

УДК 519.2

Е.Е. Сергеева, С.Э. Воробейчиков

ГАРАНТИРОВАННАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ И ОБНАРУЖЕНИЕ МОМЕНТА РАЗЛАДКИ GARCH(1,1)-ПРОЦЕССА

Рассматривается задача обнаружения момента изменения параметров GARCH(1,1)-процесса. Параметры процесса предполагаются неизвестными. Предлагается последовательная процедура обнаружения момента разладки, использующая оценки, основанные на модификации метода наименьших квадратов со специальным образом подобранными весами. Получены формулы для расчета вероятностных характеристик процедуры, изучены ее асимптотические свойства. Приведены результаты моделирования.

Ключевые слова: *GARCH(1,1), момент разладки, модифицированный МНК.*

Одной из наиболее часто используемых в настоящее время моделей случайных процессов являются процессы типа GARCH, введенные Т. Bollerslev [1]. Описание процессов такого типа предполагает, что на текущую изменчивость дисперсии влияют как предыдущие изменения показателей, так и предыдущие значения дисперсии. При определенных ограничениях на параметры GARCH-процесс является стационарным, хотя на отдельных интервалах времени его поведение может сильно отличаться. При исследовании временных рядов с большим числом данных может оказаться, что на разных временных интервалах параметры процесса нельзя считать неизменными. Таким образом, возникает задача обнаружения моментов изменения параметров процесса. Проблема обнаружения момента изменения статистических свойств наблюдаемого процесса является одной из классических задач математической статистики и известна в литературе как задача обнаружения разладки. Такие задачи возникают при обнаружении моментов изменения характеристик динамических систем, описываемых моделями авторегрессионного типа со случайными (дрейфующими) параметрами, а также при анализе эконометрических временных рядов.

Для решения задач обнаружения разладки разработан ряд алгоритмов, при различных предположениях о модели наблюдаемого процесса [2 – 4]. Наибольший практический интерес представляют алгоритмы, использующие последовательный анализ, которые позволяют обнаруживать произошедшие изменения в темпе поступления данных. Основными характеристиками последовательных процедур обнаружения разладки являются среднее время между ложными тревогами и среднее время запаздывания. Теоретическое исследование свойств процедуры обнаружения разладки для выборки фиксированного размера часто является невозможным, поэтому изучаются асимптотические свойства при неограниченном возрастании размера выборки.

Часто рассматривается задача обнаружения разладки в предположении, что известна начальная и конечная модели процесса. Однако большой прикладной интерес представляют такие ситуации, когда распределение процесса до и после момента разладки является неизвестным. Оценка параметров GARCH-процесса является трудной задачей. Для оценивания параметров таких процессов часто ис-

пользуется метод квазимоксимального правдоподобия. Такие оценки рассматривались, в частности, в [5 – 7]. С другой стороны, Baillie и Chung [8] предложили оценку с минимальным расстоянием для модели GARCH(1,1), которая основывается на автокорреляционной функции квадратов наблюдений.

В данной работе предлагается последовательная процедура обнаружения момента изменения параметров GARCH-процесса с неизвестными значениями параметров до и после момента разладки. Для определения момента разладки процесса используются оценки параметров, построенные с помощью модифицированного взвешенного метода наименьших квадратов, предложенного С. Воробейчиковым и Н. Медер в [9]. Исследованы основные характеристики процедуры обнаружения разладки: вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия. Результаты моделирования демонстрируют эффективность предложенной процедуры.

1. Постановка задачи

Рассматривается устойчивый случайный процесс GARCH(1,1)

$$x_{n+1} = \sigma_{n+1}\varepsilon_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним, единичной дисперсией и известным распределением. Условная вариация процесса x_{n+1} представляет собой случайный процесс вида

$$\sigma_{n+1}^2 = a + \lambda x_n^2 + \mu \sigma_n^2.$$

Параметры $\{a, \lambda\}$ предполагаются неизвестными, а параметр μ известным, причем параметры процесса удовлетворяют условиям

$$a > 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0, 0 < \lambda + \mu < 1.$$

Тогда процесс σ_{n+1}^2 является стационарным [1]. Вектор параметров $\Lambda = [a, \lambda]$ меняет свое значение с Λ_0 на Λ_1 в случайный момент времени θ . Начальное и конечное значения параметров удовлетворяют условию

$$|\Lambda_0 - \Lambda_1|^2 \geq \Delta > 0,$$

где Δ является известным значением, определяющим минимальное расстояние между значениями параметров до и после момента разладки. Требуется по наблюдениям за процессом x_n определить момент разладки.

2. Построение оценок параметров

Так как значения параметров до и после момента разладки являются неизвестными, то необходимо получить их оценки. Используя определение GARCH-процесса, можно получить

$$x_{n+1}^2 = \sigma_{n+1}^2 \varepsilon_{n+1}^2 = (a + \lambda x_n^2 + \mu \sigma_n^2) \varepsilon_{n+1}^2 = \left(a \sum_{i=0}^n \mu^i + \lambda \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i} \right) \varepsilon_{n+1}^2.$$

Чтобы привести авторегрессионный процесс к удобному для исследования виду, используем подход, который был предложен в [13]. Тогда процесс (1) можно записать в виде

$$x_{n+1}^2 = \sigma_{n+1}^2 + \sigma_{n+1}^2 (\varepsilon_{n+1}^2 - 1) = \left(a \sum_{i=0}^n \mu^i + \lambda \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i} \right) + \left(a \sum_{i=0}^n \mu^i + \lambda \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i} \right) (\varepsilon_{n+1}^2 - 1).$$

Введем следующие обозначения:

$$m_n = \max \left(\frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu - 1}, \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i} \right), \quad Y_{n+1} = \frac{x_{n+1}^2}{m_n}, \quad u_n = \frac{\mu^{n+1} - 1}{(\mu - 1)m_n}, \quad w_n = \frac{\sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i}}{m_n},$$

$$B_N = \frac{a \frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu - 1} + \lambda \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i}}{m_n}, \quad \zeta_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^2 - 1, \quad U_n = (u_n \quad w_n)^T, \quad \Lambda = (a \quad \lambda).$$

Теперь процесс (1) можно записать в векторном виде

$$Y_{n+1} = \Lambda U_n + B_N \zeta_{n+1}. \quad (2)$$

Построим оценку величин B_N в (2). С одной стороны,

$$B_N = \frac{a \frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu - 1} + \lambda \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i}}{\max \left(\frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu - 1}, \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i} \right)} \leq (a + \lambda).$$

С другой стороны,

$$x_{n+1}^2 = \left(a \frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu - 1} + \lambda \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i} \right) \zeta_{n+1}^2 \geq (a + \lambda) \min \left(\frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu - 1}, \sum_{i=0}^n x_i^2 \mu^{n-i} \right) \zeta_{n+1}^2.$$

Тогда

$$(a + \lambda) \leq \sum_{k=0}^N \frac{x_{n+1-k}^2}{\min \left(\frac{\mu^{n+1-k} - 1}{\mu - 1}, \sum_{i=0}^{n-k} x_i^2 \mu^{n-k-i} \right)} C_N, \quad C_N = E \left(\sum_{k=0}^N \zeta_{n+1-k}^2 \right)^{-1}.$$

N – натуральное число, такое, что C_N определена. Это значение зависит от плотности распределения шумов процесса (1). Далее будем использовать оценку B_N , полученную в следующем виде:

$$B = \sum_{k=0}^N \frac{x_{n+1-k}^2}{\min \left(\frac{\mu^{n+1-k} - 1}{\mu - 1}, \sum_{i=0}^{n-k} x_i^2 \mu^{n-k-i} \right)} C_N.$$

Для нахождения оценки неизвестного вектора параметров Λ используем последовательный метод оценивания, предложенный в [9]. Оценка имеет вид

$$\Lambda^*(N_1) = \left(\sum_{k=N+1}^{N_1} Y_{k+1} v(k, x) U_k \right) A^{-1}(N_1),$$

$$A(N_1) = \sum_{n=N+1}^{N_1} v(n, x) U_n U_n^T.$$

Для фиксированного значения $H > 0$ определим момент остановки $\tau = \tau(H)$

$$\tau = \tau(P) = \inf \{ N_1 > N + 1 : v_{\min}(N_1) \geq H \}, \quad (3)$$

где $v_{\min}(N_1)$ – минимальное собственное значение матрицы $A(N_1)$.

Положительные весовые функции $v(n, x)$ на интервале $[N+1, N+\sigma-1]$ задаются следующим образом:

$$v(n, x) = \frac{1}{B\sqrt{U_n^T U_n}},$$

где σ – наименьшее значение N_1 , для которого $A(N_1)$ не вырождена. Веса $v(n, x)$ на интервале $[N+\sigma, \tau-1]$ находятся из условий

$$\frac{v_{\min}(k)}{B^2} = \sum_{n=N+\sigma}^k v^2(n, x) U_n^T U_n. \quad (4)$$

Последняя весовая функция $v(\tau, x)$ находится из условия

$$\frac{v_{\min}(\tau)}{B^2} \geq \sum_{n=N+\sigma}^{\tau} v^2(n, x) U_n^T U_n, \quad v_{\min}(\tau) = H. \quad (5)$$

Оценка параметров $\Lambda^*(H)$ в момент времени τ имеет следующий вид:

$$\Lambda^*(H) = \left(\sum_{n=N+1}^{\tau} Y_{n+1} v(n, x) U_n \right) A^{-1}(\tau), \quad (6)$$

$$A(\tau) = \sum_{n=N+1}^{\tau} v(n, x) U_n U_n^T.$$

Свойства предложенной оценки (3) – (6) задаются в теореме 1.

Теорема 1. Для любого значения параметра процедуры $H > 0$ момент прекращения наблюдений $\tau(H)$ конечен с вероятностью единица и средний квадрат отклонения оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству

$$M \left\{ \left| \Lambda^*(H) - \Lambda \right| \right\}^2 \leq \frac{H+1}{H^2}.$$

Доказательство. Момент прекращения наблюдений $\tau(H)$ является конечным тогда и только тогда, когда расходится почти наверное ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} v^2(n, x) U_n^T U_n = \infty.$$

Принимая во внимание условие сходимости временных рядов [10] и определение собственного вектора матрицы $A(N_1)$ [11], можно показать, что данный ряд является расходящимся при любом значении параметра H .

Используя неравенство Коши – Буняковского (4), (6), можно получить

$$\begin{aligned} M \left\{ \left| \Lambda^*(H) - \Lambda \right| \right\}^2 &\leq M \left\{ \left| \sum_{n=N+1}^{\tau} B \zeta_{n+1} v(n, x) U_n A^{-1}(\tau) \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{H^2} M \left\{ \sum_{n=N+1}^{\tau} B^2 \zeta_{n+1}^2 v^2(n, x) |U_n|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем усеченный момент остановки $\tau(N_1) = \min\{\tau, N_1\}$, причем $\tau(N_1) \rightarrow \tau$ при $N_1 \rightarrow \infty$. Тогда (7) преобразуется к виду, отличающемуся от исходного только пределом суммирования. Обозначим $F_n = \sigma(x_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ – σ -алгебру, порожденную случайными величинами $\{x_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$. Используя свойства условного математического ожидания, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} M \left\{ \sum_{n=N+1}^{\tau(N_1)} B^2 \zeta_{n+1}^2 v^2(n, x) U_n^2 \right\} &= \frac{1}{H^2} M \left\{ \sum_{n=N+1}^{N_1} B^2 v^2(n, x) U_n^2 \zeta_{n+1}^2 \chi_{(n \leq \tau)} \right\} = \\ &= \frac{1}{H^2} M \left\{ \sum_{n=N+1}^{\tau(N_1)} B^2 v^2(n, x) U_n^2 \right\} \rightarrow \frac{1}{H^2} M \left\{ \sum_{n=N+1}^{N_1} B^2 v^2(n, x) U_n^2 \right\} \leq \frac{1+H}{H^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если процесс (1) является устойчивым, $M(\zeta_n)^4 < \infty$ и выполнено следующее условие:

$$v(n, x) = \sqrt{\frac{\gamma(H)H}{U_n^T U_n}}, \quad (8)$$

где $\gamma(H)$ – функция, такая, что $\gamma(H)H \rightarrow \infty$ при $H \rightarrow \infty$, то для достаточно больших H

$$P\{|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2 > x\} \leq 1 - F\left(\frac{xH^2}{H+1}\right), \quad (9)$$

где $F(x)$ является распределением χ^2 с двумя степенями свободы.

Доказательство. Учитывая (6), аналогично доказательству теоремы 1 можно получить следующее неравенство:

$$M\left\{|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2\right\} \leq \frac{1}{H^2} M\left\{\sum_{n=N+1}^{\tau} |B\zeta_{n+1}v(n, x)U_n|^2\right\}.$$

Пусть $\{F_k\}_{k \geq 1}$ последовательность σ -алгебр. Рассмотрим мартингал

$$X_\tau = \frac{B}{\sqrt{H+1}} \sum_{k=N+1}^{\tau} v(k, x) DU_k \zeta_{k+1},$$

где $D = [d_1, d_2]$ – произвольный вектор. Далее найдем предельное распределение X_τ аналогично доказательству центральной предельной мартингальной теоремы [10]. Обозначим

$$\eta_k = \eta_k(H) = \frac{B}{\sqrt{H+1}} v(k, x) DU_k \zeta_{k+1} \chi_{(k \leq \tau)}, \quad X_n = \sum_{k=N+1}^n \eta_k.$$

Для того чтобы найти характеристическую функцию X_τ , нужно найти предел характеристической функции X_n , так как $X_n \rightarrow X_\tau$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим

$$|\Psi^n(\lambda)| = \prod_{k=N+1}^n M\left\{e^{i\lambda\eta_k} \mid F_k\right\}.$$

Лемма [10]. Если для заданного λ выполняется условие

$$|\Psi^n(\lambda)| \geq c(\lambda) > 0, \quad n > 1,$$

то сходимости по вероятности

$$\Psi^n(\lambda) \rightarrow M(e^{i\lambda X})$$

достаточно для сходимости

$$M(e^{i\lambda X_n}) \rightarrow M(e^{i\lambda X}).$$

Проверим выполнение условий леммы. Рассматривая

$$|\Psi^n(\lambda)| = \prod_{k=N+1}^n |M\{e^{i\lambda\eta_k} | F_k\}| = \prod_{k=N+1}^n |1 + M\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k | F_k\}|,$$

приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} |\Psi^n(\eta)| &\geq \prod_{k=N+1}^n \left(1 - M\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k | F_k\}\right) \geq \prod_{k=N+1}^n \left(1 - M\left\{\frac{(\lambda\eta_k)^2}{2} | F_k\right\}\right) = \\ &= \prod_{k=N+1}^n \left(1 - \frac{(\lambda Bv(k, x)DU_k)^2 \chi_{(k \leq \tau)}}{2(H+1)} M\zeta_{k+1}^2\right) = \exp\left(\sum_{k=N+1}^n \ln\left(1 - \frac{(\lambda Bv(k, x)DU_k)^2 \chi_{(k \leq \tau)}}{2(H+1)}\right)\right) \geq \\ &\geq \exp\left(-\sum_{k=N+1}^{\min(n, \tau)} \frac{(\lambda Bv(k, x)DU_k)^2}{H+1}\right) \geq \exp\left(-\frac{\lambda^2 B^2}{H+1} \sum_{k=N+1}^{\tau} (v(k, x)DU_k)^2\right). \end{aligned}$$

Учитывая (5), получаем

$$|\Psi^n(\lambda)| \geq \exp\left(-\frac{\lambda^2 B^2}{H+1} \frac{H+1}{B^2}\right) = \exp(-\lambda^2).$$

Таким образом, условия леммы выполняются. Далее, чтобы найти асимптотическое распределение $\Psi^n(\lambda)$, запишем $\Psi^n(\lambda)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} |\Psi^n(\lambda)| &= \exp\left(\sum_{k=N+1}^n M\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k | F_k\}\right) \times \\ &\times \exp\left(-\sum_{k=N+1}^n M\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k | F_k\}\right) \times \prod_{k=N+1}^n |1 + M\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k | F_k\}|. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрев два последних сомножителя, используя (5), (8), неравенства

$$|e^x - 1| \leq e^{|x|} |x|, \quad |e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x| \leq \frac{(\lambda x)^2}{2}, \quad |\ln(1+x) - x| \leq 2|x|^2, \quad \text{для } |x| < 1/2$$

и обозначив

$$\beta_k = M\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k | F_k\},$$

получим

$$\begin{aligned} \left|\prod_{k=N+1}^n |1 + \beta_k| e^{-\beta_k} - 1\right| &= \left|\exp\left\{\ln \prod_{k=N+1}^n |1 + \beta_k| e^{-\beta_k}\right\} - 1\right| \leq \\ &\leq \exp\left\{\left|\ln \prod_{k=N+1}^n (1 + \beta_k) e^{-\beta_k}\right|\right\} \left|\ln \prod_{k=N+1}^n (1 + \beta_k) e^{-\beta_k}\right| \leq \\ &\leq \frac{\lambda^4 B^4 \gamma(H) H |D|^2}{(H+1)^2} \sum_{k=N+1}^{\tau} (v(k, x)DU_k)^2 \leq \lambda^4 B^2 |D|^2 \gamma(H) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, произведение двух последних сомножителей в (10) сходится по вероятности к единице при $H \rightarrow \infty$. Используя неравенство

$$|e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x| + \frac{(\lambda x)^2}{2} \leq \frac{|\lambda x|^3}{6},$$

первый сомножитель в (10) можно представить в виде

$$\exp\left(\sum_{k=N+1}^n M\left\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k \mid F_k\right\}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^n M\left\{(\lambda\eta_k)^2 \mid F_k\right\}\right) \times \\ \times \exp\left(\sum_{k=N+1}^n M\left\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k + \frac{(\lambda\eta_k)^2}{2} \mid F_k\right\}\right),$$

где

$$\left|\sum_{k=N+1}^n M\left\{e^{i\lambda\eta_k} - 1 - i\lambda\eta_k + \frac{(\lambda\eta_k)^2}{2} \mid F_k\right\}\right| = \\ = \frac{B^3}{6(\sqrt{H+1})^3} \sum_{k=N+1}^n M\left\{|\lambda v(k, x) DU_k \zeta_{k+1}|^3 \chi_{(k \leq \tau)} \mid F_k\right\} = \\ = \frac{B^3 |\lambda|^3}{6(\sqrt{H+1})^3} M|\zeta_{k+1}|^3 \sum_{k=N+1}^{\tau} |v(k, x) DU_k|^3 \xrightarrow{H \rightarrow \infty} 0.$$

Рассмотрим теперь

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^n M\left\{(\lambda\eta_k)^2 \mid F_k\right\}\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{\lambda^2 B^2}{2(H+1)} \sum_{k=n+1}^{\min(n, \tau)} (v(k, x) DU_k)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\langle X_n \rangle\right\}.$$

Согласно (5), $\langle X_n \rangle$ является ограниченным субмартингалом. Поэтому существует предел $\langle X_n \rangle$ и он ограничен $\langle X_\infty \rangle < |D|^2$. С другой стороны, $\langle X_n \rangle \rightarrow \langle X_\tau \rangle$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, распределение $\langle X_\tau \rangle$ является асимптотически гауссовским. Поэтому случайный вектор

$$S = \frac{B}{\sqrt{H+1}} \sum_{k=N+1}^{\tau} v(k, x) U_k \zeta_{k+1}$$

является асимптотически нормальным с параметрами $(0, \Sigma)$. Покажем, что след ковариационной матрицы $M\{SS^T\}$ не превосходит по величине единицы. Имеем

$$\text{tr}(M\{SS^T\}) = M\left\{\frac{B^2}{H+1} \sum_{k=N+1}^{\tau} v^2(k, x) U_k^T U_k\right\} \leq 1.$$

Отсюда, при $H \rightarrow \infty$, получаем $\text{tr}(\Sigma) = 1$.

Оценим вероятность

$$P\left\{|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2 > x\right\} \leq P\left\{\frac{H+1}{H^2} |S|^2 > x\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |\Sigma|}} \int_{yy^T > C} \exp\left\{-\frac{1}{2} y \Sigma^{-1} y^T\right\} dy,$$

где

$$C = \frac{H+1}{H^2} x.$$

Так как след матрицы не превосходит единицу, то ковариационная матрица Σ не превосходит единичную матрицу, обозначив $t = \Sigma^{-1/2} y$ можно записать

$$P\left\{|\Lambda^*(H) - \Lambda|^2 > x\right\} \leq \frac{1}{(2\pi)} \int_{t \Sigma t^T > C} \exp\left\{-\frac{1}{2} t t^T\right\} dt \leq 1 - F\left(\frac{x H^2}{H+1}\right).$$

Теорема доказана.

3. Построение процедуры обнаружения разладки

Построим процедуру определения момента разладки. На первом шаге определяются интервалы $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$, $i \geq 1$. На каждом из этих интервалов строится оценка $\Lambda_i^*(H)$ (6) процесса (1). Далее сравниваются оценки параметров, полученные на интервалах $[\tau_{i-m-1}+1, \tau_{i-m}]$ и $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$, отстоящих друг от друга на m шагов. Если интервал $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ не содержит момент разладки θ , то вектор параметров Λ на этом интервале является постоянным и его значение равно илиначальному Λ_0 , или конечному Λ_1 значению. Если для определенного i разница между значениями параметров на интервалах $[\tau_{i-m-1}+1, \tau_{i-m}]$ и $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ не меньше, чем заданная величина Δ , то $\tau_{i-m} < \theta < \tau_{i-1}+1$. Составим статистику J_i , соответствующую интервалу $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ для $i > m$:

$$J_i = (\Lambda_i^* - \Lambda_{i-m}^*)^T (\Lambda_i^* - \Lambda_{i-m}^*). \quad (11)$$

Эта статистика характеризует квадратное отклонение оценок с номерами i и $i-m$. Обозначим отклонение оценки Λ_i^* от ее истинного значения через σ_i . Если выполняется условие $\theta > \tau_i$, то до момента τ_i значения параметров остаются неизменными и статистика (11) имеет вид

$$J_i = |\sigma_i - \sigma_{i-m}|^2.$$

Если $\tau_m < \theta < \tau_{i-1}$, то есть изменение значений параметров произошло на интервале $[\tau_m, \tau_{i-1}]$, то статистика J_i примет следующий вид:

$$J_i = |\Lambda_1 - \Lambda_0 + \sigma_i - \sigma_{i-m}|^2.$$

Алгоритм определения точки изменения параметров процесса заключается в следующем: значение заданной статистики (11) сравнивается с пороговым значением δ . Решение о наличии разладки принимается при превышении значения статистики J_i значения δ . Важными характеристиками любой процедуры обнаружения разладки являются вероятности ложной тревоги и ложного спокойствия. Благодаря использованию взвешенного метода наименьших квадратов для построения оценок, в каждом цикле наблюдений можно обеспечить заданную вероятность ложной тревоги и ложного спокойствия, выбирая параметр процедуры H соответствующим образом.

Теорема 3. Пусть $0 < \delta < \Delta$, тогда вероятность ложной тревоги P_0 и вероятность ложного спокойствия P_1 на любом интервале наблюдений $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ являются ограниченными:

$$P_0(H, \delta) \leq \frac{4(H+1)}{H^2 \delta}, P_1(H, \delta) \leq \frac{4(H+1)}{H^2 (\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим вероятность ложной тревоги. В этом случае значение статистики J_i превышает порог δ до момента разладки θ . Используя свойства нормы вектора и неравенство Чебышева, получаем

$$P_0(H, \delta) = P\{J_i > \delta \mid \tau_i < \theta\} = P\{|\sigma_i - \sigma_{i-m}|^2 > \delta\} \leq \frac{2E\{|\sigma_i|^2 + |\sigma_{i-m}|^2\}}{\delta} \leq \frac{4(H+1)}{H^2 \delta}.$$

Для нахождения вероятности ложного спокойствия рассматриваются случаи, когда момент разладки уже наступил, а значение статистики (11) не превысило порогового значения δ . Вероятность P_1 имеет вид

$$P_1(H, \delta) = P\{J_i < \delta \mid \tau_{i-m} < \theta < \tau_{i-1}\} = P\{|\Lambda_1 - \Lambda_0 + \sigma_i - \sigma_{i-m}|^2 < \delta\} = \\ = P\{|\Lambda_1 - \Lambda_0 + \sigma_i - \sigma_{i-m}| < \sqrt{\delta}\}.$$

Учитывая $|\Lambda_1 - \Lambda_0|^2 > \Delta > 0$ и используя свойства нормы и неравенство Чебышева, получим

$$P_1(H, \delta) = P\{|\Lambda_1 - \Lambda_0 + \sigma_i - \sigma_{i-m}| < \sqrt{\delta}\} \leq P\{\sqrt{\Delta} - |\sigma_i - \sigma_{i-m}| < \sqrt{\delta}\} = \\ = P\{|\sigma_i - \sigma_{i-m}| < \sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}\} \leq \frac{4(H+1)}{H^2(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}.$$

Теорема доказана.

Следующая теорема задает асимптотическую границу для вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия.

Теорема 4. Пусть $0 < \delta < \Delta$ и выполнены условия теоремы 2. Для достаточно больших H вероятность ложной тревоги P_0 и вероятность ложного спокойствия P_1 удовлетворяют неравенствам

$$P_0(H, \delta) \leq 2 \left[1 - F \left(\frac{H^2 \delta}{4(H+1)} \right) \right], P_1(H, \delta) \leq 2 \left[1 - F \left(\frac{H^2 (\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}{4(H+1)} \right) \right],$$

где $F(x)$ – χ^2 -распределение с двумя степенями свободы.

Доказательство. Рассматривая вероятность ложной тревоги и используя для ее оценки неравенство Минковского и свойство асимптотической нормальности, доказанное в теореме 2

$$P_0(H, \delta) = P_0\{|J(H)|^2 > \delta\} = P\{|\sigma_i - \sigma_{i-m}|^2 > \delta\} = P\{(\Lambda_k^* - \Lambda_k) + (\Lambda_{k-m}^* - \Lambda_{k-m})\}^2 > \delta\} \leq \\ \leq P\left\{|\Lambda_k^* - \Lambda_k|^2 > \frac{\delta}{4}\right\} + P\left\{|\Lambda_{k-m}^* - \Lambda_{k-m}|^2 > \frac{\delta}{4}\right\} \leq 2 \left[1 - F \left(\frac{H^2 \delta}{4(H+1)} \right) \right].$$

Используя неравенство Минковского и асимптотические свойства построенной оценки, вероятность запаздывания в обнаружении определяется следующим образом:

$$P_1(H, \delta) = P_1\{|J(H)|^2 < \delta\} = P\{|\Lambda_1 - \Lambda_0 + \sigma_i - \sigma_{i-m}|^2 < \delta\} \leq P\{|\sigma_i - \sigma_{i-m}| \geq |\Lambda_1 - \Lambda_0|^2 - \delta\} \leq \\ \leq P\left\{|\Lambda_1^* - \Lambda_1|^2 > \frac{(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}{4}\right\} + P\left\{|\Lambda_0^* - \Lambda_0|^2 > \frac{(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}{4}\right\} \leq 2 \left[1 - F \left(\frac{H^2 (\sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta})^2}{4(H+1)} \right) \right].$$

Теорема доказана.

4. Результаты численного моделирования

Для проверки работоспособности процедуры обнаружения разладки были проведены компьютерные эксперименты. Моделировался процесс GARCH(1,1) со стандартными гауссовскими шумами

$$x_{n+1} = \sigma_{n+1} \varepsilon_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где

$$\sigma_{n+1}^2 = a + \lambda x_n^2 + \mu \sigma_n^2.$$

Параметр μ полагался равным $\mu = 0,3$. Рассматривалась реализация процесса длиной 15 000 значений, которая содержала два момента разладки. Вектор параметров $\{a, \lambda\}$ в момент $\theta = 5\,000$ изменялся с $\{0,3; 0,6\}$ на $\{0,5; 0,1\}$, в момент $\theta = 10\,000$ на $\{0,1; 0,5\}$. Исследовалась процедура определения момента разладки для различных значений H и δ , а также результаты оценивания неизвестных параметров процесса. Для каждого набора параметров проводилось 100 экспериментов. Результаты моделирования приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Оценки параметров процесса

H	Λ_1^*	Λ_2^*	Λ_3^*	MSE_t	MSE_p
$H=350$	$\begin{pmatrix} 0,318 \\ 0,546 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,474 \\ 0,121 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,105 \\ 0,483 \end{pmatrix}$	0,0029	0,0015
$H=400$	$\begin{pmatrix} 0,307 \\ 0,577 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,488 \\ 0,122 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,106 \\ 0,475 \end{pmatrix}$	0,0025	0,0005
$H=450$	$\begin{pmatrix} 0,303 \\ 0,59 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,468 \\ 0,167 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,127 \\ 0,502 \end{pmatrix}$	0,0022	0,0021

В табл. 1 приведены результаты численного моделирования предложенного метода оценки неизвестных параметров процесса GARCH(1,1) и процедуры обнаружения разладки. Здесь $\Lambda_i^*(H)$, $i = 1,2,3$, – оценки неизвестных параметров процесса (12) параметров процесса, MSE_t и MSE_p – значения среднеквадратического отклонения оценок от их истинных значений, полученные с помощью соотношений, доказанных в теореме 1 и в результате моделирования соответственно.

Для исследования вероятности ложной тревоги и среднего времени между ложными тревогами рассматривалась реализация процесса длиной 400 000 значений, не содержащая момента разладки. Фиксировались те моменты времени, когда процедура обнаруживает разладку. Для нахождения вероятности запаздывания в обнаружении и среднего времени запаздывания рассматривалось 100 реализаций процесса (12) длиной 10 000 значений каждая, для которых момент разладки параметров процесса моделировался как равномерно распределенная случайная величина на интервале $[5\,000, 5\,500]$. Учитывались только те реализации процесса, для которых существовала задержка в обнаружении момента разладки. Результаты моделирования приведены в следующей таблице.

Таблица 2

Оценки моментов изменения параметров и характеристики процедуры обнаружения

H, δ	θ_1^*	θ_2^*	T_0	T_1	P_{0p}	P_{0A}	P_{0C}	P_{1p}	P_{1A}	P_{1C}
$H = 350$ $\delta = 0,1$	6215	10988	398341	1196	0.013	0,025	0,115	0,181	0,193	0,214
$H = 400$ $\delta = 0,075$	6027	10726	33196	900	0.027	0,048	0,134	0	0,048	0,134
$H = 450$ $\delta = 0,05$	6112	10509	26529	780	0.038	0,121	0,178	0	0,006	0,085

θ_1^* и θ_2^* – средние значения оценок моментов изменения параметров, вычисленные по 100 реализациям процесса; T_0 – среднее время между ложными тревогами; T_1 – среднее время запаздывания в обнаружении; P_0A , P_0C и P_0p обозначают вероятности ложной тревоги, полученные с использованием свойства асимптотической нормальности оценки, неравенства Чебышева и в результате моделирования соответственно. Соответствующие вероятности ложного спокойствия обозначены P_1A , P_1C и P_1p .

Результаты исследований демонстрируют эффективность предложенного метода оценки параметров процесса GARCH(1,1) и предложенной процедуры определения момента разладки. Точность оценки неизвестных параметров процесса зависит от выбора значения параметра H . При возрастании параметра H увеличивается точность оценивания, однако при этом увеличивается время запаздывания в обнаружении. С другой стороны, при уменьшении ухудшается точность оценки, что показано на рис. 1 и 2. Выбор величины δ влияет на скорость определения момента разладки. При увеличении значения δ увеличивается время запаздывания в обнаружении, при уменьшении значения параметра повышается вероятность ложной тревоги. Во всех случаях вероятностные характеристики процедуры обнаружения не превышают теоретических, что позволяет сделать вывод о возможности их применения.

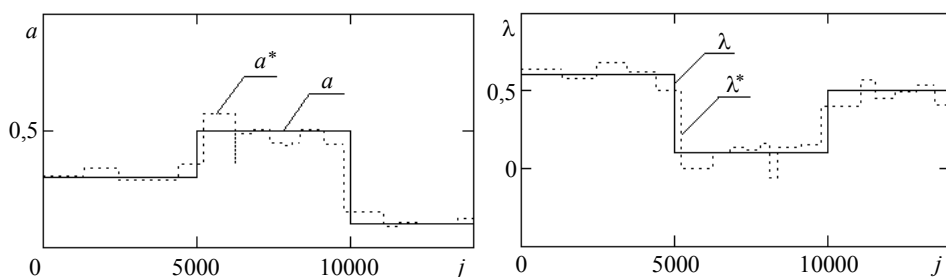


Рис. 1. Оценки неизвестных параметров процесса (пунктирная линия – оценка параметра по взвешенному методу наименьших квадратов, сплошная – истинное значение параметра). Параметры процедуры $H = 250$, $\delta = 0,1$

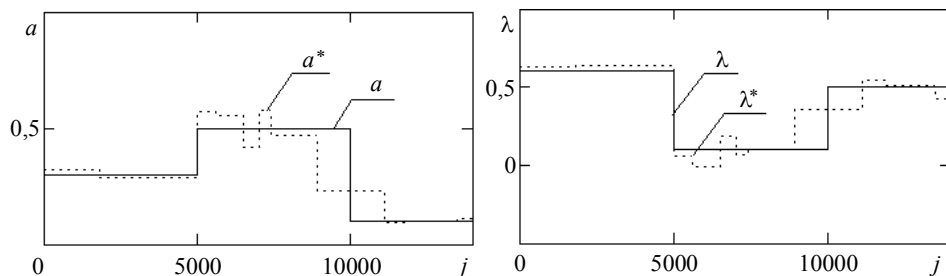


Рис. 2. Оценки неизвестных параметров процесса (пунктирная линия – оценка параметра по взвешенному методу наименьших квадратов, сплошная – истинное значение параметра). Параметры процедуры $H = 400$, $\delta = 0,05$

Заключение

В работе построена и исследована последовательная процедура обнаружения момента изменения значений параметров процесса GARCH(1,1), параметры которого предполагаются неизвестными до и после момента разладки. Алгоритм определения точки изменения параметров процесса заключается в сравнении оценок неизвестных параметров процесса на различных интервалах наблюдений. Используются оценки, построенные с помощью модифицированного взвешанного метода наименьших квадратов с гарантированным среднеквадратическим отклонением, точность которых зависит от заданного параметра процедуры. Найдены характеристики процедуры обнаружения разладки, исследованы асимптотические свойства. Численное моделирование показало работоспособность предложенной процедуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // *J. Econometrics*. 1986. V. 86. P. 307–327.
2. *Бассвиль М., Вилске А., Банвенист А.* Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. М.: Мир, 1989.
3. *Kokoszka P., Leipus R.* Change-point detection in the mean of dependent observations // *Statistics & Probability Letters*. 1998. V. 40. No. 4. P. 385–393.
4. *Lai T.Z.* Sequential change-point detection in quality control and dynamical systems // *J. Res. Statist. Soc. B*. 1995. V. 57. No. 4. P. 613–658.
5. *Berkes I., Horvath L.* The efficiency of the estimators of the parameters in GARCH processes // *Annals of Statistics*. 2004. V. 32. P. 633–655.
6. *Franco C., Zacoian J.M.* Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA – GARCH processes // *Bernoulli*. 2004. V. 10. P. 605–637.
7. *Franco C., Zacoian J.M.* Quasi – Maximum likelihood estimation in GARCH processes when some coefficients are equal to zero // *Stochastic Processes and their Application*. 2007. V. 117. P. 1265–1285.
8. *Baillie R.T., Chung H.* Estimation of GARCH models from the autocorrelation of the squares of a process // *J. Time Ser. Anal.* 2001. V. 22. No. 6. P. 631–650.
9. *Meder N., Vorobejchikov S.* On guaranteed estimation of parameters of random processes by the weighted least square method // *Proc. 15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control*. Barcelona, 2002. P. 1200.
10. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
11. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.
12. *Буркатовская Ю.Б., Воробейчиков С.Э.* Гарантированное обнаружение момента разладки GARCH-процесса // *Автоматика и телемеханика*. 2006. № 12. С. 56–70.
13. *Дмитренко А.А., Конев В.В.* О последовательной классификации процессов авторегрессии с неизвестной дисперсией помех // *Проблемы передачи информации*. 1995. Т. 31. Вып. 4. С. 51–62.

Сергеева Екатерина Евгеньевна

Воробейчиков Сергей Эрикович

Томский государственный университет,

E-mail: sergeeva_e_e@mail.ru; sev@mail.tsu.ru

Поступила в редакцию 30 марта 2011 г.