

УДК 519.6

Б.М. Шумилов, Ш.М. Матанов

АЛГОРИТМ С РАСЩЕПЛЕНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЛАЙНОВ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ¹

Для сплайнов 1-й степени предложен новый тип вейвлетов со смещенным носителем. С использованием расщепления по четным и нечетным узлам получен алгоритм вейвлет-разложения в виде решения трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений со строгим диагональным преобладанием.

Ключевые слова: сплайны первой степени, вейвлеты, соотношения разложения и восстановления.

Вейвлетом называется короткая или быстро затухающая волновая функция, множество сжатий и смещений которой порождает пространство измеримых функций на всей числовой оси [1 – 3]. К недостаткам ортонормальных и биортонормальных вейвлетов относится то, что их двойственные не имеют аналитического представления и графически похожи на фрактальные кривые. Недостатком полуортонормальных сплайн-вейвлетов является то, что для них не существует явных конечных формул разложения. Поэтому при вычислениях используют приближенные значения главных коэффициентов разложения [2] либо решают систему линейных алгебраических уравнений, для которой не гарантирована хорошая обусловленность [3]. В данной работе для случая сплайнов первой степени рассмотрен неизвестный ранее тип вейвлетов, для которых доказано существование конечных неявных соотношений разложения и обоснован эффективный алгоритм вейвлет-анализа на их основе.

1. Построение сплайн-вейвлетов первой степени

Пусть пространство V_L является пространством сплайнов первой степени на отрезке $[a, b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L: u_i = a + (b - a) i / 2^L, i = 0, 1, \dots, 2^L$, и базисными функциями $N_i^L(v) = \varphi_1(v - i) \forall i$, где $v = 2^L(u - a) / (b - a) + 1$, с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами функции $\varphi_1(t)$ (рис. 1):

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & t \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Если сетка Δ^{L-1} получена из Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисными функциями N_i^{L-1} , в два раза большими по ширине с центрами в четных целых числах, вложено в V_L . Пространство вейвлетов W_{L-1} определяется как до-

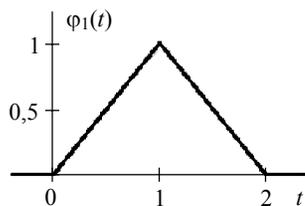


Рис. 1. График функции $\varphi_1(t)$

¹ Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект №11-01-90900_моб_снг_ст).

полнение V_{L-1} до V_L , так что любая функция в V_L может быть записана в виде суммы некоторой функции в V_{L-1} и некоторой функции в W_{L-1} . В [3] было предложено в качестве базисных функций в W_{L-1} использовать базисные функции в V_L с центрами в нечетных целых числах («ленивые» вейвлеты). Мы предлагаем использовать в качестве вейвлетов для W_{L-1} функции N_i^L в V_L с центрами в четных целых числах при условии обнуления сплайна в последнем узле. Тогда соответствующие базисные функции удаляются из базисов, и размерности полученных пространств V^0_L, W^0_{L-1} равны $2^L+1-1=2^L$ и 2^{L-1} соответственно. Следовательно, выполняется условие дополнения размерностей этих пространств, $\text{Dim}(V^0_L) = \text{Dim}(V^0_{L-1}) + \text{Dim}(W^0_{L-1})$.

После этого на любом уровне разрешения $L \geq 0$ сплайн первой степени может быть представлен на интервале $[a, b]$ изменения параметра как

$$S^L(u) = \sum_{i=0}^{2^L-1} C_i^L N_i^L(u), \quad a \leq u \leq b. \quad (1)$$

Для дальнейшего удобно записать коэффициенты сплайна и базисные функции с отсутствующими элементами в конце отрезка аппроксимации как $C^L = [C_0^L, C_1^L, \dots, C_{2^L-1}^L]^T$ и $\phi^L = [N_0^L, N_1^L, \dots, N_{2^L-1}^L]$. Тогда уравнение (1) переписывается в виде $S^L(u) = \phi^L(u) C^L$.

Аналогично, обозначим базисные вейвлет-функции как $M^{L-1}_i = \phi_i(v-2i)$, $i = 0, 1, \dots, 2^{L-1}$, и на уровне разрешения L запишем их в виде матрицы-строки $\psi^L = [M_0^L, M_1^L, \dots, M_{2^L-1}^L]$. Соответствующие вейвлет-коэффициенты будем собирать в вектор $D^L = [D_0^L, D_1^L, \dots, D_{2^L-1}^L]^T$. Тогда с использованием обозначения для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [3]:

$$C^L = [P^L | Q^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Ниже представлен пример матрицы $[P^L | Q^L]$, соответствующий $L = 3$:

$$[P^3 | Q^3] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & & & & 2 & & \\ 1 & 1 & & & & 2 & \\ & 2 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & 2 \\ & & 2 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \right].$$

Здесь и далее пустые позиции представляют собой нулевые элементы. Блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов соотношения

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2} \phi_1(2t) + \phi_1(2t-1) + \frac{1}{2} \phi_1(2t-2),$$

так как каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а на краю интервала из двух, узких базисных функций. Все элементы столбцов матрицы Q^L – нули, за исключением единственной единицы, так как каждый ленивый вейвлет — это одна узкая базисная функция.

Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (2). При этом для облегчения численного решения систему (2) целесообразно расщепить по четным и нечетным узлам [4]. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть значения сплайн-коэффициентов C_i^L в нечетных узлах пересчитаны из решения системы линейных уравнений вида

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^L \\ C_3^L \\ \vdots \\ C_{2^L-1}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^L \\ C_3^L \\ \vdots \\ C_{2^L-1}^L \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где точки, расставленные по диагонали, означают, что предшествующий столбец повторяется соответствующее число раз, сдвигаясь при этом вниз на одну позицию.

Тогда значения сплайн-коэффициентов на прореженной сетке Δ^{L-1} вычисляются по формулам

$$C_0^{L-1} = 2 C_1^L, C_i^{L-1} = 2 C_{2i-1}^L + 2 C_{2i+1}^L, i = 1, 2, \dots, 2^{L-1},$$

тогда как вейвлет-коэффициенты равны

$$D_0^{L-1} = C_0^L - 2 C_1^L, D_i^{L-1} = C_{2i}^L - 2 C_{2i-1}^L - 2 C_{2i+1}^L, i = 0, 1, \dots, 2^{L-1}.$$

Доказательство вытекает из легко проверяемых соотношений, связывающих базисные функции пространства сплайнов на густой сетке и базисные функции на прореженной сетке

$$\varphi_1(2x+2) + 2\varphi_1(2x) + \varphi_1(2x-2) = 2\varphi_1(x+1) + 2\varphi_1(x) - 2\varphi_1(2x+1) - 2\varphi_1(2x-1)$$

внутри отрезка аппроксимации и соотношений

$$\begin{aligned} 2\varphi_1(2x) + \varphi_1(2x-2) &= 2\varphi_1(x+1) + 2\varphi_1(x) - 2\varphi_1(2x+1) - 2\varphi_1(2x-1), \\ \varphi_1(2x+2) + \varphi_1(2x) &= 2\varphi_1(x+1) - 2\varphi_1(2x+1) \end{aligned}$$

на левом и правом концах соответственно.

Введем последовательности матриц G^L и R^L , блоки которых составлены соответственно из коэффициентов левых и правых частей полученных разложений. В результате находим, что базисные функции пространства сплайнов на густой сетке, базисные функции на прореженной сетке и вейвлеты удовлетворяют равенству

$$\varphi^L G^L = [\varphi^{L-1} | \psi^{L-1}] R^L, L \geq 1.$$

Отсюда, используя свойство дополнения пространства вейвлетов, находим

$$[\varphi^{L-1} | \psi^{L-1}] \left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}} \right] = \varphi^L C^L = [\varphi^{L-1} | \psi^{L-1}] R^L (G^L)^{-1} C^L.$$

После этого решение системы уравнений (2) можно записать в матричном виде как

$$\left[\frac{C^{L-1}}{D^{L-1}} \right] = R^L (G^L)^{-1} C^L,$$

откуда после расщепления по четным и нечетным узлам вытекает утверждение теоремы 1.

Что касается вычисления вейвлет-коэффициентов, то аналогично теореме 1 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть значения сплайн-коэффициентов C_i^L в нечетных узлах пересчитаны из решения системы линейных уравнений (3).

Тогда значения сплайн-коэффициентов на прореженной сетке Δ^{L-1} вычисляются по формулам

$$C_0^{L-1} = 1/2 C_0^L + C_1^L, C_i^{L-1} = 1/2 C_{2i}^L + C_{2i+1}^L, i = 1, 2, \dots, 2^{L-1},$$

тогда как вейвлет-коэффициенты равны

$$D_0^{L-1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\frac{1}{2} C_0^L - C_1^L \right), D_i^{L-1} = \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{1}{2} C_{2i}^L - C_{2i-1}^L - C_{2i+1}^L \right), i = 1, 2, \dots, 2^{L-1}.$$

Построение вейвлета $\Psi_2(t)$ со смещенным носителем $[1/2, 5/2]$ ранее изучалось в работах [6, 7]. В [7] было отмечено, что данные вейвлеты удобны для решения проблемы Лапласа по методу граничных интегральных уравнений. А в [8] с целью ускоренного вычисления элементов матрицы жесткости для них была предложена кусочно-синусоидальная аппроксимация. Определенным недостатком построенных вейвлетов является то, что они не ортогональны базисным сплайнам на прореженной сетке. Практически, это означает, что при сжатии с заданной погрешностью в вейвлет-разложении будет оставаться больше коэффициентов, чем для полуортогональных вейвлетов.

2. Пример

Рассмотрим в качестве тестовой функции функцию Хартена [9]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x \leq \frac{1}{3}, \\ |\sin(4\pi x)|, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Это кусочно-гладкая функция, имеющая разрывы первого рода в точках $x=1/3$ и $2/3$ и угол (разрыв первой производной) в точке $x=1/2$. Для «ленивых» вейвлетов, начиная с верхнего уровня разрешения $L = 5$, то есть при числе разбиений $n = 2^L = 32$, на интервале $0 \leq x \leq 1$ с длиной шага $\Delta x = 1/n$, находим последовательно при

$$L = 5: D^4 = [-0,2039, 0,1914, -0,2247, 0,1818, -0,2198, 0,1995, -0,9497, 0,809, -0,8673, 0,809, -0,9497, 0,004389, 0,01591, 0,02207, 0,02079, 0,0125]^T;$$

$$L = 4: D^3 = [1,093, -0,3749, 1,018, 1,709, 1,312, 1,709, 0,07489, 0,09784]^T;$$

$$L = 3: D^2 = [-4,173, 0,7168, -2,086, 0,7168]^T;$$

$$L = 2: D^1 = [3,284, 3,964]^T;$$

$$L = 1: \text{ на последнем шаге остается одно значение сплайна в начале отрезка аппроксимации, } C_0^0 = -4,645, \text{ и один вейвлет-коэффициент, } D_0^0 = 4,645.$$

На рис. 3, а представлены результаты реконструкции узловых значений $C_i = C_i^5, i = 0, 1, \dots, 32$, сплайна 1-й степени $S^5(x)$ при условии обнуления незначимых вейвлет-коэффициентов D_6^3 и $D_{11}^4, D_{12}^4, D_{15}^4$. Здесь сплошной линией обозначается исходная функция. Аналогично, для «ортонормальных» вейвлетов находим, при

$$L = 5: D^4 = [-0,0104, 0,01381, -0,01621, 0,01312, -0,01586, 0,0144, -0,06854, \\ 0,05839, -0,06259, 0,05839, -0,06854, 0,0003168, 0,001148, 0,001592, \\ 0,0015, 0,0009021]^T;$$

$$L = 4: D^3 = [0,05603, -0,0474, 0,07176, 0,1265, 0,00651, 0,1265, 0,007478, 0,009771]^T;$$

$$L = 3: D^2 = [-0,3, 0,1663, -0,339, 0,0927]^T;$$

$$L = 2: D^1 = [0,09721, 0,6154]^T;$$

$$L = 1: C_0^0 = 0,4922, D_0^0 = 0,1448.$$

В данном случае удастся обнулить 14 незначимых вейвлет-коэффициентов, что обеспечивает коэффициент сжатия $33/(33-14) \approx 1,737$. Результаты реконструкции узловых значений сплайна представлены на рис. 3, б. Для сравнения на рис. 3, в представлены соответствующие результаты для полуортогональных вейвлетов [3]:

$$L = 5: D^4 = [-2,093, -2,081, -2,048, -2,005, -1,967, -1,946, -1,196, -1,056, -0,9973, \\ -0,939, -0,7984, 0,1469, 0,1266, 0,08864, 0,04579, 0,0125]^T;$$

$$L = 4: D^3 = [1,172, 1,265, 1,43, 0,272, 0,6862, 1,1, 0,2589, 0,09363]^T;$$

$$L = 3: D^2 = [-4, -3,43, -1,783, 0,5703]^T;$$

$$L = 2: D^1 = [2,22 \cdot 10^{-16}, 0,7071]^T;$$

$$L = 1: C_0^0 = 0, D_0^0 = -4,898 \cdot 10^{-16}; \text{ коэффициент сжатия равняется } 33/(33-19) \approx 2,357.$$

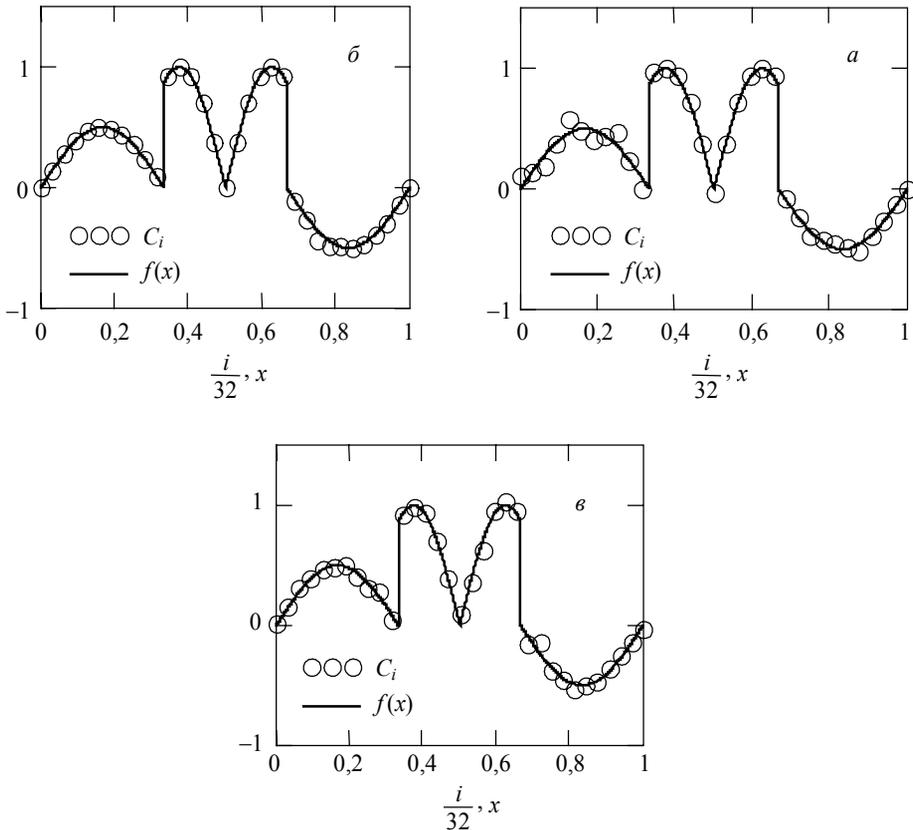


Рис. 3. Графики вейвлет-реконструкций узловых значений сплайна 1-й степени

Заключение

Представленные в статье схемы построения сплайн-вейвлетов 1-й степени со смещенным носителем и получения для них неявных соотношений разложения с расщеплением по четным и нечетным узлам могут быть распространены и на сплайны более высокой степени и предоставляют широкие возможности для создания вычислительно-эффективных алгоритмов построения и использования сплайн-вейвлетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 32 с.
2. *Чуи Ч.* Введение в вейвлеты: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. *Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.
4. *Шумилов Б.М.* Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4(12). С. 45–55.
5. *Шумилов Б.М., Эшаров Э.А.* Построение эрмитовых сплайн-вейвлетов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Кибернетика. Информатика. Приложение. 2006. № 19. С. 260–266.
6. *Bultheel A.* Wavelets with applications in signal and image processing, 2001 – 2006. 176 p. URL: <http://people.cs.kuleuven.be/~adhemar.bultheel/>
7. *Koro K., Ade K.* Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001. V. 25. P. 149–164.
8. *Geranmayeh A., Moini R., Hesam Sadeghi S.H.* On the use of piecewise linear wavelets for fast construction of sparsified moment matrices in solving the thin-wire EFIE // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2006. V. 30. P. 869–881.
9. *Aràndiga F., Baeza A., Donat R.* Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2004. V. 9. P. 263–273.

Шумилов Борис Михайлович

Матанов Шерали Маматжанович

Томский государственный университет

E-mail: b_shumilov@math.tsu.ru; sheralimatanov@yahoo.com Поступила в редакцию 21 февраля 2011 г.