

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

А.М. Горцев, В.Л. Зуевич

### ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ АСИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Решена задача оптимальной оценки неизвестных параметров асинхронного дважды стохастического потока с произвольным (конечным) числом состояний. Оценка параметров производится на основе наблюдения за моментами наступления событий потока. Оценки имеют минимальное среднеквадратическое отклонение от истинных значений параметров потока.

**Ключевые слова:** асинхронный дважды стохастический поток событий, оптимальная оценка параметров, апостериорная плотность вектора параметров, цифровые сети интегрального обслуживания.

Важной сферой приложения теории массового обслуживания является проектирование и создание информационно-вычислительных сетей и различных сетей связи, которые можно объединить единым термином – цифровые сети интегрального обслуживания (ЦСИО). Данная сфера была определена развитием информационных технологий в конце XX века. Возникла необходимость в разработке математических моделей потоков событий, адекватно описывающих реальные информационные потоки, функционирующие в ЦСИО. Одними из первых работ в этом направлении были [1–3]. Отметим, что на практике параметры, характеризующие поток событий, частично либо полностью неизвестны. Кроме того, параметры могут изменяться с течением времени случайным образом, что приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. Поскольку функционирование системы обслуживания непосредственно зависит от параметров входящего потока, важной задачей является оценка в произвольный момент времени его параметров по наблюдениям за этим потоком. Исследования по оценке параметров дважды стохастических потоков были проведены, например, в работах [4 – 6].

В настоящей статье получен явный вид оценок параметров асинхронного дважды стохастического потока с конечным числом состояний [7]. Оценки оптимальны в смысле минимума среднеквадратического отклонения от истинных значений параметров. Приводится алгоритм оценки параметров асинхронного потока событий.

#### 1. Постановка задачи

Рассматривается асинхронный дважды стохастический поток событий с произвольным конечным числом состояний (далее асинхронный поток либо просто поток). Интенсивность потока является кусочно-постоянным случайным процес-

сом  $\lambda(t)$  с  $n$  состояниями:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ ). Процесс (поток) в момент времени  $t$  находится в  $i$ -м состоянии, если  $\lambda(t) = \lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). В течение времени пребывания в  $i$ -м состоянии поток ведет себя как пуассоновский с интенсивностью  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Длительность пребывания в  $i$ -м состоянии есть экспоненциально распределенная случайная величина с функцией распределения  $F_i(\tau) = 1 - e^{-\alpha_{ii}\tau}$ , где  $\alpha_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij}$  ( $i = \overline{1, n}$ );  $\alpha_{ij} > 0$  ( $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ ) – интенсив-

ность перехода процесса  $\lambda(t)$  из состояния  $i$  в состояние  $j$ , т.е. величины  $\alpha_{ij}$  образуют матрицу интенсивностей (матрицу инфинитезимальных коэффициентов) переходов между состояниями  $\|\alpha_{ij}\|_1^n$ . В сделанных предположках  $\lambda(t)$  – транзитивный марковский процесс [7].

Значения параметров потока  $\lambda_i, \alpha_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ ) неизвестны. Процесс  $\lambda(t)$  является принципиально ненаблюдаемым. Предполагается, что о потоке известно только число состояний  $n$  и наблюдению доступны только моменты наступления событий потока  $t_1, t_2, \dots$ . Необходимо по наблюдениям  $t_1, t_2, \dots$  оценить параметры потока  $\lambda_i, \alpha_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ ) в момент окончания наблюдения за потоком.

Рассматривается стационарный (установившийся) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения  $(t_0, t)$ , где  $t_0$  – начало наблюдений,  $t$  – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Без потери общности можно положить  $t_0 = 0$ .

Обозначим  $\bar{\theta} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \alpha_{ij}; i, j = \overline{1, n}, i \neq j)$  – вектор неизвестных параметров потока,  $\hat{\theta}(t)$  – вектор соответствующих оценок параметров в момент времени  $t$ .  $\theta_k$  и  $\hat{\theta}_k(t)$  –  $k$ -е компоненты вектора параметров и вектора оценок соответственно. Обозначим  $N$  – размерность векторов  $\bar{\theta}$  и  $\hat{\theta}(t)$ ,  $N = n^2$ . Обозначим  $p(\bar{\theta} | t) = p(\bar{\theta} | t_1, t_2, \dots, t_m)$  – апостериорная плотность распределения вероятностей вектора параметров  $\bar{\theta}$  в момент времени  $t$  при условии, что в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_m$  ( $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t$ ) наблюдались события потока. Обозначим  $\Theta = \{\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0, \alpha_{ij} > 0; i, j = \overline{1, n}, i \neq j\}$  – область значений вектора параметров  $\bar{\theta}$ . Будем использовать оценку  $\hat{\theta}(t)$ , оптимальную в смысле минимума среднеквадратического отклонения от истинного значения вектора  $\bar{\theta}$ :

$$\hat{\theta}_k(t) = \int_{\Theta} \theta_k p(\bar{\theta} | t) d\bar{\theta} \quad (k = \overline{1, N}),$$

где  $d\bar{\theta} = d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_N$ , или в векторной форме

$$\hat{\theta}(t) = \int_{\Theta} \theta p(\bar{\theta} | t) d\bar{\theta}. \quad (1)$$

Выражение (1) дает оптимальную оценку параметров потока в виде апостериорного среднего. Чтобы воспользоваться формулой (1), необходимо найти выражение для апостериорной плотности  $p(\bar{\theta} | t)$ .

## 2. Явный вид апостериорных вероятностей состояний потока

Для нахождения апостериорной плотности  $p(\bar{\theta} | t)$ , как будет показано в разделе 3 настоящей статьи, необходимо знать  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – апостериорные вероятности пребывания асинхронного потока в  $j$ -м состоянии в произвольный момент времени  $t$ . Явный вид апостериорных вероятностей  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{0, n}$ ) для любого момента времени найден в работе [7].

Согласно [7], поведение  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) на полуинтервале  $[t_k, t_{k+1})$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) между соседними наблюдаемыми событиями асинхронного потока и на полуинтервале  $[t_0, t_1)$  между началом наблюдений и наблюдением первого события определяется выражением

$$\omega(\lambda_j | t) = \frac{\sum_{l=1}^n s_{jl} z_l(t_k) e^{\omega_l(t-t_k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n s_{il} z_l(t_k) e^{\omega_l(t-t_k)}} \quad (j = \overline{1, n}, k = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

где  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $\omega(\lambda_j | t_k) = \omega(\lambda_j | t_k + 0) = \sum_{l=1}^n s_{jl} z_l(t_k)$ ,  $z_l(t_k) = \sum_{i=1}^n s_{li}^{-1} \omega(\lambda_i | t_k + 0)$ ,

$k = 0, 1, \dots$ ;  $\omega_l$  ( $l = \overline{1, n}$ ) – собственные числа матрицы  $D = \|d_{il}\|_1^n$ ,  $d_{il} = \alpha_{li}$  ( $i \neq l$ ),  $d_{ii} = \alpha_{ii} - \lambda_i$  ( $i, l = \overline{1, n}$ );  $s_{il}$  – элементы матрицы  $S = \|s_{il}\|_1^n$ , в которой  $l$ -й столбец является собственным вектором, соответствующим собственному числу  $\omega_l$ ;  $s_{li}^{-1}$  ( $l, i = \overline{1, n}$ ) – элементы матрицы  $S^{-1}$ , обратной матрице  $S$ . В момент времени  $t_k$  (в момент наступления события асинхронного потока) апостериорные вероятности (2) претерпевают разрывы 1-го рода [7] и пересчитываются по формуле

$$\omega(\lambda_j | t_k + 0) = \frac{\lambda_j \omega(\lambda_j | t_k - 0)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega(\lambda_i | t_k - 0)} \quad (j = \overline{1, n}, k = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где  $\omega(\lambda_j | t_k - 0)$  вычисляется по формуле (2) в момент  $t = t_k$ , когда  $t$  изменяется в полуинтервале  $[t_{k-1}, t_k)$ , соседнем с полуинтервалом  $[t_k, t_{k+1})$ . В качестве начального значения  $\omega(\lambda_j | t_0 + 0) = \omega(\lambda_j | t_0 = 0)$  в (2) выбираются априорные финальные вероятности  $\pi_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) состояний процесса  $\lambda(t)$  в стационарном режиме ( $t \rightarrow \infty$ ), которые удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений [7]

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \alpha_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1, n-1}), \quad \sum_{j=1}^n \pi_j = 1. \quad (4)$$

## 3. Нахождение явного вида апостериорной плотности вероятностей и оценок параметров потока

Получим рекуррентную формулу для определения апостериорной плотности вероятностей. Воспользуемся методикой [8]: рассмотрим наблюдения за потоком через равные достаточно малые промежутки времени длительности  $\Delta t$ , а затем устремим  $\Delta t$  к нулю. Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени

$t = 0$  и время  $t$  изменяется дискретно с конечным шагом  $\Delta t$ :  $t = k\Delta t$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Обозначим  $r(k\Delta t)$  – число событий, наблюденных на полуинтервале времени  $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$  ( $r(k\Delta t) = 0, 1, \dots$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ). На полуинтервале  $[-\Delta t, 0)$  наблюдений не производится, поэтому  $r(0)$  можно положить произвольным, например, положим  $r(0) = 0$ . Обозначим  $\vec{r}(m\Delta t) = (r(0), r(\Delta t), \dots, r(m\Delta t))$  – последовательность значений количества наблюденных событий на временных полуинтервалах  $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$  ( $k = \overline{0, m}$ ). Рассмотрим момент времени  $t$ , такой, что  $t = m\Delta t$ ,  $t + \Delta t = (m+1)\Delta t$ . Тогда имеем  $r(m\Delta t) = r(t)$ ,  $r((m+1)\Delta t) = r(t + \Delta t)$ ,  $\vec{r}(m\Delta t) = \vec{r}(t)$ ,  $\vec{r}((m+1)\Delta t) = \vec{r}(t + \Delta t)$ .

Введем  $p(\vec{\theta} | \vec{r}(m\Delta t)) = p(\vec{\theta} | \vec{r}(t)) = p(\vec{\theta} | t)$  – апостериорную плотность вероятностей вектора параметров  $\vec{\theta}$  в момент времени  $t$  при условии, что на полуинтервалах времени  $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$  ( $k = \overline{0, m}$ ) наблюдалось  $r(k\Delta t)$  событий потока соответственно. Аналогично введем  $p(\vec{\theta} | t + \Delta t)$  – апостериорную плотность в момент времени  $t + \Delta t$ .

**Теорема 1.** Апостериорная плотность  $p(\vec{\theta} | t + \Delta t)$  определяется рекуррентной формулой

$$p(\vec{\theta} | t + \Delta t) = p(\vec{\theta} | t) \frac{\sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t}}{\int_{\Theta} p(\vec{\theta} | t) \sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t+\Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t} d\vec{\theta}}, \quad (5)$$

где  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – апостериорная вероятность того, что поток в момент времени  $t$  ( $t > t_0$ ) находится в  $j$ -м состоянии, определяемая формулами (2), (3).

**Доказательство.** Используя формулу для условной вероятности, находим

$$p(\vec{\theta} | \vec{r}(t + \Delta t)) = \frac{p(\vec{\theta}, r(t + \Delta t), \vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t + \Delta t))} = \frac{p(r(t + \Delta t) | \vec{\theta}, \vec{r}(t)) p(\vec{\theta} | \vec{r}(t)) p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t + \Delta t))}.$$

Используя в последней дроби формулу полной вероятности для условной вероятности, получим

$$p(\vec{\theta} | \vec{r}(t + \Delta t)) = p(\vec{\theta} | \vec{r}(t)) \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t + \Delta t))} \sum_{j=1}^n p(r(t + \Delta t) | \vec{r}(t), \vec{\theta}, \lambda(t) = \lambda_j) p(\lambda(t) = \lambda_j | \vec{r}(t), \vec{\theta}). \quad (6)$$

Рассмотрим в (6) произведение  $p(r(t + \Delta t) | \vec{r}(t), \vec{\theta}, \lambda(t) = \lambda_j) p(\lambda(t) = \lambda_j | \vec{r}(t), \vec{\theta})$ .

Имеем  $p(\lambda(t) = \lambda_j | \vec{r}(t), \vec{\theta}) = \omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ), где  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – апостериорная вероятность того, что поток в момент времени  $t$  находится в  $j$ -м состоянии, определяемая в зависимости от момента времени  $t$  формулами (2), (3). В силу предпосылок, количество наблюденных на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  событий не зависит от последовательности  $\vec{r}(t)$  наблюденных до момента  $t$  событий, а зависит только от состояния потока в момент времени  $t$ , т.е. от значения интенсивности наступления событий потока  $\lambda(t) = \lambda_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) в момент времени  $t$ . Поэтому имеем  $p(r(t + \Delta t) | \vec{r}(t), \vec{\theta}, \lambda(t) = \lambda_j) = p(r(t + \Delta t) | \vec{\theta}, \lambda(t) = \lambda_j)$ . Поскольку асин-

хронный поток в любом состоянии ведет себя как пуассоновский, получаем

$$p(r(t + \Delta t) | \bar{\theta}, \lambda(t) = \lambda_j) = \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t + \Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t}. \text{ Таким образом, находим формулу (6)}$$

в виде

$$p(\bar{\theta} | \bar{r}(t + \Delta t)) = p(\bar{\theta} | \bar{r}(t)) \frac{p(\bar{r}(t))}{p(\bar{r}(t + \Delta t))} \sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) \frac{(\lambda_j \Delta t)^{r(t+\Delta t)}}{r(t + \Delta t)!} e^{-\lambda_j \Delta t}.$$

Находя в последнем выражении множитель  $\frac{p(\bar{r}(t))}{p(\bar{r}(t + \Delta t))}$  из условия нормировки

$$\int_{\Theta} p(\bar{\theta} | \bar{r}(t + \Delta t)) d\bar{\theta} = 1, \text{ приходим к (5). Теорема доказана.}$$

Рассмотрим случай, когда на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  нет событий, т.е.  $r(t + \Delta t) = 0$ . Это означает, что полуинтервал  $[t, t + \Delta t)$  находится на временной оси между моментами наступления соседних событий  $t_k$  и  $t_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) либо между моментом начала наблюдений за потоком  $t_0$  и моментом наступления первого события  $t_1$ . Введем обозначение  $s(t, \bar{\theta}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \omega(\lambda_j | t)$ .

**Лемма 1.** Апостериорная плотность  $p(\bar{\theta} | t)$  между моментами наступления событий удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{dp(\bar{\theta} | t)}{dt} = -p(\bar{\theta} | t) \left[ s(t, \bar{\theta}) - \int_{\Theta} s(t, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t) d\bar{\theta} \right] \quad (t_k < t < t_{k+1}, k = 0, 1, \dots). \quad (7)$$

**Доказательство.** Поскольку  $r(t + \Delta t) = 0$ , получаем (5) в виде

$$p(\bar{\theta} | t + \Delta t) = p(\bar{\theta} | t) \frac{\sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) e^{-\lambda_j \Delta t}}{\int_{\Theta} p(\bar{\theta} | t) \sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) e^{-\lambda_j \Delta t} d\bar{\theta}}$$

или, разложив экспоненты в числителе и знаменателе в ряд с точностью до  $o(\Delta t)$ , получим

$$p(\bar{\theta} | t + \Delta t) = \left[ p(\bar{\theta} | t) - s(t, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t) \Delta t + o(\Delta t) \right] \left[ 1 - \Delta t \int_{\Theta} s(t, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t) d\bar{\theta} + o(\Delta t) \right]^{-1}.$$

Раскладывая второй сомножитель в ряд, получаем

$$p(\bar{\theta} | t + \Delta t) = p(\bar{\theta} | t) - \Delta t s(t, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t) + \Delta t p(\bar{\theta} | t) \int_{\Theta} s(t, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t) d\bar{\theta} + o(\Delta t).$$

Перенося в последнем равенстве  $p(\bar{\theta} | t)$  влево, деля на  $\Delta t$  и устремляя  $\Delta t$  к нулю, приходим к (7). Лемма доказана.

Асинхронный поток обладает свойством ординарности, поскольку в каждом состоянии ведет себя как пуассоновский. Поэтому вероятность наступления на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  двух и более событий равна  $o(\Delta t)$ . Рассмотрим случай, когда на полуинтервале  $[t, t + \Delta t)$  наступает одно событие потока в момент времени  $t_k$  ( $t < t_k < t + \Delta t$ ). При этом  $r(t + \Delta t) = 1$ .

**Лемма 2.** Апостериорная плотность  $p(\bar{\theta} | t)$  в момент наступления события пересчитывается по формуле

$$p(\bar{\theta} | t_k + 0) = \frac{p(\bar{\theta} | t_k - 0) s(t_k - 0, \bar{\theta})}{\int_{\Theta} p(\bar{\theta} | t_k - 0) s(t_k - 0, \bar{\theta}) d\bar{\theta}} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

*Доказательство.* Поскольку  $r(t + \Delta t) = 1$ , получаем (5) в следующем виде:

$$p(\bar{\theta} | t + \Delta t) = p(\bar{\theta} | t) \frac{\Delta t \sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) \lambda_j e^{-\lambda_j \Delta t}}{\Delta t \int_{\Theta} p(\bar{\theta} | t) \sum_{j=1}^n \omega(\lambda_j | t) \lambda_j e^{-\lambda_j \Delta t} d\bar{\theta}},$$

или, разложив экспоненты в числителе и знаменателе в ряд с точностью до  $o(\Delta t)$  и вводя величины  $\Delta t'$  и  $\Delta t''$  такие, что  $t = t_k - \Delta t'$ ,  $t + \Delta t = t_k + \Delta t''$ , находим

$$p(\bar{\theta} | t_k + \Delta t'') = \frac{\Delta t p(\bar{\theta} | t_k - \Delta t') s(t_k - \Delta t', \bar{\theta}) + o(\Delta t)}{\Delta t \int_{\Theta} p(\bar{\theta} | t_k - \Delta t') s(t_k - \Delta t', \bar{\theta}) d\bar{\theta} + o(\Delta t)}.$$

Поделим числитель и знаменатель последней дроби на  $\Delta t$ , после чего устремим  $\Delta t$  к нулю (при этом  $t = t_k - \Delta t'$  стремится к  $t_k$  слева,  $t + \Delta t = t_k + \Delta t''$  стремится к  $t_k$  справа). В результате предельного перехода приходим к (8). *Лемма доказана.*

*Замечание к лемме 2.* В момент времени  $t_0$  начала наблюдений за потоком апостериорная плотность  $p(\bar{\theta} | t_0)$  задается, исходя из априорных данных о параметрах асинхронного потока. Если таких данных нет, можно задать плотность  $p(\bar{\theta} | t_0)$  как произведение  $N$  плотностей равномерно распределенных случайных величин, каждая из которых распределена в некотором интервале допустимых значений для соответствующего параметра потока.

**Теорема 2.** Поведение апостериорной плотности  $p(\bar{\theta} | t)$  на временной оси определяется интегро-дифференциальным уравнением (7) и формулой пересчета вероятностей (8), в которых  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $p(\bar{\theta} | t_k) = p(\bar{\theta} | t_k + 0)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). В момент времени  $t_0$  апостериорная плотность  $p(\bar{\theta} | t_0)$  задается согласно замечанию к лемме 2.

*Доказательство* следует из лемм 1 и 2 путем синхронизации формул (7) и (8). *Теорема доказана.*

**Теорема 3.** Апостериорная плотность вероятностей  $p(\bar{\theta} | t)$  вектора параметров  $\bar{\theta}$  на полуинтервале времени  $[t_k, t_{k+1})$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) определяется формулой

$$p(\bar{\theta} | t) = \frac{p(\bar{\theta} | t_k) \exp \left[ - \int_{t_k}^t s(\tau, \bar{\theta}) d\tau \right]}{\int_{\Theta} p(\bar{\theta} | t_k) \exp \left[ - \int_{t_k}^t s(\tau, \bar{\theta}) d\tau \right] d\bar{\theta}} \quad (t_k \leq t < t_{k+1}, k = 0, 1, \dots), \quad (9)$$

где  $p(\bar{\theta} | t_k) = p(\bar{\theta} | t_k + 0)$  вычисляется в момент наступления события  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) по формуле (8), а в момент  $t_0$  апостериорная плотность  $p(\bar{\theta} | t_0)$  задается согласно замечанию к лемме 2.

**Доказательство.** Преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (7) к следующему виду:

$$\frac{dp(\bar{\theta}|t)}{p(\bar{\theta}|t)} = - \left[ s(t, \bar{\theta}) - \int_{\Theta} s(t, \bar{\theta}) p(\bar{\theta}|t) d\bar{\theta} \right] dt.$$

Интегрируя последнее интегро-дифференциальное уравнение в пределах от  $t_k$  до  $t$ , получаем

$$\ln \left[ \frac{p(\bar{\theta}|t)}{p(\bar{\theta}|t_k)} \right] = - \int_{t_k}^t \left[ s(\tau, \bar{\theta}) - \int_{\Theta} s(\tau, \bar{\theta}) p(\bar{\theta}|\tau) d\bar{\theta} \right] d\tau,$$

или, прodelывая необходимые преобразования, получаем

$$p(\bar{\theta}|t) = p(\bar{\theta}|t_k) \exp \left[ - \int_{t_k}^t s(\tau, \bar{\theta}) d\tau \right] \exp \left[ \int_{t_k}^t \int_{\Theta} s(\tau, \bar{\theta}) p(\bar{\theta}|\tau) d\bar{\theta} d\tau \right].$$

Находя последний сомножитель из условия нормировки  $\int_{\Theta} p(\bar{\theta}|t) d\bar{\theta} = 1$ , приходим

к (9). Теорема доказана.

Подставляя (9) в (1), получаем явный вид оценок параметров потока для произвольного момента времени наблюдения за потоком. При этом в момент времени  $t_{k+1}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) имеем

$$\hat{\theta}(t_{k+1}) = \hat{\theta}(t_{k+1} + 0) = \int_{\Theta} \bar{\theta} p(\bar{\theta}|t_{k+1} + 0) d\bar{\theta}, \quad (10)$$

где  $p(\bar{\theta}|t_k + 0)$  вычисляется по формуле (8).

#### 4. Приближенные формулы для расчета оценок параметров потока

Сделаем важное замечание. При расчете вектора оценок параметров  $\hat{\theta}(t)$  по формулам (1), (8) – (10) возникают существенные сложности реализации алгоритма данного расчета на ЭВМ. Во-первых, интегрирование во всех указанных формулах ведется по  $N$ -мерной области  $\Theta$ , которая в общем случае может быть не ограничена. Во-вторых, интегралы являются  $N$ -кратными. Поэтому в настоящей статье приведен приближенный алгоритм расчета оценок  $\hat{\theta}(t)$ , который позволяет избавиться от указанных сложностей.

Идея приближенного алгоритма состоит в предположении достаточной близости вектора оценок  $\hat{\theta}(t)$  к истинному значению вектора параметров  $\bar{\theta}$ , что позволяет воспользоваться разложениями в ряд Тейлора и значительно упростить формулы (1), (8) – (10) для вычислений.

В предположении достаточной близости оценок  $\hat{\theta}(t)$  к начальному значению  $\hat{\theta}(t_k + 0)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) разложим в интегралах вида  $\int_{\Theta} f(\cdot, \bar{\theta}) p(\bar{\theta}|t) d\bar{\theta}$ , входящих в состав формул (1), (8) – (10), подинтегральные функции в ряд Тейлора в окрестности точки  $\hat{\theta}(t_k + 0)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), ограничиваясь первыми тремя членами разложения.

Введем обозначения:

$$m_i(t) = \hat{\theta}_i(t) = \int_{\Theta} \theta_i p(\bar{\theta} | t) d\bar{\theta}, \quad c_{jl}(t) = \int_{\Theta} (\theta_j - m_j(t))(\theta_l - m_l(t)) p(\bar{\theta} | t) d\bar{\theta},$$

$$f(t, t_k, \bar{\theta}) = \exp \left[ - \int_{t_k}^t s(\tau, \bar{\theta}) d\tau \right], \quad f_i(t, t_k, \bar{\theta}) = \theta_i \exp \left[ - \int_{t_k}^t s(\tau, \bar{\theta}) d\tau \right], \quad (11)$$

где  $\theta_i, \hat{\theta}_i(t)$  – элементы векторов  $\bar{\theta}, \hat{\bar{\theta}}(t)$ , соответственно.

В (11) величины  $m_i(t)$  – апостериорные средние параметров  $\theta_i, i = \overline{1, N}$ . Величины  $c_{jl}(t)$  ( $j, l = \overline{1, N}$ ) – ковариации компонент вектора параметров  $\bar{\theta}$ . Вычисление интегралов в формулах (11) представляет собой сложную задачу в части построения численного алгоритма на ЭВМ интегрирования по области  $\Theta$ .

Формула (1), согласно (9), с учетом обозначений (11), запишется в следующем виде:

$$m_i(t) = \int_{\Theta} \theta_i \frac{p(\bar{\theta} | t_k + 0) \exp \left[ - \int_{t_k}^t s(\tau, \bar{\theta}) d\tau \right]}{\int_{\Theta} p(\bar{\theta} | t_k + 0) \exp \left[ - \int_{t_k}^t s(\tau, \bar{\theta}) d\tau \right] d\bar{\theta}} d\bar{\theta} = \frac{\int_{\Theta} f_i(t, t_k, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta}}{\int_{\Theta} f(t, t_k, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta}}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (12)$$

Разложим в (12) функции (11) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\hat{\bar{\theta}}(t_k + 0) = \bar{m}(t_k + 0)$ , пренебрегая членами порядка малости  $o(\|\Delta\bar{\theta}\|^2)$ ,  $\Delta\bar{\theta} = \bar{\theta} - \bar{m}(t_k + 0)$ .

Получим

$$f(t, t_k, \bar{\theta}) = f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0)) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j} (\theta_j - m_j(t_k + 0)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} (\theta_j - m_j(t_k + 0))(\theta_l - m_l(t_k + 0)),$$

$$f_i(t, t_k, \bar{\theta}) = f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0)) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j} (\theta_j - m_j(t_k + 0)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} (\theta_j - m_j(t_k + 0))(\theta_l - m_l(t_k + 0)). \quad (13)$$

Рассмотрим числитель в (12). Учитывая (13) и обозначения (11), имеем

$$\int_{\Theta} f_i(t, t_k, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta} = f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0)) \int_{\Theta} p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta} +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j} \int_{\Theta} (\theta_j - m_j(t_k + 0)) p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} \int_{\Theta} (\theta_j - m_j(t_k + 0))(\theta_l - m_l(t_k + 0)) p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta} =$$

$$= f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_k + 0). \quad (14)$$

Аналогично найдем знаменатель в (12):

$$\int_{\Theta} f(t, t_k, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta} = f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_k + 0). \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (12), находим

$$m_i(t) = \frac{f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_k + 0)}{f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_k + 0)}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Согласно формуле (16), для оценки параметра  $\theta_i$  ( $\hat{\theta}_i = m_i(t)$ ) в произвольный момент времени  $t$  необходимо знать начальные значения  $\bar{m}(t_k + 0)$ , матрицу ковариаций  $C(t_k + 0) = \|c_{jl}(t_k + 0)\|_{j,l=1}^N$ , значения функций  $f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))$  и  $f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Отметим, что интегрирование при вычислении  $f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))$  и  $f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))$ ,  $i = \overline{1, N}$ , производится на конечном отрезке времени  $[t_k, \bar{t}]$ ,  $t < t_{k+1}$ .

Начальные значения  $\bar{m}(t_0 + 0)$  и  $C(t_0 + 0)$  задаются согласно апостериорной плотности  $p(\bar{\theta} | t_0 + 0)$ . Если плотность  $p(\bar{\theta} | t_0 + 0)$  выбрана в соответствии с замечанием к лемме 2, то элементы вектора  $\bar{m}(t_0 + 0)$  и элементы матрицы  $C(t_0 + 0)$  получаются следующим образом:

$$m_i(t_0 + 0) = \frac{1}{\theta_i^{(1)} - \theta_i^{(0)}} \int_{\theta_i^{(0)}}^{\theta_i^{(1)}} \theta_i d\theta_i, \quad i = \overline{1, N},$$

$$c_{jl}(t_0 + 0) = \delta(j, l) \frac{1}{\theta_j^{(1)} - \theta_j^{(0)}} \int_{\theta_j^{(0)}}^{\theta_j^{(1)}} (\theta_j - m_j(t_0 + 0)) (\theta_l - m_l(t_0 + 0)) d\theta_j, \quad j, l = \overline{1, N}, \quad (17)$$

где  $[\theta_i^{(0)}, \theta_i^{(1)}]$  – отрезок определения равномерной плотности вероятностей  $p(\theta_i | t_0 + 0) = 1/(\theta_i^{(1)} - \theta_i^{(0)})$  параметра  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\delta(j, l)$  – символ Кронекера.

Рассмотрим формулу (16) для расчета  $m_i(t)$  в любой момент времени  $t$  на полуинтервалах  $[t_k, t_{k+1})$  ( $i = \overline{1, N}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ). Для вычисления величин  $m_i(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ), во-первых, необходимо получить выражения для векторов  $\bar{m}(t_k + 0)$ , матриц ковариаций  $C(t_k + 0)$  при  $k = 1, 2, \dots$ . Во-вторых, необходимо получить вторые частные производные функций  $\frac{\partial^2 f(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l}$ ,  $\frac{\partial^2 f_i(t, t_k, \bar{m}(t_k + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l}$ ,  $i, j, l = \overline{1, N}$ .

В силу (11), аналитические формулы вторых частных производных содержат определенные интегралы, поэтому данные производные рассчитываются численно.

Получим выражения для векторов  $\bar{m}(t_k + 0)$  и матриц ковариаций  $C(t_k + 0)$  при  $k = 1, 2, \dots$ . Для этого рассмотрим  $\bar{m}(t_k + 0)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). С учетом выражений (11) и (8), находим  $m_i(t_k + 0)$  в виде

$$m_i(t_k + 0) = \int_{\Theta} \theta_i p(\bar{\theta} | t_k + 0) d\bar{\theta} = \frac{\int_{\Theta} \theta_i s(t_k - 0, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_k - 0) d\bar{\theta}}{\int_{\Theta} s(t_k - 0, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_k - 0) d\bar{\theta}},$$

$$i = \overline{1, N}, k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Обозначим  $s_i(t_k - 0, \bar{\theta}) = \theta_i s(t_k - 0, \bar{\theta})$  и разложим функции  $s(t_k - 0, \bar{\theta})$ ,  $s_i(t_k - 0, \bar{\theta})$  ( $i = \overline{1, N}$ ) в ряд Тейлора в окрестности  $\bar{\theta} = \bar{m}(t_k - 0)$  с точностью до  $o(\|\Delta\bar{\theta}\|^2)$ ,  $\Delta\bar{\theta} = \bar{\theta} - \bar{m}(t_k - 0)$ . Получим

$$s(t_k - 0, \bar{\theta}) = s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_j} (\theta_j - m_j(t_k - 0)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} (\theta_j - m_j(t_k - 0)) (\theta_l - m_l(t_k - 0)),$$

$$s_i(t_k - 0, \bar{\theta}) = s_i(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial s_i(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_j} (\theta_j - m_j(t_k - 0)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 s_i(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} (\theta_j - m_j(t_k - 0)) (\theta_l - m_l(t_k - 0)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Подставляя полученные выражения в (18), получаем

$$m_i(t_k + 0) = \frac{s_i(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 s_i(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}}{s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}},$$

$$j, l = \overline{1, N}, k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где  $c_{jl} = c_{jl}(t_k - 0)$ .

Получим выражение для  $c_{jl} = c_{jl}(t_k - 0)$  в (18) ( $j, l = \overline{1, N}, k = 1, 2, \dots$ ). Рассмотрим (11) для  $c_{jl}(t)$  на полуинтервале времени  $[t_{k-1}, t_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Учитывая формулу (9) для плотности  $p(\bar{\theta} | t)$  и обозначения (11), находим

$$c_{jl}(t) = \int_{\Theta} (\theta_j - m_j(t)) (\theta_l - m_l(t)) \frac{f(t, t_{k-1}, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_{k-1} + 0)}{\int_{\Theta} f(t, t_{k-1}, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_{k-1} + 0) d\bar{\theta}} d\bar{\theta}. \quad (20)$$

Обозначим

$$F_{jl}(t, t_{k-1}, \bar{\theta}) = (\theta_j - m_j(t)) (\theta_l - m_l(t)) f(t, t_{k-1}, \bar{\theta}), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad j, l = \overline{1, N}. \quad (21)$$

С учетом введенного обозначения, (20) на полуинтервале времени  $[t_{k-1}, t_k]$  примет вид

$$c_{jl}(t) = \frac{\int_{\Theta} F_{jl}(t, t_{k-1}, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_{k-1} + 0) d\bar{\theta}}{\int_{\Theta} f(t, t_{k-1}, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_{k-1} + 0) d\bar{\theta}}, \quad j, l = \overline{1, N}. \quad (22)$$

Подставляя в (22)  $t = t_k - 0$ , получаем

$$c_{jl}(t_k - 0) = \frac{\int_{\Theta} F_{jl}(t_k - 0, t_{k-1}, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_{k-1} + 0) d\bar{\theta}}{\int_{\Theta} f(t_k - 0, t_{k-1}, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_{k-1} + 0) d\bar{\theta}}, \quad j, l = \overline{1, N}. \quad (23)$$

Раскладывая функцию (21) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\bar{\theta} = \bar{m}(t_{k-1} + 0)$  с точностью до  $o(\|\Delta\bar{\theta}\|^2)$ ,  $\Delta\bar{\theta} = \bar{\theta} - \bar{m}(t_{k-1} + 0)$ , находим

$$F_{jl}(t, t_{k-1}, \bar{\theta}) = F_{jl}(t, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0)) + \sum_{u=1}^N \frac{\partial F_{jl}(t, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0))}{\partial \theta_u} (\theta_u - m_u(t_{k-1} + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 F_{jl}(t, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} (\theta_u - m_u(t_{k-1} + 0)) (\theta_v - m_v(t_{k-1} + 0)), \quad j, l = \overline{1, N}.$$

Раскладывая в ряд Тейлора функцию  $f(t, t_{k-1}, \bar{\theta})$ , стоящую в знаменателе (22), в окрестности точки  $\bar{\theta} = \bar{m}(t_{k-1} + 0)$  и пренебрегая членами порядка малости  $o(\|\Delta\bar{\theta}\|^2)$ ,  $\Delta\bar{\theta} = \bar{\theta} - \bar{m}(t_{k-1} + 0)$ , получаем

$$\int_{\Theta} f(t, t_{k-1}, \bar{\theta}) p(\bar{\theta} | t_{k-1} + 0) d\bar{\theta} = f(t, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^N \frac{\partial^2 f(t, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0))}{\partial \theta_j \partial \theta_l} c_{jl}(t_{k-1} + 0).$$

Подставив полученные разложения в (23) и учитывая, что  $t = t_k - 0$ , получаем (23) в виде

$$c_{jl}(t_k - 0) = \frac{F_{jl}(t_k - 0, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 F_{jl}(t_k - 0, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}}{f(t_k - 0, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 f(t_k - 0, t_{k-1}, \bar{m}(t_{k-1} + 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}}, \quad j, l = \overline{1, N}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где  $c_{uv} = c_{uv}(t_{k-1} + 0)$  ( $u, v = \overline{1, N}$ ).

Формула (24) дает элементы матрицы ковариаций  $C(t)$  в момент времени  $t = t_k - 0$ , необходимые для пересчета апостериорных средних  $m_i(t_k + 0)$  ( $i = \overline{1, N}$ ) по формуле (19).

Для расчета оценок параметров  $\hat{\theta}_i(t) = m_i(t)$  ( $i = \overline{1, N}$ ) на полуинтервале времени  $[t_k, t_{k+1})$  по формулам (16) необходимо найти элементы  $c_{jl}(t_k + 0)$  ковариации

онной матрицы  $C(t)$  в момент времени  $t = t_k + 0$  ( $j, l = \overline{1, N}$ ). Имеем

$$c_{jl}(t_k + 0) = \int_{\Theta} (\theta_j - m_j(t_k + 0))(\theta_l - m_l(t_k + 0))p(\bar{\theta} | t_k + 0)d\bar{\theta}, \quad j, l = \overline{1, N}.$$

С учетом введенных обозначений и формулы (8) пересчета плотности вероятностей  $p(\bar{\theta} | t)$  в момент времени  $t_k$  наступления события имеем

$$c_{jl}(t_k + 0) = \frac{\int_{\Theta} (\theta_j - m_j(t_k + 0))(\theta_l - m_l(t_k + 0))s(t_k - 0, \bar{\theta})p(\bar{\theta} | t_k - 0)d\bar{\theta}}{\int_{\Theta} s(t_k - 0, \bar{\theta})p(\bar{\theta} | t_k - 0)d\bar{\theta}}. \quad (25)$$

Введем обозначение

$$A_{jl}(t_k + 0, \bar{\theta}) = (\theta_j - m_j(t_k + 0))(\theta_l - m_l(t_k + 0))s(t_k - 0, \bar{\theta}), \quad j, l = \overline{1, N}.$$

С учетом введенного обозначения, формула (25) принимает следующий вид:

$$c_{jl}(t_k + 0) = \frac{\int_{\Theta} A_{jl}(t_k + 0, \bar{\theta})p(\bar{\theta} | t_k - 0)d\bar{\theta}}{\int_{\Theta} s(t_k - 0, \bar{\theta})p(\bar{\theta} | t_k - 0)d\bar{\theta}}, \quad j, l = \overline{1, N}. \quad (26)$$

Раскладывая функцию  $A_{jl}(t_k + 0, \bar{\theta})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\bar{\theta} = \bar{m}(t_k - 0)$  с точностью до  $o(\|\Delta\bar{\theta}\|^2)$ ,  $\Delta\bar{\theta} = \bar{\theta} - \bar{m}(t_k - 0)$ , получаем

$$A_{jl}(t_k + 0, \bar{\theta}) = A_{jl}(t_k + 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \sum_{u=1}^N \frac{\partial A_{jl}(t_k + 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_u} (\theta_u - m_u(t_k - 0)) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 A_{jl}(t_k + 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} (\theta_u - m_u(t_k - 0))(\theta_v - m_v(t_k - 0)), \quad j, l = \overline{1, N}.$$

Разлагая функцию  $s(t_k - 0, \bar{\theta})$  в ряд в точке  $\bar{\theta} = \bar{m}(t_k - 0)$ , находим

$$s(t_k - 0, \bar{\theta}) = s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \sum_{u=1}^N \frac{\partial s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_u} (\theta_u - m_u(t_k - 0)) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} (\theta_u - m_u(t_k - 0))(\theta_v - m_v(t_k - 0)), \quad j, l = \overline{1, N}.$$

Подставляя данные разложения в (26), получаем формулу для пересчета элементов  $c_{jl}(t)$  матрицы ковариации  $C(t)$  в момент времени  $t_k$  наступления события потока:

$$c_{jl}(t_k + 0) = \frac{A_{jl}(t_k + 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 A_{jl}(t_k + 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}(t_k - 0)}{s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0)) + \frac{1}{2} \sum_{u,v=1}^N \frac{\partial^2 s(t_k - 0, \bar{m}(t_k - 0))}{\partial \theta_u \partial \theta_v} c_{uv}(t_k - 0)}, \\ j, l = \overline{1, N}. \quad (27)$$

#### 4. Алгоритм оценки параметров потока

Полученные в настоящей статье формулы позволяют сформулировать численный алгоритм расчета оценок параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с конечным числом состояний в произвольный момент времени  $t$  наблюдения за потоком:

1) в момент времени  $t_0 = 0$  исходя из априорных данных о потоке задаются начальные значения оценок параметров потока  $\bar{\theta}(t_0) = \bar{m}(t_0 + 0)$  и начальная матрица ковариаций  $C(t_0 + 0)$ . В частности, можно считать начальные оценки параметров  $N$  независимыми случайными величинами, распределенными равномерно в интервалах допустимых значений параметров потока; в этом случае  $\bar{m}(t_0 + 0)$  и  $C(t_0 + 0)$  задаются по формулам (17). После задания  $\bar{m}(t_0 + 0)$  по формулам (4) вычисляются начальные оценки апостериорных вероятностей  $\omega(\lambda_j | t_0)$  ( $j = \overline{1, n}$ ), зависящие от  $\bar{m}(t_0 + 0)$ .

2) Для  $k = 0$  в любой момент времени  $t$  ( $t_k < t < t_{k+1}$ ), где  $t_{k+1}$  – момент наблюдения  $(k + 1)$ -го события потока, рассчитываются оценки параметров  $\bar{m}(t)$  по формулам (16); вероятности  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ), входящие в состав формул (16), рассчитываются по формулам (2).

3) В момент времени  $t = t_{k+1}$  наблюдения события асинхронного потока  $\bar{m}(t_{k+1} - 0)$  рассчитываются по формулам (16) и  $C(t_{k+1} - 0)$  – по формулам (24). Вероятности  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – по формулам (2).

4) В момент времени  $t = t_{k+1}$  по формулам (19) и (27) рассчитываются  $\bar{m}(t_{k+1} + 0)$  и  $C(t_{k+1} + 0)$  соответственно. Вероятности  $\omega(\lambda_j | t_{k+1} + 0)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) пересчитываются по формулам (3).

5) Шаги 2 – 4 алгоритма повторяются для  $k = 1$  и т.д.

Отметим, что вероятности  $\omega(\lambda_j | t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) в любой момент времени  $t$  зависят от значений оценок параметров потока в этот момент времени, так как в каждый момент времени для расчета апостериорных вероятностей по формулам (2) – (4) вместо истинных значений параметров потока используются соответствующие оценки параметров потока  $\bar{m}(t)$ .

#### 5. Численный эксперимент

Для численного эксперимента по оценке параметров потока на основе алгоритма, приведенного в разделе 4 настоящей статьи, была реализована программа расчета оценок на языке C++.

Первый этап расчета – имитационное моделирование потока с заданными параметрами.

Второй этап расчета – вычисление оценок параметров, а также апостериорных вероятностей и элементов матрицы ковариации  $C$  по формулам (2) – (4), (16), (17), (19), (24), (27).

В приведенном ниже примере расчеты были произведены для следующих значений параметров:  $n = 2$  (асинхронный поток имеет два состояния),  $\lambda_1 = 0,5$ ,  $\lambda_2 = 0,05$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{12} = 0,08$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{21} = 0,04$ . При этом начальная плотность распределения параметров потока выбрана равномерной: параметр  $\lambda_1$  равномерно распре-

делен в интервале  $[0,337;0,836]$ , параметр  $\lambda_2$  – в интервале  $[0,021;0,073]$ , параметр  $\alpha_1$  – в интервале  $[0,04;0,091]$ , параметр  $\alpha_2$  – в интервале  $[0,031;0,048]$ . Время моделирования  $T$  изменяется от 0 до 100 ед. времени.

На рис. 1 – 4 приведены траектории изменения оценок параметров потока в зависимости от времени моделирования  $T$ .

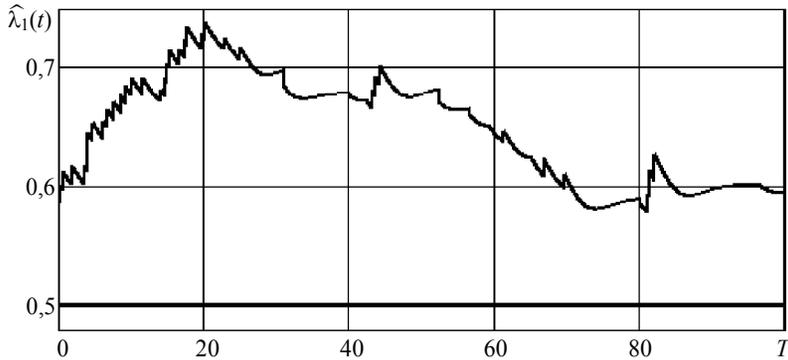


Рис. 1. Траектория оценки параметра  $\hat{\lambda}_1(t)$

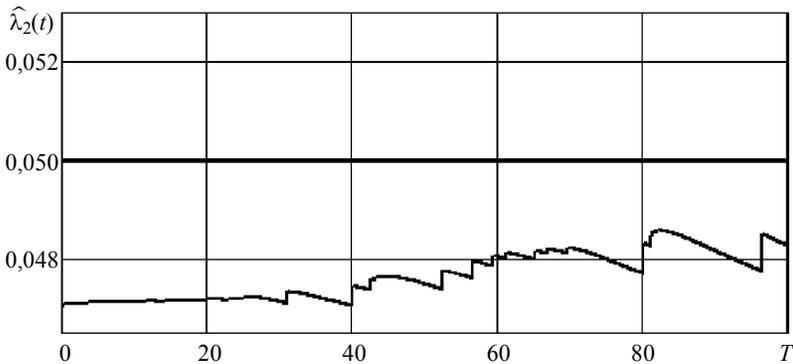


Рис. 2. Траектория оценки параметра  $\hat{\lambda}_2(t)$

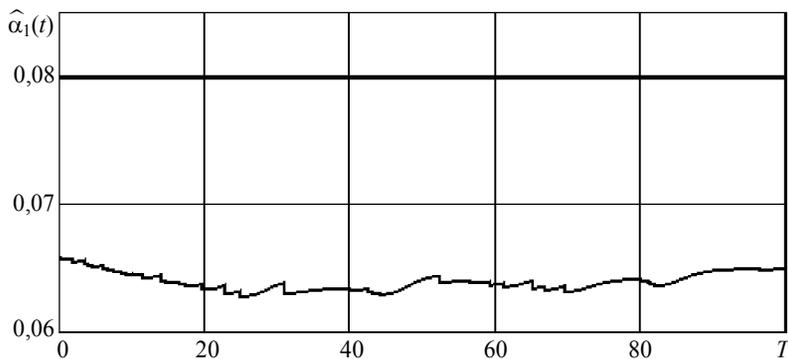


Рис. 3. Траектория оценки параметра  $\hat{\alpha}_1(t)$

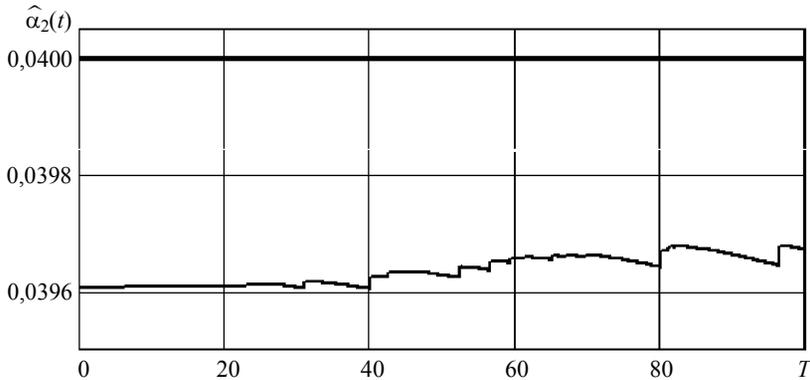


Рис. 4. Траектория оценки параметра  $\hat{\alpha}_2(t)$

Скачки траекторий соответствуют моментам наступления событий потока – в эти моменты оценки параметров пересчитываются по формулам (19) и претерпевают разрывы первого рода.

Анализ приведенного в настоящей статье, а также многочисленных проведенных численных экспериментов показывает, что оценки параметров потока имеют достаточно хорошую стабильность, в том числе в случае равномерного распределения начальных оценок параметров в интервалах, допускающих отклонение от истинного значения параметра на 100 %. Колебание оценок для  $\hat{\lambda}_1(t)$  происходит в диапазоне от 0,578281 до 0,737368; для  $\hat{\lambda}_2(t)$  – в диапазоне от 0,04702 до 0,0486; для  $\hat{\alpha}_1(t)$  – в диапазоне от 0,06279 до 0,06572; для  $\hat{\alpha}_2(t)$  – в диапазоне от 0,0396 до 0,03968. Еще раз подчеркнем, что полученные оценки обеспечивают минимум среднеквадратического отклонения оценок параметров от истинных значений.

### Заключение

Полученные в статье результаты позволяют находить оптимальные оценки параметров асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным конечным числом состояний. Оценки оптимальны в смысле минимума среднеквадратического отклонения от истинных значений параметров. Оценивание параметров потока событий необходимо для управления системами и сетями массового обслуживания, поскольку на практике параметры функционирующих в системах и сетях потоков часто неизвестны.

Полученный в статье явный вид оценок параметров позволяет находить оценки с высокой точностью и скоростью без привлечения численных методов. Для упрощения численной оценки параметров реальных потоков событий предложен приближенный алгоритм; проведенные эксперименты показывают возможность оценки параметров асинхронного потока с помощью данного алгоритма в режиме реального времени.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.

2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764–779.
4. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного альтернирующего пуассоновского потока событий методом моментов // Радиотехника. 1995. № 7–8. С. 6–10.
5. Горцев А.М., Шмырин И.С. Оптимальная оценка параметров дважды стохастического пуассоновского потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов наступления событий // Изв. вузов. Физика. 1999. № 4. С. 19–27.
6. Бушланов И.В., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
7. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 44–65.
8. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.

*Горцев Александр Михайлович*

*Зуевич Владимир Леонидович*

Томский государственный университет

E-mail: amg@fpmk.tsu.ru; zuevichv@ya.ru

Поступила в редакцию 23 августа 2011 г.