

УДК 519.872

Л. А. Жидкова, С.П. Моисеева

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ КРАТНЫХ ЗАЯВОК ПРОСТЕЙШЕГО ПОТОКА

В работе построена модель параллельного обслуживания заявок в системе массового обслуживания, состоящей из k блоков обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. Найдено аналитическое выражение для производящей функций многомерного распределения вероятностей состояний цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в нестационарном режиме. Проведены расчеты основных вероятностных характеристик.

Ключевые слова: немарковские системы с неограниченным числом обслуживающих приборов, пуассоновский поток кратных заявок, параллельное обслуживание, система массового обслуживания.

Параллельность процессов вычислений и обработки информации является одним из основных принципов, используемых при проектировании современных компьютерных сетей. Это позволяет достигать максимальной скорости в работе и существенной экономии времени. При оценке производительности первостепенное значение имеет продолжительность вычислительных процессов. Случайный характер процессов формирования, обработки и передачи данных обуславливает необходимость применения стохастических моделей, в качестве которых широко используются модели массового обслуживания. Использование аппарата теории массового обслуживания позволяет построить математические модели коммутационных сетей и провести теоретические исследования параметров функционирования реальной вычислительной системы [1, 2].

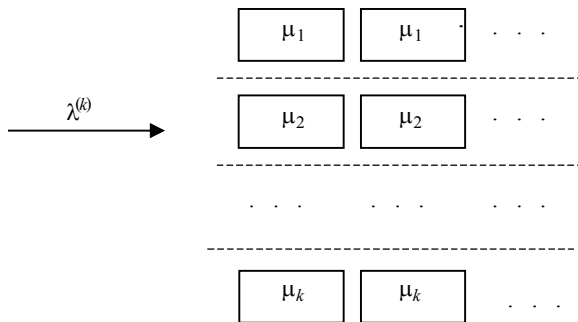
Одним из основных принципов при проектировании современных компьютерных сетей является параллельность процессов обработки информации. Поэтому анализ математических моделей с параллельно функционирующими блоками обслуживания и общими входящими потоками имеет практическое значение [3 – 5].

1. СМО с параллельным обслуживанием k кратных заявок

Рассмотрим систему с k блоками обслуживания (рис. 1), каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает простейший с параметром λ поток k заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают k заявок.

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, вторая – во второй, третья – в третий, и так далее, k -я – в k -й блоки обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется её обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ соответственно.

Состояние системы определим вектором $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, где i_k – число заявок в k -м блоке. Тогда случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t), \dots, i_k(t)\}$ изменения во времени состояний системы является k -мерной цепью Маркова.

Рис. 1. СМО с параллельным обслуживанием k заявок

Обозначим

$$P(j_1, j_2, \dots, j_k, t) = P\{i_1(t) = j_1, i_2(t) = j_2, \dots, i_k(t) = j_k\}$$

распределение вероятностей состояний k -мерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме) в момент времени t .

1.1. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Составим Δt -методом прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова [4]. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} P(j_1, j_2, \dots, j_k, t + \Delta t) = & (1 - \lambda \Delta t) \cdot (1 - j_1 \mu_1 \Delta t) \cdot (1 - j_2 \mu_2 \Delta t) \cdot \dots \cdot (1 - j_k \mu_k \Delta t) \times \\ & \times P(j_1, j_2, \dots, j_k, t) + P(j_1 + 1, j_2, \dots, j_k, t) \cdot (j_1 + 1) \cdot \mu_1 \Delta t + \\ & + P(j_1, j_2 + 1, \dots, j_k, t) \cdot (j_2 + 1) \cdot \mu_2 \Delta t + \dots + P(j_1, j_2, \dots, j_k + 1, t) \cdot (j_k + 1) \cdot \mu_k \Delta t + \\ & + \lambda \Delta t P(j_1 - 1, j_2 - 1, \dots, j_k - 1, t) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

откуда получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(j_1, j_2, \dots, j_k, t)}{\partial t} = & -(\lambda + j_1 \mu_1 + j_2 \mu_2 + \dots + j_k \mu_k) P(j_1, j_2, \dots, j_k, t) + \\ & + (j_1 + 1) \mu_1 P(j_1 + 1, j_2, \dots, j_k, t) + (j_2 + 1) \mu_2 P(j_1, j_2 + 1, \dots, j_k, t) + \dots \\ & \dots + (j_k + 1) \mu_k P(j_1, j_2, \dots, j_k + 1, t) + \lambda P(j_1 - 1, j_2 - 1, \dots, j_k - 1, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Определив производящую функцию k -мерного распределения $P(j_1, j_2, \dots, j_k, t)$ в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k, t) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_k^{j_k} P(j_1, j_2, \dots, j_k, t),$$

нетрудно показать, что она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_k, t)}{\partial t} + (x_1 - 1) \mu_1 \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_k, t)}{\partial x_1} + (x_2 - 1) \mu_2 \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_k, t)}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + (x_k - 1) \mu_k \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_k, t)}{\partial x_k} = \lambda (x_1 x_2 \dots x_k - 1) F(x_1, x_2, \dots, x_k, t). \end{aligned} \quad (2)$$

1.2. Вид производящей функции при нестационарном функционировании СМО

Поставим задачу нахождения производящей функции при нестационарном режиме функционирования рассматриваемой СМО, удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка (2).

Для нахождения дополнительных условий воспользуемся тем фактом, что производящая функция нестационарного распределения вероятностей числа занятых приборов в системе $M|M|\infty$ определяется выражением [4]:

$$F(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P(i, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} (x-1)t \right\}.$$

Тогда для производящих функций одномерных маргинальных распределений имеем

$$\begin{aligned} F(x_1, 1, \dots, 1, t) &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} x_1^{j_1} P(j_1, j_2, \dots, j_k, t) = \sum_{j_1=0}^{\infty} x_1^{j_1} P(j_1, t) = \\ &= F(j_1, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1} (x_1 - 1)t \right\}, \\ F(1, x_2, \dots, 1, t) &= \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_2} (x_2 - 1)t \right\}, \\ F(1, 1, \dots, x_k, t) &= \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_k} (x_k - 1)t \right\}, \\ F(1, 1, \dots, t) &= 1, \quad F(x_1, x_2, \dots, 0) = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем систему уравнений (2) в частных производных первого порядка (2) [4, 6]:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\mu_1(x_1 - 1)} = \frac{dx_2}{\mu_2(x_2 - 1)} = \dots = \frac{dx_k}{\mu_k(x_k - 1)} = \frac{dF}{\lambda(x_1 x_2 \dots x_k - 1)F}.$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx_1}{\mu_1(x_1 - 1)} = \frac{dx_2}{\mu_2(x_2 - 1)} = \dots = \frac{dx_k}{\mu_k(x_k - 1)} = \\ &= dF / \{ \lambda F [(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) \cdot \dots \cdot (x_k - 1) + (x_2 - 1) \cdot (x_3 - 1) \cdot \dots \cdot (x_k - 1) + \dots \\ &\quad \dots + (x_1 - 1) \cdot (x_3 - 1) \cdot \dots \cdot (x_k - 1) + \dots + (x_1 - 1) \cdot \dots \cdot (x_{k-2} - 1) \cdot (x_k - 1) + \\ &\quad + (x_1 - 1) \cdot \dots \cdot (x_{k-2} - 1) \cdot (x_{k-1} - 1) + (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1)] \}. \end{aligned}$$

Решая данную систему, получаем, что решение имеет вид

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_k, t) &= \Phi \left((x_1 - 1)e^{-\mu_1 t}, (x_2 - 1)e^{-\mu_2 t}, \dots, (x_k - 1)e^{-\mu_k t} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{\lambda(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) \cdot \dots \cdot (x_k - 1)}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda(x_2-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1)}{\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k} + \frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1)}{\mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_k} + \dots \\
& \dots + \frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot \dots \cdot (x_{k-2}-1) \cdot (x_k-1)}{\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_k} + \\
& + \frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot \dots \cdot (x_{k-2}-1) \cdot (x_{k-1}-1)}{\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_{k-1}} + \frac{\lambda(x_1-1)}{\mu_1} + \frac{\lambda(x_2-1)}{\mu_2} + \dots + \frac{\lambda(x_k-1)}{\mu_k} \Big\}, \quad (4)
\end{aligned}$$

где $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Учитывая дополнительные условия (3), имеем

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \dots, x_k, 0) &= \Phi(x_1-1, x_2-1, \dots, x_k-1) \exp \left\{ \frac{\lambda(x_1-1)(x_2-1) \dots (x_k-1)}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k} + \right. \\
& + \frac{\lambda(x_2-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1)}{\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k} + \frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1)}{\mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_k} + \dots \\
& \left. \dots + \frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot \dots \cdot (x_{k-2}-1) \cdot (x_{k-1}-1)}{\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_{k-1}} + \frac{\lambda(x_1-1)}{\mu_1} + \frac{\lambda(x_2-1)}{\mu_2} + \dots + \frac{\lambda(x_k-1)}{\mu_k} \right\} = 1
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1-1, x_2-1, \dots, x_k-1) &= \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot (x_2-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1)}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k} + \right. \right. \\
& + \frac{\lambda \cdot (x_2-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1)}{\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k} + \frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1)}{\mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_k} + \dots \\
& \left. \left. \dots + \frac{\lambda \cdot (x_1-1) \cdot \dots \cdot (x_{k-2}-1) \cdot (x_{k-1}-1)}{\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_{k-1}} + \frac{\lambda(x_1-1)}{\mu_1} + \frac{\lambda(x_2-1)}{\mu_2} + \dots + \frac{\lambda(x_k-1)}{\mu_k} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \Phi((x_1-1)e^{-\mu_1 t}, (x_2-1)e^{-\mu_2 t}, \dots, (x_k-1)e^{-\mu_k t}) = \\
& = \exp \left\{ - \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k} (x_1-1)(x_2-1) \dots (x_k-1) \times \right. \\
& - \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k} (x_2-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1) e^{-(\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k)t} - \\
& - \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_k} (x_1-1) \cdot (x_3-1) \cdot \dots \cdot (x_k-1) e^{-(\mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_k)t} - \\
& - \frac{\lambda}{\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_k} (x_1-1) \dots (x_{k-2}-1) (x_k-1) e^{-(\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_k)t} - \\
& \left. - \frac{\lambda}{\mu_1} (x_1-1) e^{-\mu_1 t} - \frac{\lambda}{\mu_2} (x_2-1) e^{-\mu_2 t} - \dots - \frac{\lambda}{\mu_k} (x_k-1) e^{-\mu_k t} \right\}.
\end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (4), получаем выражение для производящей функции $F(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k, t) = \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k} (x_1 - 1)(x_2 - 1) \dots (x_k - 1) (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k)t}) + \right. \\ + \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k} (x_2 - 1) \cdot (x_3 - 1) \cdot \dots \cdot (x_k - 1) (1 - e^{-(\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_k)t}) + \\ + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_k} (x_1 - 1) \cdot (x_3 - 1) \cdot \dots \cdot (x_k - 1) \cdot (1 - e^{-(\mu_1 + \mu_3 + \dots + \mu_k)t}) + \dots \\ \dots + \frac{\lambda}{\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_k} (x_1 - 1) \dots (x_{k-2} - 1) (x_k - 1) (1 - e^{-(\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_k)t}) + \\ + \frac{\lambda}{\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_{k-1}} (x_1 - 1) \dots (x_{k-2} - 1) (x_{k-1} - 1) (1 - e^{-(\mu_1 + \dots + \mu_{k-2} + \mu_{k-1})t}) + \\ \left. + \frac{\lambda}{\mu_1} (x_1 - 1) (1 - e^{-\mu_1 t}) + \frac{\lambda}{\mu_2} (x_2 - 1) (1 - e^{-\mu_2 t}) + \dots + \frac{\lambda}{\mu_k} (x_k - 1) (1 - e^{-\mu_k t}) \right\}. \quad (5)$$

Если в (5) $t \rightarrow \infty$, то получим вид производящей функции для финального распределения вероятностей рассматриваемой системы.

Полученное выражение для производящей функции позволяет получить основные стационарные характеристики k -мерной цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке (подсистеме).

Математическое ожидание числа заявок в каждом блоке (подсистеме)

$$Mi_k = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_k} \bigg|_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1 \\ \dots \\ x_k=1}} = \frac{\lambda}{\mu_k}.$$

Дисперсия числа заявок в каждом блоке (подсистеме)

$$Di_k = \frac{\lambda}{\mu_k}.$$

Коэффициент корреляции

$$R_{ij} = \frac{\mu_i \times \mu_j}{\mu_i + \mu_j}.$$

Заключение

В настоящей работе были построена математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок в идее СМО с k блоками обслуживания. Проведено исследование, а именно, получены выражение для производящей функций и основные вероятностные характеристики k -мерной цепи Маркова, характеризующие число заявок в каждом блоке (подсистеме).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 4-е изд., испр. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.
2. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования: пер. с англ. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. 512 с.
3. Ивановская И.А., Моисеева С.П. Математическая модель параллельного обслуживания заявок в распределенных вычислительных системах // Сборник научных статей. Минск, 2010. Вып. 3. С. 123–128.
4. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
5. Чечельницкий А.А., Кучеренко О.В. Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком // Сборник научных статей. Минск, 2009. Вып. 2. С. 262–268.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

Жидкова Любовь Александровна

Моисеева Светлана Петровна

Томский государственный университет

E-mail: zhidkova@mail.ru; smoiseeva@mail.ru

Поступила в редакцию 19 августа 2011 г.