаты для модели, представленной в виде однолинейной СМО

Введем следующие обозначения:

$n(t)$ – суммарное число требований на страховые выплаты за время t;

$P(n, t) = P\{n(t)=n\}$ – распределение вероятностей числа требований на страховые выплаты за время t,

$l(t)$ – состояние прибора: $l(t)=\begin{cases}0 – \text{прибор свободен,}\\ 1 – \text{ прибор занят;}\end{cases}$

$z(t)$ – длина интервала от текущего момента времени t до момента окончания срока действия договора (текущего обслуживания), если $l(t)=1$;

$P(0,n,t,N) = P\{l(t)=0,\ n(t,N)=n\}$ – вероятность того, что в момент времени t прибор свободен, число требований на выплату равно n;

$P(1,n,z,t,N) = P\{l(t)=1,\ z(t)<z,\ n(t,N)=n\}$ – вероятность того, что в момент времени t прибор занят, число требований на выплату равно n, длительность интервала времени до окончания срока действия договора меньше z.

Используя Δt-метод, составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(0,n,t,N)$, $P(1,n,z,t,N)$. Сначала запишем допредельные равенства

$$P(0,n,t+\Delta t,N)=P(0,n,t,N)\left(1-\frac{\lambda}{N}\Delta t\right)+P(1,n,\Delta t,t,N)+o(\Delta t),$$

$$P(1,n,z-\Delta t,t+\Delta t,N)=\left[P(1,n,z,t,N)-P(1,n,\Delta t,t,N)\right](1-\gamma\Delta t)+$$

$$+P(0,n,t,N)B(z)\frac{\lambda}{N}\Delta t+P(1,n-1,z,t,N)\gamma\Delta t+o(\Delta t).$$

Система дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial P(0,n,t,N)}{\partial t}=-\frac{\lambda}{N}P(0,n,t,N)+\frac{\partial P(1,n,0,t,N)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P(1,n,z,t,N)}{\partial t}=\frac{\partial P(1,n,z,t,N)}{\partial z}-\frac{\partial P(1,n,0,t,N)}{\partial z}-\gamma P(1,n,z,t,N)+ \tag{1}$$

$$+\frac{\lambda}{N}P(0,n,t,N)B(z)+\gamma P(1,n-1,z,t,N).$$

Введем производящие функции

$$H(0,x,t,N)=\sum_{n=0}^{\infty}x^nP(0,n,t,N),$$

$$H(1,x,z,t,N)=\sum_{n=0}^{\infty}x^nP(1,n,z,t,N). \tag{2}$$

Тогда из системы (1) следует, что производящие функции (2) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial H(0,x,t,N)}{\partial t}=-\frac{\lambda}{N}H(0,x,t,N)+\frac{\partial H(1,x,0,t,N)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H(1,x,z,t,N)}{\partial t}=\frac{\partial H(1,x,z,t,N)}{\partial z}-\frac{\partial H(1,x,0,t,N)}{\partial z}-\gamma H(1,x,z,t,N)+ \tag{3}$$

$$+\frac{\lambda}{N}H(0,x,t,N)B(z)+\gamma xH(1,x,z,t,N).$$

Решение $H(0,x,t,N)$ и $H(1,x,z,t,N)$ системы (3) будем искать в виде

$$H(0,x,t,N)=1+\frac{1}{N}F(0,x,t)+O\left(N^{-2}\right),$$

$$H(1,x,z,t,N)=\frac{1}{N}F(1,x,z,t)+O\left(N^{-2}\right). \tag{4}$$

Подставим (4) в систему (3) и после преобразований получим

$$\frac{\partial F(0,x,t)}{\partial t}=-\lambda+h(x,t),$$

$$\frac{\partial F(1,x,z,t)}{\partial t}-\frac{\partial F(1,x,z,t)}{\partial z}=\gamma(x-1)F(1,x,z,t)+\lambda B(z)-h(x,t), \tag{5}$$

где $h(x,t)=\dfrac{\partial F(1,x,0,t)}{\partial z}$.

Рассмотрим второе уравнение системы (5). Решение этого дифференциального уравнения первого порядка в частных производных определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристических кривых [7]

$$\frac{dt}{1}=\frac{dz}{-1}=\frac{dF}{\gamma(x-1)F+\lambda B(z)-h(x,t)}.$$

Найдем два первых интеграла этой системы. Рассмотрим сначала уравнение $-dt = dz$, его решение

$$z = C_1 - t\,, \tag{6}$$

что и будет определять один первый интеграл. Другой первый интеграл найдем из уравнения

$$dF = \{\gamma(x-1)F + \lambda B(z) - h(x,t)\}\, dt\,. \tag{7}$$

Перепишем (7) в виде

$$\frac{dF}{dt} = \gamma(x-1)F + \lambda B(z) - h(x,t)\,. \tag{8}$$

Относительно функции $F(1,x,z,t)$ получили неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, его общее решение запишем в виде

$$F(1,x,z,t) = e^{(x-1)\gamma t}\left[C_2 + \int_0^t e^{-(x-1)\gamma\tau}\left(\lambda B(C_1-\tau) - h(x,\tau)\,d\tau\right)\right].$$

Введем произвольную дифференцируемую функцию $\varphi(C_1)=C_2$, и тогда общее решение уравнения (8) с учетом (6) будет иметь вид

$$F(1,x,z,t) = e^{(x-1)\gamma t}\left[\varphi(t+z) + \int_0^t e^{-(x-1)\gamma\tau}\left(\lambda B(z+t-\tau) - h(x,\tau)\,d\tau\right)\right]. \tag{9}$$

Определим частное решение с помощью начальных условий. Из (2), (4) и (9) имеем

$$F(1,x,z,0) = \lim_{N\to\infty} NG(1,z,N) = \varphi(z)\,.$$

Теперь задача состоит в определении функции $G(1,z)$. Имеем

$$G(1,z) = P\{\, l(v) = 1, z(v) < z\}\,,$$

$$G(0) = P\{\, l(0) = 0\}\,.$$

Используя Δt-метод, запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для этого распределения. По формуле полной вероятностей запишем равенства

$$G(0,t+\Delta t) = \left(1 - \frac{\lambda}{N}\Delta t\right)G(0,t) + G(1,\Delta t,t) + o(\Delta t)\,,$$

$$G(1,z-\Delta t,t+\Delta t) = \frac{\lambda}{N}\Delta t G(0,t)B(z) + G(1,z,t) - G(1,\Delta t,t) + o(\Delta t)\,. \tag{10}$$

Пусть $G(0,t)\equiv G(0)$, $G(1,z,t)\equiv G(1,z)$, тогда после предельного перехода при $\Delta t\to 0$ система (10) будет иметь вид

$$-\frac{\lambda}{N}G(0) + \frac{\partial G(1,0)}{\partial z} = 0\,,$$

$$\frac{\partial G(1,z)}{\partial z} - \frac{\partial G(1,0)}{\partial z} + \frac{\lambda}{N}G(0)B(z) = 0\,. \tag{11}$$

Запишем решение этой системы

$$G(0) = \frac{N}{N+\lambda m}\,,\quad G(1,z) = \frac{\lambda}{N+\lambda m}\int_0^z (1 - B(x))\,dx\,, \tag{12}$$

где $m=\int_0^\infty (1-B(x))\,dx$ – среднее значение величины продолжительности договора. Таким образом, частное решение уравнения (8) имеет вид

$$F(1,x,z,t)=e^{(x-1)\gamma t}\left(\lambda\int_0^{t+z}(1-B(y))\,dy+\int_0^t e^{-(x-1)\gamma\tau}\left(\lambda B(z+t-\tau)-h(x,\tau)\,d\tau\right)\right). \quad (13)$$

Продифференцируем (13) по z в нуле, получим выражение для функции $h(x,t)$

$$h(x,t)=e^{(x-1)\gamma t}\left(\lambda(1-B(t))+\lambda\int_0^t e^{-(x-1)\gamma\tau}\lambda b(t-\tau)\,d\tau\right), \quad (14)$$

где $b(t)$ – плотность распределения вероятностей значений продолжительности договора.

Запишем (13) при $z\to\infty$

$$F(1,x,t)=\lambda m e^{(x-1)\gamma t}-\lambda\left(\frac{1-e^{(x-1)\gamma t}}{\gamma(x-1)}\right)-\int_0^t e^{-\gamma(x-1)(\tau-t)}h(x,\tau)\,d\tau, \quad (15)$$

где $h(x,t)$ определяется (14).

Теперь найдем вид функции $F(0,x,t)$. Имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial F(0,x,t)}{\partial t}=-\lambda+h(x,t).$$

Его решение имеет вид

$$F(0,x,t)=-\lambda t+\int_0^t h(x,\tau)\,d\tau+F(0,x,0),$$

где $F(0,x,0)=-\lambda m$. Таким образом, теперь можем записать выражение для функции $F(x,t)$:

$$F(x,t)=F(0,x,t)+F(1,x,t)=\lambda m\left[e^{(x-1)\gamma t}-1\right]-$$

$$-\lambda\left(\frac{1-e^{(x-1)\gamma t}}{\gamma(x-1)}+t\right)-\int_0^t\left[e^{-\gamma(x-1)(\tau-t)}-1\right]h(x,\tau)\,d\tau.$$

2. Распределение числа требований на страховые выплаты в компании с неограниченным страховым полем

Производящая функция числа суммарных страховых случаев определяется выражением

$$G(x,t)=M\left\{x^{n(t)}\right\}=\lim_{N\to\infty}M\left\{x^{n_1(t)+n_2(t)+\ldots+n_N(t)}\right\}.$$

Учитывая независимость всех $n_i(t)$, $i=1\ldots N$ и то, что эти величины одинаково распределены, запишем последнее выражение в виде

$$G(x,t)=\lim_{N\to\infty}\left[H(x,t,N)\right]^N=\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{1}{N}F(x,t)+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right]^N.$$

Таким образом, получаем следующее выражение для функции $G(x,t)$:

$$G(x,t)=\exp\{F(x,t)\}=$$

$$=\exp\left\{\lambda m\left[e^{(x-1)\gamma t}-1\right]-\lambda\left(\frac{1-e^{(x-1)\gamma t}}{\gamma(x-1)}+t\right)-\int_0^t\left[e^{-\gamma(x-1)(\tau-t)}-1\right]h(x,\tau)\,d\tau\right\}, \quad (16)$$

где функция $h(x,t)$ имеет вид (14).

Для случая, когда $B(x)=1-e^{-\mu x}$, $x\geq 0$, $\mu>0$, производящая функция величины $n(t)$ будет иметь вид

$$G(x,t)=\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\gamma(x-1)}{(\mu+\gamma-\gamma x)}\right)^2\left[1-e^{-(\mu+\gamma-\gamma x)t}\right]+\frac{\lambda\gamma(x-1)}{(\mu+\gamma-\gamma x)}t\right\}. \quad (17)$$

Эта формула совпадает с результатом, полученным в работе [8], где решается аналогичная задача для модели с экспоненциальной величиной продолжительности договора страхования.

3. Числовые характеристики величины общей суммы страховых выплат

Обозначим $S(t)$ – величину общей страховой суммы, выплаченной по всем страховым случаям за интервал времени t, ξ – величину выплаты по одному страховому случаю. Введем характеристическую функцию величины общей страховой суммы $S(t)$: $\Psi(\alpha,t)=M\{e^{-\alpha S(t)}\}$. Рассмотрим теперь эту функцию подробнее. Имеем

$$\Psi(\alpha,t)=M\left\{e^{-\alpha S(t)}\right\}=M\left\{e^{-\alpha\sum\limits_{i=1}^{n(t)}\xi_i}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}M\left\{e^{-\alpha\sum\limits_{i=1}^{n(t)}\xi_i}\,\middle|\,n(t)=n\right\}P(n,t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}M\left\{\prod_{i=1}^{n}e^{-\alpha\xi_i}\,\middle|\,n(t)=n\right\}P(n,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\alpha)P(n,t),$$

где $\varphi(\alpha)=M\{e^{-\alpha\xi}\}$ – характеристическая функция величины ξ. Таким образом,

$$\Psi(\alpha,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(\alpha)P(n,t)=G(\varphi(\alpha),t),$$

и с учетом вида функции $G(\varphi(\alpha), t)$ получим

$$\Psi(\alpha,t)=\exp\left\{\lambda m\left(e^{(\varphi(\alpha)-1)\gamma t}-1\right)-\lambda\left(\frac{1-e^{(\varphi(\alpha)-1)\gamma t}}{\gamma(\varphi(\alpha)-1)}+t\right)-\int_0^t\left[e^{-\gamma(\varphi(\alpha)-1)(\tau-t)}-1\right]h(\varphi(\alpha),\tau)d\tau\right\}.$$

Обозначим $M\{\xi\}=a_1$, $M\{\xi^2\}=a_2$. Сосчитаем математическое ожидание величины $S(t)$. Так как

$$\left.\frac{\partial\Psi(\alpha,t)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=-M\{S(t)\},$$

то после преобразований получим

$$M\{S(t)\}=\lambda\gamma m a_1 t. \quad (18)$$

Для второго начального момента $S(t)$ можем записать

$$\left.\frac{\partial^2\Psi(\alpha,t)}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}=M\left\{S^2(t)\right\},$$

и тогда дисперсия суммы страховых выплат $S(t)$ будет иметь следующий вид

$$D\{S(t)\}=\lambda\gamma^2 m(a_1t)^2+\lambda m a_2\gamma t-\frac{1}{3}\lambda\gamma^2 a_1^2 t^3+2\lambda\gamma^2 a_1^2\int_0^t(t-\tau)\int_0^\tau sb(\tau-s)\,ds\,d\tau\,. \quad (19)$$

Приведем пример расчета характеристик суммы страховых выплат $S(t)$. Для этого рассмотрим два случая, когда функция экспоненциального распределения времени продолжительности договора страхования имеет вид $B(x)=1-e^{-\mu x}$, $x\geq 0$, где $\mu>0$ – величина, равная обратному значению средней величины продолжительности договора. И второе распределение вырожденное:

$$B(x)=\begin{cases}1, & x>m,\\ 0, & x\leq m,\end{cases}$$

где m – средняя продолжительность договора страхования. Тогда характеристики величины $S(t)$ для экспоненциального распределения будут иметь вид

$$M\{S(t)\}=\frac{\lambda}{\mu}\gamma a_1 t,$$

$$D\{S(t)\}=\lambda a_2\frac{\gamma}{\mu}t+2\lambda a_1^2\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^2 t-2\lambda a_1^2\frac{\gamma^2}{\mu^3}\left(1-e^{-\mu t}\right),$$

и для вырожденного распределения

$$M\{S(t)\}=\lambda\gamma m a_1 t\,,$$

$$D\{S(t)\}=\begin{cases}\lambda\gamma m a_2 t+\lambda\gamma^2 m a_1^2 t^2-\dfrac{\lambda}{3}a_1^2\gamma^2 t^3, & t\leq m,\\ \lambda\gamma m a_2 t+\lambda\gamma^2 m^2 a_1^2 t-\dfrac{\lambda}{3}a_1^2\gamma^2 m^3, & t>m.\end{cases}$$

Рассмотрим еще одну характеристику величины $S(t)$ – коэффициент вариации $V\{S(t)\}$, который определяет разброс значений случайной величины $S(t)$ относительно $M\{S(t)\}$ и рассчитывается по формуле

$$V\{S(t)\}=\frac{\sqrt{D\{S(t)\}}}{M\{S(t)\}}.$$

Поведение коэффициентов вариации $V1(t)$ и $V2(t)$ для экспоненциального и вырожденного распределений соответственно изображено на рис. 2 при следующих значениях параметров: $\lambda=20$, $\mu=0.002$, $\gamma=0.01$, $a_1=10$, $a_2=110$, $m=500$.

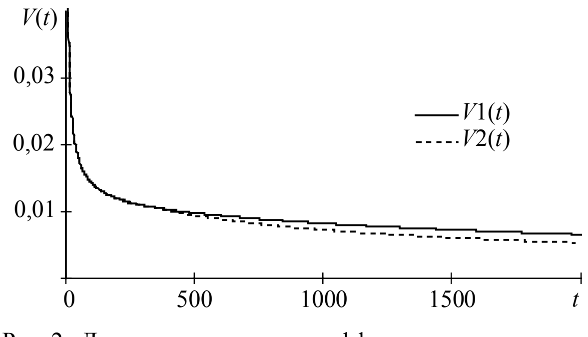

Рис. 2. Динамика изменения коэффициента вариации в зависимости от времени

Численные расчеты показывают: величина $V\{S(t)\}$ с течением времени существенно убывает, достигая значение равное 0,01 при $t = 406{,}2$ для вырожденного распределения и при $t = 451{,}4$ – для экспоненциального, что позволяет найти достаточно точное прогнозное значение величины капитала страховой компании.

Заключение

Таким образом, в данной работе построена математическая модель страховой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов. С использованием метода предельной декомпозиции найдено выражение для производящей функции числа требований на страховые выплаты. Показано, что полученные результаты являются обобщением частных случаев. Также найдены математическое ожидание и дисперсия величины, определяющей общую сумму страховых выплат. Эти результаты могут быть использованы для анализа показателей экономической деятельности страховых компаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глухова Е.В.*, *Змеев О.А.*, *Лившиц К.И.* Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.
2. *Ахмедова Д.Д.*, *Терпугов А.Ф.* Математическая модель страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. № 1. С. 25–29.
3. *Даммер Д.Д.* Характеристики капитала страховой компании с учетом инвестиций в безрисковые активы и при наличии неявной рекламы // Материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. С. 23–27.
4. *Глухова*, *Е В.*, *Капустин Е.В*. Расчет вероятности разорения страховой компании с учетом перестраховки. // Изв. вузов. Физика. 2000. № 4. С. 3–9.
5. *Гафуров Ш. Р.*, *Гугнин В.И.*, *Аманов С.Н.* Язык бизнеса. Ташкент: Шарк, 1995. 738 с.
6. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2005. 228 с.
7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
8. *Назаров А.А.*, *Даммер Д.Д.* Исследование числа требований на выплату страховых сумм // Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. Ч. 1. С. 50–55

Даммер Диана Дамировна
Назаров Анатолий Андреевич
Томский государственный университет
E-mail: di.dammer@yandex.ru; anazarov@fpmk.tsu.ru
Поступила в редакцию 18 декабря 2010 г.