ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.872

И.Л. Лапатин, А.А. Назаров

ХАРАКТЕРИСТИКИ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПУАССОНОВСКИХ ВХОДЯЩИХ ПОТОКАХ[1]

В работе рассматриваются марковские системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Исследуется выходящий поток и число занятых приборов при выполнении асимптотических условий на характеристики входящего потока.

Ключевые слова: *простейший поток*, *MMP-поток*, *MAP-поток*, *выходящий поток.*

В работах по теории массового обслуживания в качестве модели входящего потока часто используется простейший поток [1]. Это касается как фундаментальных работ, которые послужили базой построения теории, так и современных. В 1955 году А.Я. Хинчин [2] сформулировал три условия, при выполнении которых случайный поток однородных событий является простейшим, именно: стационарность, ординарность и отсутствие последействия.

Популярность этого потока долгое время объяснялась тем, что он вполне удовлетворительно описывал многие реальные потоки, а также простотой его исследования. В то же время было замечено, что простейший поток появляется и в качестве предельного для некоторых последовательностей потоков. В связи с этим, в середине XX века появился ряд работ, посвященных анализу сходимости суммы большого числа независимых потоков малой интенсивности к простейшему потоку. Среди них следует отметить работы Пальма [3], Реньи [4], Г.А. Ососкова [5], Б.И. Григелиониса [6] и А.Я. Хинчина. Вопрос о скорости сходимости таких предельных сумм к потокам Пуассона рассматривался в работах [7,8].

В то же самое время, Реньи (в упомянутой выше работе) показал, что простейший поток может получаться не только в результате суммирования бесконечно малых независимых потоков. Он рассматривал произвольный поток восстановления и применял к нему операцию прореживания (с некоторой вероятностью каждое событие убиралось из рассматриваемого потока). Реньи доказал, что при многократном повторении этой операции и соответствующей нормировке времени рассматриваемый поток сходится к простейшему.

В качестве существенного обобщения простейших потоков для более адекватного описания реальных потоков была предложена модель MAP (Markovian Arri-

[1] Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 годы)» Федерального агентства по образованию, проект № 4761.

val Process). Его понятие впервые было введено М. Ньютсом [9], а затем уточнено Д. Лукантони в работе [10], которая также содержит первые исследования основных характеристик MAP-потоков. В русскоязычной литературе определения таких потоков даны в книгах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко [1], А.Н. Дудина, В.И. Клименок [11], А.А. Назарова, С.П. Моисеевой [12].

Широко используемым частным случаем MAP-потоков является класс MMP-потоков (Markov Modulated Poisson Process). В работе [13] формулируется предельное условие, при выполнении которого последовательность MMP-потоков сходится к простейшему. Аналогичное условие формулируется и для случая общего MAP-потока.

Таким образом, в этих условиях система MAP|M|∞ (MMP|M|∞) становится близкой к M|M|∞, для которой П. Берком еще в 1956 году было показано [14], что выходящий поток является простейшим, а стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов является пуассоновским. Поэтому естественным было бы предположить, что характеристики системы MAP|M|∞ (MMP|M|∞) в рассматриваемых асимптотических условиях на входящие потоки совпадают с характеристиками системы M|M|∞. В данной работе предлагается доказательство этого предположения.

1. Исследование системы MAP|M|∞

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает MAP-поток заявок, заданный матрицей инфинитезимальных характеристик Q управляющей цепи Маркова $k(t)$, набором условных интенсивностей λ_k (k=1,…,K) и набором вероятностей $d_{k\nu}$ (k, ν=1,…,K). Заявка, пришедшая в систему, занимает любой из свободных приборов, на котором обслуживается в течение случайного времени. Распределение времени обслуживания поступающих заявок является экспоненциальным с параметром μ.

Если использовать символику, предложенную Д. Кендаллом [15], то рассматриваемая система с экспоненциальным временем обслуживания будет обозначаться MAP | M | ∞.

Будем исследовать выходящий поток системы MAP | M | ∞, который описывается случайным процессом $m(t)$ (число заявок, закончивших обслуживание в системе за некоторое время t) и процессом $i(t)$ (число занятых приборов в системе в момент времени t).

При непуассоновском входящем потоке двумерный процесс $\{i(t),m(t)\}$ не является марковским, так как интенсивность поступления заявок в систему (то есть увеличение значения процесса $i(t)$) зависит от состояния управляющей цепи Маркова $k(t)$. Поэтому, добавляя этот процесс в рассмотрение, получим трехмерную цепь Маркова $\{k(t),i(t),m(t)\}$. Такой метод носит название «внешнего» марковизирования [16]. Для значений распределения вероятностей

$$P(k,i,m,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, m(t) = m\}$$

можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,i,m,t)}{\partial t} = \lambda_k \{P(k,i-1,m,t) - P(k,i,m,t)\} +$$
$$+\mu\{(i+1)P(k,i+1,m-1,t) - iP(k,i,m,t)\} +$$
$$+\sum_{\nu}\{P(\nu,i,m,t)\cdot(1-d_{\nu k}) + P(\nu,i-1,m,t)d_{\nu k}\}q_{\nu k}.$$

Обозначив функции

$$H(k,x,u,t)=\sum_i e^{jxi}\sum_m e^{jum}P(k,i,m,t),$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial H(k,x,u,t)}{\partial x}=j\sum_i ie^{jxi}\sum_m e^{jum}P(k,i,m,t),$$

для функций $H(k,x,u,t)$ получим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial H(k,x,u,t)}{\partial t}=\lambda_k\cdot(e^{jx}-1)H(k,x,u,t)+j\mu(1-e^{ju}e^{-jx})\frac{\partial H(k,x,u,t)}{\partial x}+$$
$$+\sum_\nu\{(e^{jx}-1)d_{\nu k}q_{\nu k}+q_{\nu k}\}H(\nu,x,u,t).$$

Полученную систему запишем в матричном виде:

$$\frac{\partial H(x,u,t)}{\partial t}+j\mu(e^{ju}e^{-jx}-1)\frac{\partial H(x,u,t)}{\partial x}=H(x,u,t)\left\{Q+(e^{jx}-1)B\right\}, \qquad (1)$$

где $H(x,u,t)=\{H(0,x,u,t),H(1,x,u,t),...\}$, Q – матрица инфинитезимальных характеристик $q_{\nu k}$, B – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{\nu k}\cdot q_{\nu k}$ вне главной диагонали.

Систему дифференциальных уравнений (1), записанную в матричном виде, будем называть дифференциально-матричным уравнением. Отметим, что получить аналитическое решение этого уравнения не удается. В данной работе предлагается решать это уравнение методом асимптотического анализа.

2. Условие предельно частых изменений состояний MMP-потока

Сначала рассмотрим характеристики системы MMP|M|∞. Напомним, что MMP-поток – это MAP-поток, у которого все вероятности $d_{k\nu}$ равны нулю, то есть матрица B становится диагональной матрицей Λ с условными интенсивностями λ_k на главной диагонали. Поэтому уравнение, определяющее характеристики системы MMP|M|∞, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial H(x,u,t)}{\partial t}+j\mu(e^{ju}e^{-jx}-1)\frac{\partial H(x,u,t)}{\partial x}=H(x,u,t)\left\{Q+(e^{jx}-1)\Lambda\right\}. \qquad (2)$$

Будем рассматривать систему MMP|M|∞ в условии предельно частых изменений состояний входящего потока. Зафиксируем некоторую матрицу инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$, которая определяет управляющую цепь Маркова $k(t)$ и матрицу Λ. Затем, полагая, что S некоторая положительная величина, в уравнении (2) сделаем следующие замены:

$$Q=S\cdot Q^{(1)},\ H(x,u,t)=F(x,u,t,S).$$

Тогда для вектор-функций $F(x,u,t,S)$ можно записать

$$\frac{\partial F(x,u,t,S)}{\partial t}+j\mu(e^{ju}e^{-jx}-1)\frac{\partial F(x,u,t,S)}{\partial x}=F(x,u,t,S)\left\{S\cdot Q^{(1)}+(e^{jx}-1)\Lambda\right\}. \quad (3)$$

Сначала найдем асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов системы MMP|M|∞ в условии предельно частых изменений состояний входящего потока. Для этого в уравнении (2) положим u=0 и перейдем к стационарному режиму

$$j\mu(e^{-jx}-1)\frac{\partial F(x,S)}{\partial x}=F(x,S)\left\{S\cdot Q^{(1)}+(e^{jx}-1)\Lambda\right\}. \tag{4}$$

Здесь $F(x,S)=\lim\limits_{t\to\infty}F(x,0,t,S)$.

Теорема 1. *Сумма компонентов предельного, при* $S\to\infty$, *значения вектор-строки* $F(x)$ *решения* $F(x,S)$ *уравнения* (4) *имеет вид*

$$F(x)E=\exp\left\{(e^{jx}-1)\frac{\kappa}{\mu}\right\}, \tag{5}$$

где E – единичный вектор-столбец, величина κ *определяется равенством* $\kappa=R\Lambda E$ *и имеет смысл интенсивности входящего потока, а R – вектор стационарного распределения вероятностей состояний входящего потока.*

Доказательство. Поделив левую и правую части уравнения (4) на S и устремив S к бесконечности, получим систему

$$F(x)Q^{(1)}=0,$$

которая совпадает по виду с системой для стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова. Поэтому ее решение имеет вид

$$F(x)=R\cdot\Phi(x), \tag{6}$$

где R – вектор стационарного распределения состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, а $\Phi(x)$ – некоторая скалярная функция. Для определения вида этой функции в уравнение (4) подставим выражение (6). Умножим справа полученное уравнение на вектор-стобец E соответствующей размерности, устремим S к бесконечности и получим равенство

$$j\mu(e^{-jx}-1)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x}=\Phi(x)(e^{jx}-1)R\Lambda E.$$

Учитывая, что $R\Lambda E$=κ, найдем решение полученного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\Phi(x)=\exp\left\{(e^{jx}-1)\frac{\kappa}{\mu}\right\},$$

откуда, в силу равенства (6), получим

$$F(x)=R\cdot\exp\left\{(e^{jx}-1)\frac{\kappa}{\mu}\right\}.$$

С учетом условия нормировки RE=1, функция $F(x)E$ удовлетворяет равенству (6). Теорема доказана.

Теорема 1 показывает, что стационарное распределение вероятностей числа занятых приборов системы MMP|M|∞ в условии предельно частых изменений состояний входящего потока является пуассоновским с параметром κ/μ.

Теорема 2. *Сумма компонентов предельного, при* $S\to\infty$, *значения вектор-строки* $F(x,u,t)$ *решения* $F(x,u,t,S)$ *уравнения* (2) *имеет вид*

$$F(x,u,t)E=\exp\left\{(e^{jx}-1)\frac{\kappa}{\mu}+(e^{ju}-1)\kappa t\right\}, \tag{7}$$

где E – единичный вектор-столбец, величина κ *имеет смысл интенсивности входящего потока.*

Доказательство. Поделив левую и правую части уравнения (3) на S и устремив S к бесконечности, получим систему

$$F(x,u,t)Q^{(1)}=0,$$

которая совпадает по виду с системой для стационарного распределения вероятностей состояний управляющей цепи Маркова. Поэтому ее решение представляется в виде

$$F(x,u,t)=R\cdot\Phi(x,u,t)\,, \tag{8}$$

где R – вектор стационарного распределения состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$, а $\Phi(x,u,t)$ – некоторая скалярная функция. Для определения вида этой функции в уравнение (3) подставим выражение (8). Умножая справа полученное уравнение на вектор-стобец E соответствующей размерности и устремив S к бесконечности, получим равенство

$$\frac{\partial\Phi(x,u,t)}{\partial t}+j\mu(e^{ju}e^{-jx}-1)\frac{\partial\Phi(x,u,t)}{\partial x}=\Phi(x,u,t)(e^{jx}-1)\kappa. \tag{9}$$

С учетом условия нормировки $RE=1$ и (8) получаем

$$F(x,u,t)E=\Phi(x,u,t)\,.$$

Нетрудно показать, что выражение (7) является решением уравнения (9). Теорема доказана.

Доказанная теорема говорит о том, что при предельно частых изменениях состояний входящего потока (то есть когда средние времена пребывания управляющей цепи Маркова в каждом состоянии стремятся к нулю) число заявок, закончивших обслуживания в системе MMP|M|∞, имеет распределение Пуассона с параметром κt, причем число заявок в системе в момент времени t и число событий в выходящем потоке к моменту времени t стохастически независимы.

3. Условие предельно частых изменений состояний MAP-потока и согласованного интенсивного прореживания

Теперь рассмотрим аналогичную задачу для системы с входящим MAP-потоком. Зафиксируем некоторую матрицу инфинитезимальных характеристик $Q^{(1)}$, которая определяет управляющую цепь Маркова $k(t)$, матрицу $D^{(1)}$ вероятностей наступления событий в потоке при переходе управляющей цепи из одного состояния в другое и матрицу Λ. Затем, полагая, что S некоторая положительная величина, в уравнении (1) сделаем следующие замены:

$$Q=S\cdot Q^{(1)},\ D=\frac{1}{S}D^{(1)},\ H(x,u,t)=F(x,u,t,S)\,.$$

Тогда для вектор-функций $F(x,u,t,S)$ можно записать

$$\frac{\partial F(x,u,t,S)}{\partial t}+j\mu(e^{ju}e^{-jx}-1)\frac{\partial F(x,u,t,S)}{\partial x}=F(x,u,t,S)\left\{S\cdot Q^{(1)}+(e^{jx}-1)B\right\}. \tag{10}$$

Теорема 3. *Сумма компонентов предельного, при* $S\to\infty$, *значения вектор-строки* $F(x,u,t)$ *решения* $F(x,u,t,S)$ *уравнения* (10) *имеет вид*

$$F(x,u,t)E=\exp\left\{(e^{jx}-1)\frac{\kappa}{\mu}+(e^{ju}-1)\kappa t\right\}, \tag{11}$$

где E *– единичный вектор-столбец, величина* κ *определяется равенством* $\kappa=RBE$ *и имеет смысл интенсивности входящего MAP-потока.*

Доказательство теоремы 3 повторяет рассуждения доказательства теоремы 2.

Теорема 3 говорит о том, что при предельно частых изменениях состояний входящего потока и согласованного интенсивного прореживания число заявок, закончивших обслуживания в системе MAP|M|∞, имеет распределение Пуассона с параметром κt, а число заявок в системе в произвольный момент времени также имеет распределение Пуассона с параметром κ/μ. При этом число заявок в системе в момент времени t и число событий в выходящем потоке к моменту времени t стохастически независимы. Под согласованным интенсивным прореживанием понимается такой факт, что рост значений инфинитезимальных характеристик и уменьшение вероятностей наступления событий при переходе управляющей цепи из одного состояния в другое происходит пропорционально одному и тому же параметру S.

Заключение

В данной работе были рассмотрены марковские системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Сформулированы и доказаны три теоремы, которые говорят о том, что при выполнении предельных условий на параметры входящего потока число заявок, закончивших обслуживания в системе MAP|M|∞ (MMP|M|∞), имеет распределение Пуассона с параметром κt, а число заявок в системе в произвольный момент времени также имеет распределение Пуассона с параметром κ/μ. Для MMP-потока это условие предельно частых изменений состояний входящего потока, а для MAP-потока – условие предельно частых изменений состояний потока и согласованного интенсивного прореживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. М.: КомКнига, 2005. 400 с.
2. *Хинчин А.Я.* Математические методы теории массового обслуживания // Тр. Мат. ин-та им В.А. Стеклова АН СССР. 1955. Т. 49. С. 1–123.
3. *Palm. C.* Intensitatsschwankungen in Fernsprechverkehr // Ericson Technics. 1943. V. 44. No. 1. P. 1–189.
4. *Renyi A.* Poisson-folyamat egy jemllemzёse // Тр. Мат. ин-та АН Венгрии. 1956. V. 1. No. 4. P. 519–527.
5. *Ососков Г.А.* Одна предельная теорема для потоков однородных событий // Теория вероятностей и ее применение. 1956. Т. 1. № 2. С. 274–282.
6. *Григелионис Б.И.* Уточнение многомерной предельной теоремы о сходимости к закону Пуассона // Литов. мат. сб. 1962. Т. 2. № 2. С. 143–148.
7. *Григелионис Б.И.* О точности приближения композиции процессов восстановления пуассоновским процессом // Литов. мат. сб. 1962. Т. 2. № 2. С. 135–143.
8. *Погожев И.Б.* Оценка отклонения потока отказов в аппаратуре многофазового использования от пуассоновского потока // Кибернетику – на службу коммунизму. Т. 2. М.: Энергия, 1964. С. 228–245.
9. *Neuts M.F.* A versatile Markovian arrival process // J. Appl. Prob. 1979. V. 16. P. 764–779.
10. *Lucantoni D.* New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
11. *Дудин А.Н.*, *Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. 175 с.
12. *Назаров А.А.*, *Моисеева С. П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 109 с.
13. *Лапатин И.Л.*, *Назаров А.А.* Асимптотически пуассоновские MAP-потоки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 72–78.

14. *Burke P.J.* The Output of Queueing Systems // Operations Research. 1956. V. 4. P. 699–704.
15. *Kendall D.G.* Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain // Ann. Math. Statist. 1953. V. 24. P. 338–354.
16. *Кениг Д.*, *Штойян Д.* Методы теории массового обслуживания: пер. с нем. / под ред. Г.П. Климова. М.: Радио и связь, 1981.

Назаров Анатолий Андреевич
Лапатин Иван Леонидович
Томский государственный университет
E-mail: nazarov@fpmk.tsu.ru, ilapatin@mail.ru
Поступила в редакцию 27 мая 2011 г.