

УДК 517.511

В.И. Смагин, С.В. Смагин

ФИЛЬТРАЦИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассматривается алгоритм синтеза оптимального фильтра, определяющего оценку вектора состояния дискретной линейной нестационарной динамической системы с аддитивными возмущениями, содержащими неизвестную постоянную составляющую. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: *линейные дискретные нестационарные системы, фильтр Калмана, неизвестные возмущения.*

В работах многих авторов большое внимание уделяется разработке алгоритмов калмановской фильтрации для класса систем с неизвестными аддитивными возмущениями и параметрами, которые могут использоваться в качестве моделей реальных физических систем, моделей объектов с неизвестными сбоями.

Известные методы вычисления оценок вектора состояния базируются на алгоритмах, использующих оценки неизвестного возмущения [1 – 11]. В работах [1, 2] рассматриваются алгоритмы расширения пространства состояний (к основной модели объекта добавляется модель ненаблюдаемого возмущения) и алгоритм двухэтапной фильтрации, уменьшающий вычислительные затраты за счет декомпозиции задачи. В работах [3 – 11] изучены алгоритмы рекуррентной оптимальной фильтрации, использующие оценки неизвестного возмущения, имеющие достаточно жесткие условия их разрешимости.

В настоящей работе для дискретного нестационарного объекта с неизвестной постоянной составляющей возмущений предлагается метод оптимальной фильтрации, не использующий оценки неизвестного возмущения. Метод базируется на преобразовании модели и сведении к задаче линейной калмановской фильтрации [12 – 14]. В настоящей статье обобщаются результаты [15] на случай решения задачи для нестационарного дискретного объекта.

1. Постановка задачи

Рассматривается дискретная система, которая описывается следующими разностными уравнениями:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + f + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояния; $A(k)$ – $n \times n$ -матрица; f – неизвестный постоянный вектор; $q(k)$ – белая гауссовская случайная последовательность с характеристиками

$$M\{q(k)\} = 0, \quad M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{k,j}. \quad (2)$$

Канал наблюдений имеет вид

$$y(k) = S(k)x(k) + v(k), \quad (3)$$

$y(k) \in R^l$ – вектор измерений; $S(k)$ – матрица размерности $l \times n$; $v(k)$ – белая гаус-

совская случайная последовательность ошибок измерений, с характеристиками:

$$M\{v(k)\} = 0, \quad M\{q(k)v^T(j)\} = 0, \quad M\{v(k)v^T(j)\} = V(k)\delta_{i,j}; \quad (4)$$

для матриц $(S(k), A(k))$ выполняются условия наблюдаемости. Вектор x_0 является случайным и не зависит от процессов $q(k)$ и $v(k)$, при этом

$$M\{x(0)\} = \bar{x}_0, \quad M\{(x(0) - \bar{x}_0)(x(0) - \bar{x}_0)^T\} = P_0.$$

Для системы (1) и канала наблюдений (3) требуется синтезировать фильтр, вычисляющий оценку вектора состояния, не использующий оценки неизвестной постоянной составляющей возмущений.

2. Синтез фильтра

Преобразуем дискретную систему (1). Исключаем постоянную составляющую возмущений f из описания объекта посредством вычитания из уравнения (1) такого же уравнения, но со сдвигом на один такт:

$$x(k) = A(k-1)x(k-1) + f + q(k-1). \quad (5)$$

В результате получаем следующее уравнение:

$$x(k+1) = (A(k) + E_n)x(k) - A(k-1)x(k-1) + q(k) - q(k-1). \quad (6)$$

Расширим пространство состояний системы путем добавления к уравнению (6) тождества $x(k) = x(k)$. Обозначим

$$X(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \end{pmatrix}, \quad \bar{q}(k) = \begin{pmatrix} q(k) - q(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Систему (1) представим в векторно-матричной форме

$$X(k+1) = \bar{A}(k)X(k) + \bar{q}(k), \quad X(0) = X_0, \quad (8)$$

где $\bar{A}(k) - 2n \times 2n$ -матрица имеет следующую блочную структуру:

$$\bar{A}(k) = \begin{pmatrix} A(k) + E_n & -A(k-1) \\ E_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Случайный вектор $X_0 = (x_0^T \ x_{-1}^T)^T$ имеет следующие характеристики:

$$M\{X(0)\} = \bar{X}_0, \quad M\{(X_0 - \bar{X}_0)(X_0 - \bar{X}_0)^T\} = \bar{P}_0, \quad (10)$$

где $\bar{X}_0 = (\bar{x}_0^T \ \bar{x}_{-1}^T)^T$. Отметим, что здесь дополнительно вводится n -мерный вектор x_{-1} , который является независимым от $q(k)$ и $v(k)$, а характеристики (10) могут быть получены по априорной информации об объекте (1).

Отметим, что в рассмотренной модели (8) процесс $\bar{q}(k)$ не является белой гауссовской последовательностью, процессы $\bar{q}(k)$ и $\bar{q}(k-1)$ будут коррелированы:

$$M\{\bar{q}(k)\bar{q}^T(j)\} = \begin{cases} \bar{Q}(k), & \text{если } j = k, \\ \bar{\bar{Q}}(k-1), & \text{если } j = k-1, \\ 0, & \text{если } 0 \leq j < k-1, \end{cases} \quad (11)$$

где
$$\bar{Q}(k) = \begin{pmatrix} Q(k) + Q(k-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{Q}}(k-1) = \begin{pmatrix} -Q(k-1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Представим канал наблюдений для расширенной системы (8) в виде

$$y(k) = \bar{S}(k)X(k) + v(k), \quad (13)$$

где $\bar{S}(k) = (S(k) \ 0)$, $v(k)$ – случайная последовательность ошибок измерений с характеристиками (4).

В качестве уравнения для вычисления оценки вектора состояния расширенной системы выберем уравнение, по своей структуре совпадающее с фильтром Калмана:

$$\hat{X}(k+1) = \bar{A}(k)\hat{X}(k) + K(k)(y(k+1) - \bar{S}(k+1)\bar{A}(k)\hat{X}(k)), \quad \hat{X}(0) = \bar{X}_0. \quad (14)$$

Учитывая (8) и (14), получим следующее уравнение для ошибки $e(k) = \hat{X}(k) - X(k)$:

$$e(k+1) = (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k))e(k) + K(k)v(k+1) + (K(k)\bar{S}(k+1) - E_{2n})\bar{q}(k). \quad (15)$$

В силу (11) и (15), матрица $\bar{P}(k) = M\{e(k)e^T(k)\}$ определится из следующего разностного уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{P}(k+1) = & (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k))\bar{P}(k)(\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k))^T + \\ & + (K(k)\bar{S}(k+1) - E_{2n})\bar{Q}(k)(K(k)\bar{S}(k+1) - E_{2n})^T + K(k)V(k+1)K^T(k) + \\ & + (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k))(K(k-1)\bar{S}(k) - E_{2n}) \times \\ & \times \bar{Q}(k-1)(K(k)\bar{S}(k+1) - E_{2n})^T + (K(k)\bar{S}(k+1) - E_{2n}) \times \\ & \times \bar{Q}(k-1)(K(k-1)\bar{S}(k) - E_{2n})^T (\bar{A}(k) - K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k))^T, \quad \bar{P}(0) = \bar{P}_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Оптимизируемый критерий зададим в виде

$$J(k+1) = \text{tr} \bar{P}(k+1). \quad (17)$$

Оптимальные коэффициенты передачи фильтра $K(k)$ определяются из условия

$$\frac{dJ(k+1)}{dK(k)} = 0. \quad (18)$$

Учитывая (17) и правую часть уравнения (16), применяя правила матричного дифференцирования следа от матрицы [16], получим из условия (18) уравнение для определения матрицы $K(k)$:

$$\begin{aligned} & -\bar{A}(k)\bar{P}(k)\bar{A}(k)^T\bar{S}(k+1)^T + K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k)\bar{P}(k)\bar{A}(k)^T\bar{S}(k+1)^T + \\ & + K(k)\bar{S}(k+1)\bar{Q}(k)\bar{S}(k)^T - \bar{Q}(k)\bar{S}(k+1)^T - K(k)\bar{S}(k+1)\bar{Q}(k-1) \times \\ & \times \bar{S}(k)^T K(k-1)^T \bar{A}(k)^T \bar{S}(k+1)^T + K(k)\bar{S}(k+1)\bar{Q}(k-1)\bar{A}(k)^T \bar{S}(k+1)^T - \\ & - K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k)K(k-1)\bar{S}(k)\bar{Q}(k-1)\bar{S}(k+1)^T + \\ & + K(k)\bar{S}(k+1)\bar{A}(k)\bar{Q}(k-1)\bar{S}(k+1)^T + \bar{Q}(k-1)\bar{S}(k)^T K(k-1)^T \times \\ & \times \bar{A}(k)^T \bar{S}(k+1)^T - \bar{Q}(k-1)\bar{A}(k)^T \bar{S}(k+1)^T - \bar{A}(k)\bar{Q}(k-1)\bar{S}(k+1)^T + \\ & + \bar{A}(k)K(k-1)\bar{S}(k)\bar{Q}(k-1)\bar{S}(k+1)^T + K(k)V(k+1) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение последнего уравнения относительно $K(k)$ дает следующий результат:

$$K(k) = \tilde{P}(k)\bar{S}(k+1)^T (\bar{S}(k+1)\tilde{P}(k)\bar{S}(k+1)^T + V(k+1))^{-1}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k) = & \bar{A}(k)\bar{P}(k)\bar{A}(k)^T + \bar{Q}(k-1)(E_{2n} - \bar{S}(k)^T K(k-1)^T)\bar{A}(k)^T + \\ & + \bar{A}(k)(E_{2n} - K(k-1)\bar{S}(k))\bar{Q}(k-1) + \bar{Q}(k). \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что для вычисления коэффициентов передачи (20), в силу (21), необходимо задать начальные значения коэффициентов $K(-1)$.

Подставив в уравнение (16) выражение для оптимального коэффициента передачи (20), получим уравнение

$$\bar{P}(k+1) = (E_{2n} - K(k)\bar{S}(k+1))\tilde{P}(k), \quad \bar{P}(0) = \bar{P}_0. \quad (22)$$

Основной результат сформулируем в виде теоремы, учитывая симметричность и блочное представление матриц $\tilde{P}(k)$ и $\bar{P}(k)$:

$$\tilde{P}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(k) & \tilde{p}_2^T(k) \\ \tilde{p}_2(k) & \tilde{p}_3(k) \end{pmatrix}, \quad \bar{P}(k) = \begin{pmatrix} p_1(k) & p_2^T(k) \\ p_2(k) & p_3(k) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

блочные структуры матриц $\bar{A}(k)$, $\bar{Q}(k)$, $\bar{Q}(k)$, $\bar{S}(k)$ и представление матрицы $K(k)$ в виде

$$K(k) = \begin{pmatrix} K_1(k) \\ K_2(k) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Теорема. Пусть процесс с неизвестным постоянным возмущением определяется уравнениями (1) и канал наблюдений имеет вид (3). Тогда оптимальный алгоритм фильтрации определится следующими разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) = & (A(k) + E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) + K_1(k)(y(k+1) - \\ & - S(k+1)[(A(k) + E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1)]) \end{aligned} \quad (25)$$

с начальными условиями

$$\hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \hat{x}(1) = M\{x(1)\} = \bar{x}_1. \quad (26)$$

Матрица $K_1(k)$ в (25) определяется по формуле

$$K_1(k) = \tilde{p}_1(k)S(k+1)^T(S(k+1)\tilde{p}_1(k)S(k+1)^T + V(k+1))^{-1}, \quad (27)$$

где матрица $\tilde{p}_1(k)$ вычисляется из системы уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(k) = & (A(k) + E_n)p_1(k)(A(k) + E_n)^T - A(k-1)p_2(k)(A(k) + E_n)^T - \\ & - (A(k) + E_n)p_2^T(k)A(k-1)^T + A(k-1)p_3(k)A(k-1)^T + Q(k-1)S(k)^T K_1(k-1)^T \times \\ & \times (A(k) + E_n)^T - Q(k-1)S(k)^T K_2(k-1)^T A^T(k-1) + \\ & + (A(k) + E_n)K_1(k-1)S(k)Q(k-1) - A(k-1)K_2(k-1)S(k) \times \\ & \times Q(k-1) - (A(k) + E_n)Q(k-1) - Q(k-1)(A(k) + E_n)^T + Q(k) + Q(k-1), \\ \tilde{p}_2(k) = & p_1(k)(A(k) + E_n)^T - p_2^T(k)A(k-1)^T + \\ & + K_1(k-1)S(k)Q(k-1) - Q(k-1), \quad \tilde{p}_3(k) = p_1(k), \\ p_1(k+1) = & (E_n - K_1(k)S(k+1))\tilde{p}_1(k), \quad p_1(0) = p_{1,0}, \\ p_2(k+1) = & -K_2(k)S(k+1)\tilde{p}_1(k) + \tilde{p}_2(k), \quad p_2(0) = p_{2,0}, \\ p_3(k+1) = & -K_2(k)S(k+1)\tilde{p}_2^T(k) + \tilde{p}_3(k), \quad p_3(0) = p_{3,0}, \\ K_2(k) = & \tilde{p}_2(k)S(k+1)^T(S(k+1)\tilde{p}_1(k)S(k+1)^T + V(k+1))^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28) начальные условия $p_{1,0}, p_{2,0}, p_{3,0}$, являются соответствующими блоками матрицы $\bar{P}_0$. Отметим, что для выполнения расчетов в (28) необходимо задать начальные условия для $K_1(-1)$ и $K_2(-1)$.

Замечание. Управляемый объект

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + f + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (29)$$

при исключении неизвестного постоянного возмущения f объекта, необходимо преобразовать к виду, который будет отличаться от (8) одним слагаемым:

$$X(k+1) = \bar{A}(k)X(k) + \bar{B}(k)(u(k) - u(k-1) + \bar{q}(k)), \quad X(0) = X_0, \quad (30)$$

где матрица $\bar{A}(k)$ приведена в формуле (9), $\bar{q}(k)$ имеет характеристики (11), (12).

В (30) матрица $\bar{B}(k)$ имеет вид

$$\bar{B}(k) = \begin{pmatrix} B(k) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Тогда уравнения фильтра будут следующими:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) = & (A(k) + E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) + B(k)(u(k) - u(k-1)) + K_1(k)(y(k+1) - \\ & - S(k+1)[(A(k) + E_n)\hat{x}(k) - A(k-1)\hat{x}(k-1) + B(k)(u(k) - u(k-1))]), \end{aligned} \quad (32)$$

с начальными условиями (26), а матрица $K_1(k)$ определяется в соответствии с (27) и (28).

3. Результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим применение алгоритма фильтрации для модели второго порядка вида (1) и канала наблюдений (3) со следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} A(k) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,05 & 0,925 + 0,1 \sin(0,01k) \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{pmatrix}; \quad V = 0,9; \\ S = & (1 \quad 1); \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,5 \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Вычисление оценок вектора $x(k)$ можно выполнить, используя двухэтапный алгоритм фильтрации [2]. Модель измерений в этом случае с учетом (1) представляется в виде

$$y(k+1) = Sx(k+1) + v(k+1) = SA(k)x(k) + Sf + Sq(k) + v(k+1). \quad (34)$$

Рекуррентные уравнения оценивания неизвестного вектора f имеют вид

$$\hat{f}(k+1) = \hat{f}(k) + K_f(k)(y(k+1) - SA(k)\hat{x}(k) - S\hat{f}(k)), \quad \hat{f}(0) = \bar{f}_0,$$

$$\begin{aligned} K_f(k) = & P_f(k)S^T(SP_f(k)S^T + SQS^T + V)^{-1}, \\ P_f(k+1) = & (E_2 - K_f(k)S)P_f(k), \quad P_f(0) = P_{f_0}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$M\{f\} = \bar{f}_0, \quad M\{(f - \bar{f}_0)(f - \bar{f}_0)^T\} = P_{f_0}. \quad (36)$$

Оценка вектора состояния для объекта с неизвестным постоянным входом задается уравнением:

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{f}(k) + K_x(k)(y(k+1) - SA(k)\hat{x}(k) - S\hat{f}(k)), \quad (37)$$

где матрица $K_x(k)$ определяет коэффициенты передачи фильтра Калмана. При моделировании используем

$$\bar{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_{f_0} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Применение расширенного фильтра Калмана [1] для данного примера (в этом случае уравнение (1) расширяется путем добавления уравнения $f(k+1) = f(k)$) приводит к необходимости построения фильтра Калмана для дискретной системы со следующими матрицами динамики, канала наблюдений и интенсивностей аддитивных возмущений:

$$\begin{pmatrix} A(k) & E_2 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, (S \ 0), \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Использование в данном примере методов, описанных в работах [4, 5, 8, 9], невозможно в силу невыполнения условий существования оптимальных оценок неизвестного входного вектора [4, 5, 8, 9]:

$$n \geq m \text{ и } l \geq m. \quad (40)$$

В [4, 5, 8, 9] неизвестное возмущение определяется в виде $f = Gd$, где d – неизвестный m -мерный вектор, G – $n \times m$ -известная матрица. В рассмотренном примере $G = E_2$, $n = 2$, $m = 2$, $l = 1$, а это означает, что условия (40) не выполняются.

Применение алгоритма фильтрации исследовалось также для неизвестного переменного возмущения с тремя возможными значениями компонент вектора f :

$$f_1(k) = f_2(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq k \leq 9, \\ -1, & \text{если } 9 < k < 25, \\ 1, & \text{если } 25 \leq k \leq 50. \end{cases}$$

На рис. 1 приведены реализации процессов и их оценок для трех сравниваемых фильтров. Отметим, что при реализации алгоритма фильтрации (25), начальные значения $K_1(-1)$ и $K_2(-1)$ задавались нулевые.

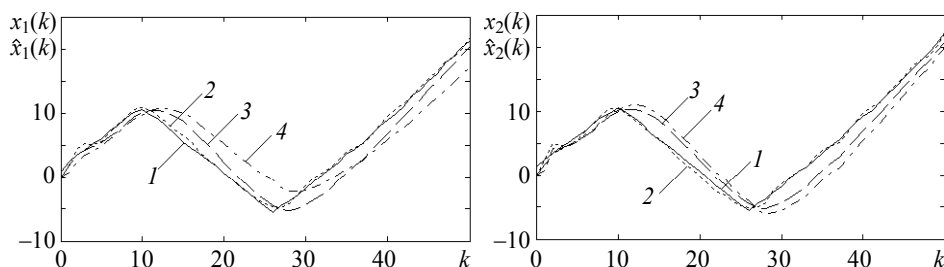


Рис. 1. Реализации процессов и оценок (1 – реализация $x(k)$; 2 – оценка, построенная по алгоритму (25); 3 – оценка, построенная по двухэтапному алгоритму; 4 – оценка для расширенного фильтра Калмана)

На рис. 2 приведены ошибки оценивания компонент вектора состояния.

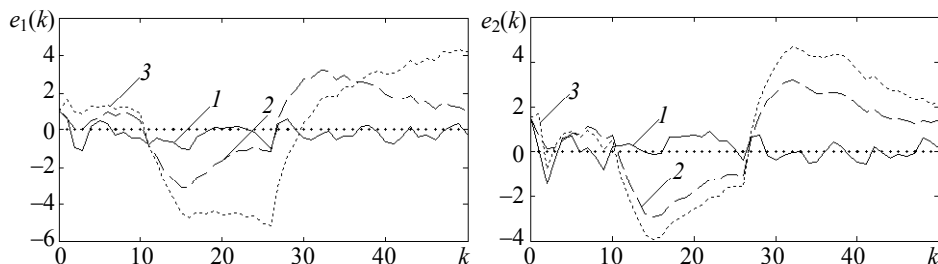


Рис. 2. Графики ошибок фильтрации (1 – ошибка для оценки, построенной по алгоритму (25); 2 – ошибка для оценки, построенной по двухэтапному алгоритму; 3 – ошибка для расширенного фильтра Калмана)

Как видно из рисунков для рассмотренного примера, качество оценок, полученных с помощью фильтра (25), лучше, чем для двухэтапного алгоритма фильтрации и расширенного фильтра Калмана, использующих оценки неизвестного возмущения. Отметим также, что для алгоритма фильтрации (25) не нужно задавать априорную информацию о характеристиках распределения начальных значений $\bar{f}_0$ и P_{f_0} .

Ниже, в таблице, приведены средние значения среднеквадратических ошибок оценивания для трех рассматриваемых методов, рассчитанных по 50 реализациям. Как видно из таблицы, предложенный метод фильтрации (25) обеспечивает среднюю ошибку в 3 – 4 раза меньшую, чем другие методы.

Средние значения среднеквадратических ошибок для компонент вектора состояния

Алгоритм (25)	Двухэтапный алгоритм	Расширенный фильтр Калмана
$e_{1,ср} = 0,0912$	$e_{1,ср} = 0,3128$	$e_{1,ср} = 0,4103$
$e_{2,ср} = 0,0945$	$e_{2,ср} = 0,2917$	$e_{2,ср} = 0,4296$

Заключение

Разработан алгоритм синтеза дискретного оптимального нестационарного фильтра для объекта, возмущения которого содержат неизвестную постоянную составляющую. Алгоритм построен на основе расширения пространства состояния и исключения из модели неизвестной составляющей. В отличие от классического фильтра Калмана, предложенный фильтр использует рекуррентные оценки, построенные на двух предыдущих тактах. Как показали результаты вычислительного эксперимента, алгоритм может быть применен для кусочно-постоянной неизвестной аддитивной составляющей возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Astrom K., Eykhoff P. System identification. A survey // Automatica. 1971. V. 7. P. 123–162.
2. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1969. V. AC-14. P. 359–367.
3. Chen J., Patton R. J. Optimal filtering and robust fault diagnosis of stochastic systems with unknown disturbances // IEE Proc. Control Theory Appl. 1996. V. 143. P. 31–36.

4. Darouach M., Zasadzinski M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs // Automatica. 1997. V. 33. P. 717–719.
5. Darouach M., Zasadzinski M., Xu S. J. Full-order observers for linear systems with unknown inputs // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1999. V. AC-39. P. 606.
6. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 111–116.
7. Hou M., Patton R. Optimal filtering for systems with unknown inputs // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1998. V. AC-43. P. 445–449.
8. Hsieh C.-S. A unified solution to unbiased minimum-variance estimation for systems with unknown inputs // Proc. 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul. Korea. July 6 – 11, 2008. P. 14502–14509.
9. Hsieh C.-S. Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs // IEEE Trans. on Automat. Contr. 2000. V. AC-45. P. 2374–2378.
10. Hsieh C.-S. Extension of the optimal unbiased minimum-variance filter for systems with unknown inputs // Proc. 15th IEEE International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Tokushima. Japan. 2007. P. 217–220.
11. Hsieh C.-S. Robust parameterized minimum variance filtering for uncertain systems with unknown inputs // Proc. American control conference. New York. 2007. P. 5118–5123.
12. Kalman R.E., Bucy R. A new results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME J. Basic Engr. 1961. V. 83. P. 95–108.
13. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана – Бьюси. М.: Наука, 1972. 200 с.
14. Пугачев В.С., Силин И.Н. Стохастические дифференциальные уравнения М.: Наука, 1990. 630 с.
15. Смагин С.В. Фильтрация в линейных дискретных системах с неизвестными возмущениями // Автоматика. 2009. Т. 45. № 6. С. 29–37.
16. Амосов А.А., Колпаков В.В. Скалярно-матричное дифференцирование и его применение к конструктивным задачам теории связи // Проблемы передачи информации. 1972. № 1. С. 3–15.

Смагин Валерий Иванович

Смагин Сергей Валерьевич

Томский государственный университет

E-mail: vsm@mail.tsu.ru; ssv@fpmk.tsu.ru

Поступила в редакцию 6 декабря 2010 г.