

УДК 519.21

А.М. Горцев, А.А. Калягин

ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок (событий), функционирующих в современных цифровых сетях интегрального обслуживания. Приводятся аналитические результаты по нахождению условной и безусловной вероятности ошибочного решения при решении задачи оптимальной оценки состояний обобщенного полусинхронного потока событий.

Ключевые слова: обобщенный полусинхронный поток событий, состояние потока, апостериорная вероятность состояния, оценка состояния, вероятность ошибки вынесения решения.

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1], в которой рассматривается задача оценки состояний обобщенного полусинхронного потока событий. Последний является одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок (событий), функционирующих в современных цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО) [2], и относится к классу дважды стохастических потоков событий с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным случайным процессом. Обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных МС-потоков событий) приведена в [1, 3, 4]. Вследствие этого оставляем за рамками данной статьи вопросы, связанные с классификацией дважды стохастических потоков событий и задачами, возникающими при их исследовании.

В [1] решена задача оптимальной оценки состояний (задача фильтрации интенсивности потока) обобщенного полусинхронного потока событий по наблюдениям за потоком в течение конечного интервала времени. В качестве критерия оптимальности в [1] используется критерий максимума апостериорной вероятности, обеспечивающий минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения о том или ином состоянии обобщенного полусинхронного потока событий [5]. Путем имитационного моделирования в [1] найдены (для определенного набора параметров) оценки безусловной вероятности ошибки вынесения решения. В связи с этим представляет интерес получить аналитические результаты, связанные с нахождением условной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения, чему и посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи

Рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток с инициированием дополнительных событий (далее обобщенный полусинхронный поток или просто поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_j$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_j ,

$j = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ ($0 \leq \delta \leq 1$) дополнительное событие в первом состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). Очевидно, что в сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий; $t_4, \dots$ – моменты инициирования дополнительных событий с вероятностью δ .

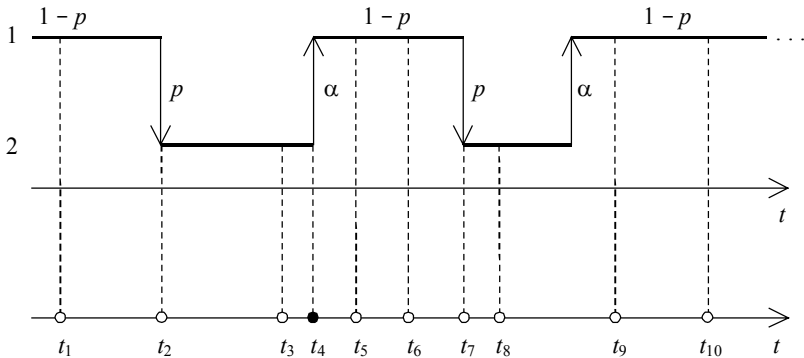


Рис. 1. Формирование обобщенного полусинхронного потока

Если $\delta = 0$, то имеет место обычный полусинхронный поток событий [6]. Так как процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots$, то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса (потока) $\lambda(t)$ в момент окончания наблюдений и определить возникающую при этом безусловную (или условную) вероятность ошибки вынесения решения.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на полуинтервале наблюдения $(t_0, t]$, где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Пусть $w(\lambda_j | t_1, \dots, t_m)$ – апостериорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_j$, $j = 1, 2$, m – количество наблюдаемых событий за время t , при этом $w(\lambda_1 | t_1, \dots, t_m) + w(\lambda_2 | t_1, \dots, t_m) = 1$. Вынесение решения о состоянии ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ (или потока) в момент времени t производится по критерию максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_1 | t_1, \dots, t_m) \geq w(\lambda_2 | t_1, \dots, t_m)$ ($w(\lambda_1 | t_1, \dots, t_m) \geq 1/2$), то оценка состояния процесса $\lambda(t)$ есть $\hat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\hat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

2. Вероятности ошибочного решения о состоянии обобщенного полусинхронного потока в общем случае

Рассмотрим полуинтервал $(t_0, t]$ наблюдения за обобщенным полусинхронным потоком, его длительность есть $t - t_0$. Зафиксируем момент времени t . Так как моменты наступления событий $t_1, \dots, t_i$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_i < t$), попавшие в интервал $(t_0, t]$, случайны, то случайна и разность $t - t_i$. Таким образом, момент вынесения решения t лежит между моментами времени t_i и t_{i+1} ($t_i < t < t_{i+1}$), при этом разность $t_{i+1} - t$ также случайна (момент времени t_{i+1} может быть, в принципе, сколь угодно большим). Итак, вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ привязано к интервалу между двумя соседними временными моментами наступления событий: (t_i, t_{i+1}) . Сам момент вынесения решения t можно трактовать как некоторую точку, случайным образом «падающую» на ось времени $0t$, никак не связанную с потоком событий. Вследствие этого точка t может попасть в любой интервал между соседними событиями обобщенного полусинхронного потока. При этом начало наблюдений, т.е. точка t_0 , однозначно определяется на оси времени $0t$. Момент начала наблюдений t_0 можно положить равным нулю ($t_0 = 0$).

Обозначим $\tau_i = t - t_i$. Следующее событие потока наступит в момент времени t_{i+1} ($t_{i+1} > t_i$). Тогда τ_i ограничено снизу нулем, сверху τ_i может быть, в принципе, неограниченным, т.е. $\tau_i \geq 0$. Обозначим $w(\lambda_1|t)$ – апостериорную вероятность того, что в момент вынесения решения t процесс $\lambda(t)$ принял значение λ_1 ($\lambda(t) = \lambda_1$), т.е. обобщенный полусинхронный поток в момент t находится в первом состоянии, при этом $t_i \leq t < t_{i+1}$ ($w(\lambda_2|t) = 1 - w(\lambda_1|t)$). С учетом введенного обозначения $w(\lambda_1|t) = w(\lambda_1|t_i + \tau_i)$, $\tau_i \geq 0$. В момент $t = t_i$ имеем $w(\lambda_1|t = t_i) = w(\lambda_1|t_i + 0)$. Так как τ_i привязано к моменту времени t_i наступления i -го события, то для простоты обозначим $w(\lambda_1|t_i + \tau_i) = w(\lambda_1|\tau_i)$, $\tau_i \geq 0$.

Остановимся на алгоритме принятия решения. Процесс $\lambda(\tau_i)$, $\tau_i \geq 0$, является ненаблюдаемым. В момент t_i наступления события значение процесса $\lambda(\tau_i = 0)$ может быть равным либо λ_1 , либо λ_2 . Вследствие этого в момент τ_i вынесения решения процесс $\lambda(\tau_i)$ может также принимать либо значение λ_1 ($\lambda(\tau_i) = \lambda_1$), либо значение λ_2 ($\lambda(\tau_i) = \lambda_2$). Тогда оценка $\hat{\lambda}(\tau_i)$ значения процесса $\lambda(\tau_i)$ в момент времени τ_i (получаемая по критерию максимума апостериорной вероятности) также может принимать либо значение λ_1 ($\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$), либо значение λ_2 ($\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$). При этом возможны следующие варианты: 1) если в момент времени τ_i значение процесса $\lambda(\tau_i) = \lambda_1$, то правильное решение ($\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$) будет приниматься, если $w(\lambda_1|\tau_i) \geq w(\lambda_2|\tau_i)$; если же $w(\lambda_1|\tau_i) < w(\lambda_2|\tau_i)$, то будет приниматься ошибочное решение (совершаться ошибка): $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$; 2) если в момент времени τ_i значение процесса $\lambda(\tau_i) = \lambda_2$, то правильное решение ($\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$) будет приниматься, если $w(\lambda_1|\tau_i) < w(\lambda_2|\tau_i)$; если же $w(\lambda_1|\tau_i) \geq w(\lambda_2|\tau_i)$, то будет приниматься ошибочное решение (совершаться ошибка): $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$.

Обозначим $w(\lambda(\tau_i), \tau_i)$ – распределение вероятностей значений двумерной смешанной случайной величины $(\lambda(\tau_i), \tau_i)$, здесь $\lambda(\tau_i)$ – значение дискретной случайной величины ($\lambda(\tau_i) = \lambda_j, j = 1, 2$), τ_i – значение непрерывной случайной величины ($\tau_i \geq 0$). Тогда уравнение $w(\lambda(\tau_i) = \lambda_1, \tau_i) = w(\lambda(\tau_i) = \lambda_2, \tau_i)$ определяет границу τ_i^0 критической области, в которой отклоняется гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$, а принимается

гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$ (либо, наоборот, отклоняется гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$, а принимается гипотеза $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_2$). Сам корень данного уравнения (если он существует и единственен) может быть меньше нуля ($\tau_i^0 < 0$), равен нулю ($\tau_i^0 = 0$) и может быть больше нуля ($\tau_i^0 > 0$). Кроме того, возможны ситуации, когда данное уравнение определяет некоторое множество корней. Расписывая в данном уравнении $w(\lambda(\tau_i) = \lambda_j, \tau_i)$, $j = 1, 2$, через безусловную плотность $w(\tau_i)$ и апостериорную вероятность $w(\lambda(\tau_i) = \lambda_j | \tau_i) = w(\lambda_j | \tau_i)$, приходим к следующему виду уравнения для границы τ_i^0 критической области:

$$w(\lambda_1 | \tau_i) = w(\lambda_2 | \tau_i) \quad (w(\lambda_1 | \tau_i) = 1/2), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Тогда, если $w(\lambda_1 | \tau_i) \geq w(\lambda_2 | \tau_i)$, то апостериорную вероятность $w(\lambda_1 | \tau_i)$ можно трактовать как условную вероятность вынесения правильного решения: $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$ при условии, что вынесение решения произведено в момент времени τ_i ($\tau_i \geq 0$). Апостериорную же вероятность $w(\lambda_2 | \tau_i)$ при этом можно трактовать как условную вероятность вынесения ошибочного решения (трактовать как условную вероятность ошибки): решение выносится в пользу $\hat{\lambda}(\tau_i) = \lambda_1$, хотя на самом деле имеет место $\lambda(\tau_i) = \lambda_2$. Аналогичная трактовка имеет место, если $w(\lambda_1 | \tau_i) < w(\lambda_2 | \tau_i)$.

В [1] сформулирован алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_i | \tau_i)$. При этом поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_i | \tau_i)$ на полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ между соседними наблюдававшимися событиями обобщенного полусинхронного потока определяется выражением

$$w(\lambda_1 | \tau_i) = \frac{w[1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)] - [w - w(\lambda_1 | t_i + 0)]e^{-b\tau_i}}{1 - w(\lambda_1 | t_i + 0) - [w - w(\lambda_1 | t_i + 0)]e^{-b\tau_i}}, \quad (2)$$

где $\tau_i = t - t_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots$; $b = \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0$, $w = (1 - \delta)/(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)$, $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta \neq 0$. В момент времени $\tau_i = t - t_i = 0$ апостериорная вероятность (2) претерпевает разрыв 1-го рода ($i = 1, 2, \dots$), поэтому в момент времени $\tau_i = 0$ имеет место формула пересчета

$$w(\lambda_1 | t_i + 0) = \frac{\alpha\delta + [(1 - p)\lambda_1 - \alpha\delta] w(\lambda_1 | t_i - 0)}{\lambda_2 + \alpha\delta + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)w(\lambda_1 | t_i - 0)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $w(\lambda_1 | t_i - 0)$ вычисляется по формуле (2), в которой, во-первых, вместо τ_i нужно подставить τ_{i-1} и, во-вторых, вычисления производить для $\tau_{i-1} = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Последнее реализует вычисление предела слева апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | \tau_i)$ в момент времени $\tau_i = 0$ (в момент t_i наступления события). В качестве начального значения $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0)$ в (2) выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$: $\pi_1 = \alpha/(\alpha + p\lambda_1)$, которая находится из уравнений $p\lambda_1\pi_1 - \alpha\pi_2 = 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$ [7].

Изучим поведение апостериорной вероятности $w(\lambda_i | \tau_i)$ как функции τ_i ($\tau_i \geq 0$). Производная функции (2) по τ_i примет вид

$$\frac{dw(\lambda_1 | \tau_i)}{d\tau_i} = \frac{b^2 [1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)] [w - w(\lambda_1 | t_i + 0)] e^{-b\tau_i}}{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) [1 - w(\lambda_1 | t_i + 0) - [w - w(\lambda_1 | t_i + 0)] e^{-b\tau_i}]^2}, \quad (4)$$

где b определена в (2), $w(\lambda_1 | t_i + 0)$ – в (3), $i = 0, 1, \dots$. Рассмотрим поведение производной (4) в зависимости от τ_i ($\tau_i \geq 0$). Из (2) вытекает: 1) если $b > 0$, то

$\lim w(\lambda_1 | \tau_i) = w$ при $\tau_i \rightarrow \infty$; 2) если $b < 0$, то $\lim w(\lambda_1 | \tau_i) = 1$ при $\tau_i \rightarrow \infty$. При этом знак производной (4) определяется знаком величин $a_1 = \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta$ и $a_2 = w - w(\lambda_1 | t_i + 0)$: 1) если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то $dw(\lambda_1 | \tau_i)/d\tau_i > 0$, и апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | \tau_i)$ – возрастающая функция переменной τ_i , стремящаяся к w снизу при $\tau_i \rightarrow \infty$; 2) если $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, то $dw(\lambda_1 | \tau_i)/d\tau_i > 0$, и $w(\lambda_1 | \tau_i)$ – возрастающая функция переменной τ_i , стремящаяся к единице снизу при $\tau_i \rightarrow \infty$; 3) если $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, то $dw(\lambda_1 | \tau_i)/d\tau_i < 0$, и $w(\lambda_1 | \tau_i)$ – убывающая функция переменной τ_i , стремящаяся к w сверху при $\tau_i \rightarrow \infty$. Случай $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ невозможен.

Таким образом, апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | \tau_i)$ – монотонная функция переменной τ_i и уравнение (1) имеет либо единственный корень τ_i^0 ($\tau_i^0 < 0$, $\tau_i^0 \geq 0$), либо корень τ_i^0 не существует. Подставляя (2) в (1) и решая полученное уравнение относительно τ_i , находим

$$\tau_i^0 = \frac{1}{b} \ln \frac{w(\lambda_1 | t_i + 0) - w}{(1 - 2w)[1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Выражение (5) определяет границу критической области τ_i^0 и в зависимости от значений величин b , a_1 , δ , w , $w(\lambda_1 | t_i + 0)$ возможны различные варианты положения τ_i^0 на временной оси.

Случай 1. $b > 0$, $a_1 > 0$, $0 \leq \delta \leq 1$. Тогда $0 \leq w \leq 1$, $\lim w(\lambda_1 | \tau_i) = w$ при $\tau_i \rightarrow \infty$.

1.1. $0 \leq w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq w \leq 1/2$. Тогда корень τ_i^0 не существует, при этом условная вероятность ошибки, обозначим ее (здесь и далее) $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$, определится в виде

$$P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = w(\lambda_1 | \tau_i), \quad \tau_i \geq 0. \quad (6)$$

1.2. $0 \leq w < w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq 1/2$. Тогда $\tau_i^0 \leq 0$ и условная вероятность ошибки определится формулой (6).

1.3. $0 \leq w < 1/2 < w(\lambda_1 | t_i + 0) < 1$. Тогда $\tau_i^0 > 0$ и условная вероятность ошибки определится в виде

$$P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = \begin{cases} 1 - w(\lambda_1 | \tau_i), & 0 \leq \tau_i \leq \tau_i^0; \\ w(\lambda_1 | \tau_i), & \tau_i > \tau_i^0. \end{cases} \quad (7)$$

1.4. $0 \leq w < 1/2 < w(\lambda_1 | t_i + 0) = 1$. Тогда корень τ_i^0 не существует и $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = 0$, $\tau_i \geq 0$.

1.5. $0 \leq w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq 1/2 < w < 1$. Тогда корень $\tau_i^0 \geq 0$ и условная вероятность ошибки определится в виде

$$P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = \begin{cases} w(\lambda_1 | \tau_i), & 0 \leq \tau_i < \tau_i^0; \\ 1 - w(\lambda_1 | \tau_i), & \tau_i \geq \tau_i^0. \end{cases} \quad (8)$$

1.6. $1/2 < w(\lambda_1 | t_i + 0) < w < 1$. Тогда корень $\tau_i^0 < 0$ и условная вероятность ошибки определится в виде

$$P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = 1 - w(\lambda_1 | \tau_i), \quad \tau_i \geq 0. \quad (9)$$

1.7. $1/2 < w \leq w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq 1$. Тогда корень τ_i^0 не существует и условная вероятность ошибки определится формулой (9).

Случай 2. $b < 0$, $a_1 > 0$, $0 \leq \delta < \delta^*$ ($\delta^* = (\lambda_1 - \lambda_2)/\alpha < 1$). Тогда $w > 1$, $\lim w(\lambda_1 | \tau_i) = 1$ при $\tau_i \rightarrow \infty$.

2.1. $0 \leq w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq 1/2$. Тогда корень $\tau_i^0 \geq 0$ и условная вероятность ошибки определится (8).

2.2. $1/2 < w(\lambda_1 | t_i + 0) < 1$. Тогда корень $\tau_i^0 < 0$ и условная вероятность ошибки определится (9).

2.3. $w(\lambda_1 | t_i + 0) = 1$. Тогда корень τ_i^0 не существует и $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = 0, \tau_i \geq 0$.

Случай 3. $b < 0, a_1 < 0, \delta^* < \delta \leq 1$. Тогда $w \leq 0, \lim w(\lambda_1 | \tau_i) = 1$ при $\tau_i \rightarrow \infty$.

3.1. $0 \leq w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq 1/2$. Тогда корень $\tau_i^0 \geq 0$ и условная вероятность ошибки определяется (8).

3.2. $1/2 < w(\lambda_1 | t_i + 0) < 1$. Тогда корень $\tau_i^0 < 0$ и условная вероятность ошибки определится (9).

3.3. $w(\lambda_1 | t_i + 0) = 1$. Тогда корень τ_i^0 не существует и $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = 0, \tau_i \geq 0$.

Формулы (2), (3), (5) – (9) позволяют сформулировать алгоритм расчета условной вероятности вынесения ошибочного решения $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ в любой момент времени $\tau_i \geq 0, i = 0, 1, \dots$:

1) в момент времени $t_0 = 0$ задается $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = w(\lambda_1 | t_0 = 0) = \pi_1$;

2) по формуле (5) для $i = 0$ рассчитывается τ_i^0 , тем самым устанавливается положение границы критической области на временной оси;

3) находится один из 13 вышеизложенных возможных вариантов: 1.1 – 1.7, 2.1 – 2.3, 3.1 – 3.3;

4) для найденного варианта рассчитывается (с использованием формулы (2)) вероятность $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ в любой момент времени $\tau_i (0 \leq \tau_i < t_{i+1} - t_i)$; при этом для вариантов 1.3, 1.5, 2.1, 3.1 может выполняться либо $0 \leq \tau_i^0 \leq t_{i+1} - t_i$, либо $\tau_i^0 > t_{i+1} - t_i$;

5) по формуле (2) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 | \tau_i)$ в момент времени $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, т.е. $w(\lambda_1 | t_{i+1} - 0)$; затем по формуле (3) производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени t_{i+1} , т.е. находится $w(\lambda_1 | t_i + 0)$; i увеличивается на единицу и алгоритм переходит на шаг 2) и т.д.

Здесь подчеркнем, что в силу формулы пересчета (3) значение $w(\lambda_1 | t_i + 0)$ зависит от всех моментов $t_1, \dots, t_i$ наступления событий в потоке, т.е. вся предыдущая информация сосредоточена в вероятности $w(\lambda_1 | t_i + 0)$. Вследствие этого для нахождения безусловной вероятности ошибки необходимо усреднить условную вероятность ошибки $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ по моментам наступления событий $t_1, \dots, t_i$. Однако найти в явном виде функцию распределения вероятностей моментов $t_1, \dots, t_i$ наступления событий в обобщенном полусинхронном потоке представляется затруднительным или вообще невозможным. Как будет видно ниже, определить безусловную вероятность ошибки возможно только для некоторых частных и особых случаев.

3. Частные случаи

Представляет интерес рассмотреть частные случаи соотношения параметров $\lambda_i, i = 1, 2, \alpha, \delta$.

1. $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0, 0 \leq \delta < 1$. Тогда $a_1 = \alpha(1 - \delta) > 0, w = 1$. При этом [1]

$$w(\lambda_1 | \tau_i) = \frac{w(\lambda_1 | t_i + 0) + \alpha(1 - \delta)[1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]\tau_i}{1 + \alpha(1 - \delta)[1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]\tau_i}, \tau_i \geq 0, i = 0, 1, \dots; \quad (10)$$

$$w(\lambda_1 | t_i + 0) = \frac{\alpha\delta + [(1 - p)\lambda_1 - \alpha\delta]w(\lambda_1 | t_i - 0)}{\lambda_1 - \alpha(1 - \delta)[1 - w(\lambda_1 | t_i - 0)]}, i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Подставляя (10) в (1), находим границу критической области

$$\tau_i^0 = \frac{2[1/2 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]}{\alpha(1-\delta)[1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Тогда, если $w(\lambda_1 | t_i + 0) > 1/2$, то $\tau_i^0 < 0$ и $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ определяется формулой (9); если $w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq 1/2$, то $\tau_i^0 \geq 0$ и $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ определяется формулой (8).

2. $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta = 0$. Отсюда следует, что равенство нулю достигается для $\delta^* = (\lambda_1 - \lambda_2)/\alpha$, при этом $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha < 0$. Тогда [1]

$$w(\lambda_1 | \tau_i) = 1 - [1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)] e^{(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)\tau_i}, \quad \tau_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots;$$

$$w(\lambda_1 | t_i + 0) = (1/\lambda_1)[\lambda_1 - \lambda_2 + (\lambda_2 - p\lambda_1)w(\lambda_1 | t_i - 0)], \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Подставляя (13) в (1), находим границу критической области

$$\tau_i^0 = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha} \ln \{2[1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]\}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Тогда, если $w(\lambda_1 | t_i + 0) > 1/2$, то $\tau_i^0 < 0$ и $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ определяется формулой (9); если $w(\lambda_1 | t_i + 0) \leq 1/2$, то $\tau_i^0 \geq 0$ и $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ определяется формулой (8).

4. Особые случаи

Рассмотрим особые случаи соотношения параметров λ_i , $i = 1, 2$, p , α , δ , для которых возможно вычисление безусловной вероятности ошибки.

1. $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = (1-\delta)p\lambda_1$, $0 \leq \delta < 1$. Тогда $a_1 = (1-\delta)(\alpha + p\lambda_1)$, $w = \pi_1 = \alpha/(\alpha + p\lambda_1)$. При этом [1]

$$w(\lambda_1 | \tau_i) = \frac{\pi_1[1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)] - [\pi_1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]e^{-(1-\delta)p\lambda_1\tau_i}}{1 - w(\lambda_1 | t_i + 0) - [\pi_1 - w(\lambda_1 | t_i + 0)]e^{-(1-\delta)p\lambda_1\tau_i}}, \quad \tau_i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Так как $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$, то из (14) следует, что $w(\lambda_1 | \tau_0) = \pi_1$ для $0 \leq \tau_0 \leq t_1 - t_0$, т.е. $w(\lambda_1 | t_1 - 0) = \pi_1$. Тогда из (3) вытекает, что $w(\lambda_1 | t_1 + 0) = \pi_1$ и т.д. Таким образом, имеем $w(\lambda_1 | \tau_i) = \pi_1$, $\tau_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots$. Последнее говорит о том, что при таком соотношении параметров информация о моментах наступления событий $t_1, \dots, t_m$ не оказывает влияния на апостериорную вероятность $w(\lambda_1 | \tau_i)$, т.е. в конечном итоге не влияет на качество оценивания состояний процесса $\lambda(t)$. Решение о том или ином состоянии обобщенного полусинхронного потока выносится на основании априорных данных. При этом вероятность $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = \pi_2$, если $\pi_1 \geq \pi_2$, либо $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i) = \pi_1$, если $\pi_1 < \pi_2$, $i = 0, 1, \dots$, так что в данном особом случае $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ является безусловной вероятностью ошибочного решения.

2. $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0$, $\delta = 1$. Тогда [1] $w(\lambda_1 | \tau_i) = \text{const}$, $\tau_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots$. Формула пересчета (3) при этом примет вид

$$w(\lambda_1 | t_i + 0) = (1/\lambda_1) \{ \alpha + [(1-p)\lambda_1 - \alpha] w(\lambda_1 | t_i - 0) \}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Так как $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1$, то $w(\lambda_1 | t) = \pi_1$ для $t_0 \leq t < t_1$. Таким образом, и для $t = t_1$ получаем $w(\lambda_1 | t_1 - 0) = \pi_1$. Подставляя $\pi_1 = \alpha/(\alpha + p\lambda_1)$ в (15), находим $w(\lambda_1 | t_1 + 0) = \pi_1$ и т.д. Таким образом, имеем $w(\lambda_1 | \tau_i) = \pi_1$, $\tau_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots$. Здесь так же, как и в особом случае 1, отсутствует зависимость апостериорной вероятности от моментов наступления событий $t_1, \dots, t_m$ и решение о том или ином состоянии потока выносится на основании априорных данных аналогично особому случаю 1.

3. $p = 1$, $\delta = 0$. Тогда $a_1 = \lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $w = \alpha/(\lambda_1 - \lambda_2)$. При этом формула пересчета (3) приобретает вид

$$w(\lambda_1 | t_i + 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Подставляя (16) в (2), находим (для любых $i = 1, 2, \dots$)

$$w(\lambda_1 | \tau) = \frac{w - we^{-b\tau}}{1 - we^{-b\tau}}, \quad \tau \geq 0. \quad (17)$$

В (17) имеют место следующие ситуации:

1) если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha > 0$, то $0 < w < 1$ и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} w(\lambda_1 | \tau) = w$ при $\tau \rightarrow \infty$;

2) если $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha < 0$, то $w > 1$ и $\lim_{\tau \rightarrow \infty} w(\lambda_1 | \tau) = 1$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Для начального полуинтервала изменения t : $t_0 \leq t < t_1$, справедлива формула (2), в которой $i = 0$ и $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha/(\alpha + \lambda_1)$.

Из (16), (17) вытекает, что апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | \tau)$ не зависит от предыстории, т.е. полусинхронный ($\delta = 0$) поток событий в данном случае является рекуррентным потоком.

Подставляя (17) в (1) находим границу критической области τ_i^0 для любого полуинтервала $[t_i, t_{i+1})$ $i = 1, 2, \dots$, в виде

$$\tau_i^0 = (1/b) \ln[w/(2w-1)]. \quad (18)$$

Для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ граница критической области τ_i^0 определяется в (5), где $i = 0$ и вместо $w(\lambda_1 | t_0 + 0)$ нужно подставить π_1 .

Из (18) следует: 1) если $0 < w \leq 1/2$, то корень τ_i^0 не существует и условная вероятность ошибки, обозначим ее $P_o^{(1)}(\tau)$, определится в виде

$$P_o^{(1)}(\tau) = w(\lambda_1 | \tau), \quad \tau \geq 0; \quad (19)$$

2) если $w \geq 1/2$, то $\tau_i^0 > 0$ и

$$P_o^{(2)}(\tau) = \begin{cases} w(\lambda_1 | \tau), & 0 \leq \tau < \tau_i^0; \\ 1 - w(\lambda_1 | \tau), & \tau \geq \tau_i^0. \end{cases} \quad (20)$$

Для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ условная вероятность ошибки $P_o(\pi_1, \tau_0)$ в зависимости от значений величин π_1 , w , b , a_1 , δ определится одной из формул (6) – (9).

Для нахождения безусловной вероятности ошибки P_o необходимо знать плотность вероятностей длительности интервала (t_i, t_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots$, которому принадлежит момент вынесения решения t . В силу того, что момент вынесения решения есть некоторая точка, случайным образом падающая на ось времени, то тогда плотность вероятностей $w(\tau)$ длительности интервала (t_i, t_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots$, в который попала точка t , для рекуррентных потоков определится в виде [8]

$$w(\tau) = \tau p(\tau) / E(\tau), \quad E(\tau) = \int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где $p(\tau)$ – плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями рекуррентного полусинхронного потока событий. Можно показать [6], что

$$p(\tau) = \gamma \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} + (1 - \gamma)(\alpha + \lambda_2) e^{-(\alpha + \lambda_2) \tau}, \quad \gamma = -\alpha/(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha), \quad \tau \geq 0. \quad (22)$$

Тогда, подставляя (22) в (21), находим

$$w(\tau) = A_1 \tau e^{-\lambda_1 \tau} + A_2 \tau e^{-(\alpha + \lambda_2) \tau}, \quad \tau \geq 0,$$

$$A_1 = -\frac{\lambda_1^2 \alpha (\alpha + \lambda_2)}{(\alpha + \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)}, \quad A_2 = \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) (\alpha + \lambda_2)^2}{(\alpha + \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha)}. \quad (23)$$

Учитывая (17), (19), (23), получаем выражение для безусловной вероятности ошибки $P_o^{(1)}$ (для ситуации $0 < w \leq 1/2$) в виде

$$P_o^{(1)} = \int_0^\infty w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) d\tau,$$

$$f(\tau) = w[(A_1 - A_2)e^{-\lambda_1 \tau} - A_1 e^{-(\lambda_1 + b)\tau} + A_2 e^{-(\alpha + \lambda_2)\tau}] \frac{\tau}{1 - w e^{-b\tau}}, \quad (24)$$

где A_1, A_2 определены в (23), w определена в (17), b – в (2).

Для ситуации $w \geq 1/2$ с учетом формул (17), (20), (23) находим

$$P_o^{(2)} = \int_0^{\tau^0} w(\tau) w(\lambda_1 | \tau) d\tau + \int_{\tau^0}^\infty w(\tau) [1 - w(\lambda_1 | \tau)] d\tau =$$

$$= \frac{A_1}{\lambda_1} (\tau^0 + \frac{1}{\lambda_1}) e^{-\lambda_1 \tau^0} + \frac{A_2}{\alpha + \lambda_2} (\tau^0 + \frac{1}{\alpha + \lambda_2}) e^{-(\alpha + \lambda_2) \tau^0} + \int_0^{\tau^0} f(\tau) d\tau - \int_{\tau^0}^\infty f(\tau) d\tau, \quad (25)$$

где τ^0 определена в (18), A_1, A_2 – в (23), $f(\tau)$ – в (24). Интегралы, входящие в (24) и (25), могут быть вычислены только численно.

Для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ безусловная вероятность ошибки $P_o^{(0)}$ находится аналогично нахождению безусловных вероятностей ошибок $P_o^{(1)}$ и $P_o^{(2)}$, при этом та или иная формула для $P_o^{(0)}$ выписывается в зависимости от значений величин π_1, w, b, a_1, δ . Например, если реализуется подслучай 1.6 раздела 2, то

$$P_o^{(0)} = \int_0^\infty w(\tau) [1 - w(\lambda_1 | \tau)] d\tau,$$

где $w(\lambda_1 | \tau) = w(\lambda_1 | \tau_0)$, последняя определена формулой (2), в которой $w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (\alpha + \lambda_1)$.

4. $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0, p = 1, \delta = 0$. Тогда $a_1 = \lambda_1 - \lambda_2 > 0, w = 1$. В этом случае для апостериорной вероятности $w(\lambda_1 | \tau_i)$ реализуются формулы (10), (11). Подставляя в них $p = 1, \delta = 0$, находим (11) в виде (16), а (10) (для любых $i, i = 1, 2, \dots$) в виде

$$w(\lambda_1 | \tau) = \alpha \tau / (1 + \alpha \tau), \quad \tau \geq 0. \quad (26)$$

Для начального полуинтервала изменения $t: t_0 \leq t < t_1$ справедлива формула (10), в которой $i = 0, w(\lambda_1 | t_0 + 0) = \pi_1 = \alpha / (\alpha + \lambda_1), \delta = 0$.

Из (16), (26) вытекает, что (аналогично особому случаю 3) апостериорная вероятность $w(\lambda_1 | \tau)$ не зависит от предыстории, т.е. и здесь полусинхронный ($\delta = 0$) поток событий является рекуррентным потоком.

Граница критической области (12) при этом (для любых $i, i = 1, 2, \dots$) примет вид

$$\tau^0 = 1/\alpha. \quad (27)$$

Из (27) следует, что $\tau^0 > 0$ и условная вероятность ошибки $P_o(\tau)$ (так как $w = 1$) определяется формулой

$$P_o(\tau) = \begin{cases} w(\lambda_1 | \tau), & 0 \leq \tau < \tau^0; \\ 1 - w(\lambda_1 | \tau), & \tau \geq \tau^0. \end{cases} \quad (28)$$

Для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ из (10) и (12) вытекает, что

$$w(\lambda_1 | \tau) = \frac{\pi_1 + \alpha(1 - \pi_1)\tau}{1 + \alpha(1 - \pi_1)\tau}, \quad \tau^0 = \frac{2(1/2 - \pi_1)}{\alpha(1 - \pi_1)}. \quad (29)$$

Тогда: 1) если $\pi_1 > 1/2$, то $\tau^0 < 0$ и условная вероятность ошибки определится в виде

$$P_o^{(1)}(\tau) = 1 - w(\lambda_1 | \tau), \quad \tau \geq 0; \quad (30)$$

2) если $\pi_1 \leq 1/2$, то $\tau^0 \geq 0$ и условная вероятность ошибки определится в виде (20).

Можно показать, что для рассматриваемого особого случая плотность вероятностей $p(\tau)$, аналогичная (22), выпишется в виде

$$p(\tau) = (\lambda_2 + \alpha\lambda_1\tau)e^{-\lambda_1\tau}, \quad \tau \geq 0. \quad (31)$$

Тогда, подставляя (31) в (21), находим

$$w(\tau) = A\tau(\lambda_2 + \alpha\lambda_1\tau)e^{-\lambda_1\tau}, \quad A = \lambda_1^2 / (2\alpha + \lambda_2), \quad \tau \geq 0. \quad (32)$$

Учитывая (26), (28), (32), получаем выражение для безусловной вероятности ошибки:

$$\begin{aligned} P_o &= \int_0^{\tau^0} w(\tau)w(\lambda_1 | \tau)d\tau + \int_{\tau^0}^{\infty} w(\tau)[1 - w(\lambda_1 | \tau)]d\tau = \\ &= A\alpha \int_0^{\tau^0} \tau\varphi(\tau)d\tau + A \int_{\tau^0}^{\infty} \varphi(\tau)d\tau, \quad \varphi(\tau) = \tau(\lambda_2 + \alpha\lambda_1\tau)(1 + \alpha\tau)^{-1}e^{-\lambda_1\tau}, \end{aligned} \quad (33)$$

где τ^0 определяется в (27), A – в (32).

Для начального полуинтервала $[t_0, t_1)$ аналогично находится безусловная вероятность ошибки $P_o^{(0)}$. Например, принимая во внимание (29), (30) и (32), получаем

$$P_o^{(0)} = \int_0^{\infty} w(\tau)[1 - w(\lambda_1 | \tau)]d\tau = \frac{\lambda_1}{\alpha(2\alpha + \lambda_2)} \left[-\alpha + 2(\alpha + \lambda_1)e^{\beta} \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right], \quad \beta = \frac{\alpha + \lambda_1}{\alpha}. \quad (34)$$

5. Результаты численных расчётов

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления условной вероятности ошибки $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ для общего случая, а также для частных и особых случаев. Программа расчета реализована на языке программирования Borland C++, Builder 6. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование обобщенного полусинхронного потока событий. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Второй этап расчета – непосредственное вычисление условной вероятности ошибки $P_o(w(\lambda_1 | t_i + 0), \tau_i)$ по формулам (6) – (9). Расчеты произведены для общего случая и для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 0,8$; $\lambda_2 = 0,1$; $\alpha = 0,2$; $\delta = 0,3$; $p = 0,2$ и времени моделирования $T = 20$ ед. времени. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория (верхняя часть рис. 2) случайного процесса $\lambda(t)$, полученная путем имитационного моделирования (истинное поведение ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$), где 1, 2 – состояния процесса $\lambda(t)$, и траектория (нижняя часть рис. 2) оценки $\hat{\lambda}(t)$, получен-

ной по критерию максимума апостериорной вероятности, где 1,2 – состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,001$. На рис. 2 штриховкой на оси времени обозначены временные промежутки, на которых оценка состояния не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$ (область ошибочных решений). На рис. 3 приведена траектория поведения апостериорной вероятности $w(\lambda_i|\tau_i)$, $i = 0,1,\dots$, соответствующая полученной при имитационном моделировании последовательности моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots$. На рис. 4 приведена траектория условной вероятности ошибки $P_o(w(\lambda_i|\tau_i + 0), \tau_i)$, $i = 0,1,\dots$, соответствующая той же последовательности моментов наступления событий.

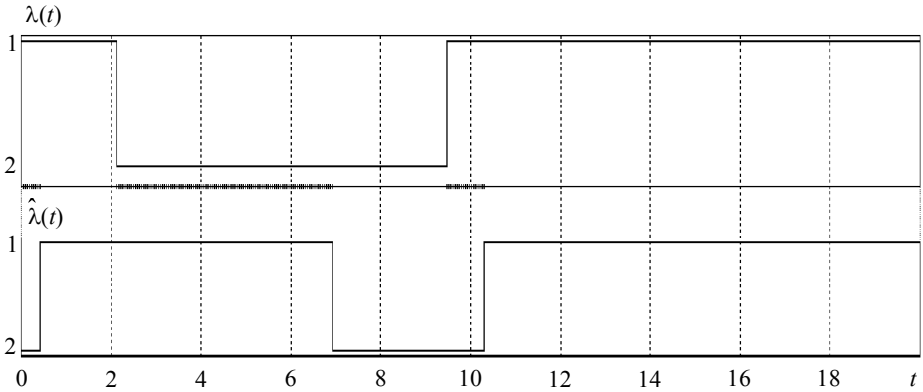


Рис 2. Траектория процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$

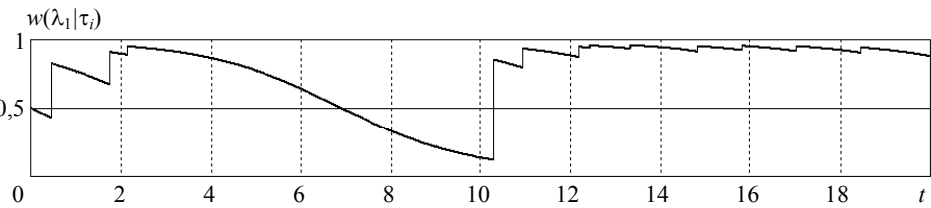


Рис 3. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_i|\tau_i)$

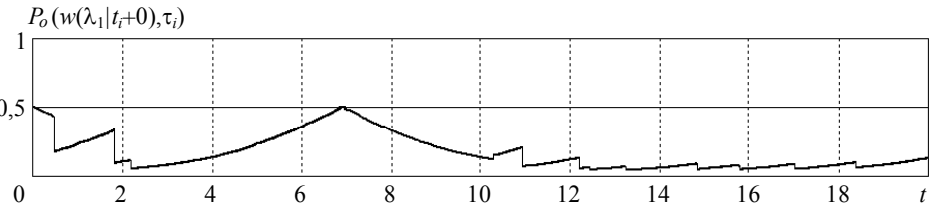


Рис 4. Траектория условной вероятности ошибки $P_o(w(\lambda_i|\tau_i + 0), \tau_i)$

Таким образом, предложенный алгоритм осуществляет оценку состояния процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t и одновременно с этим же моментом времени вычисляет условную вероятность сделанной при вынесении решения ошибки.

Для особых случаев рассчитаны безусловные вероятности ошибки по формулам (24), (25), (33), (34), приведенные в табл. 1 – 4.

Таблица 1

Результаты расчета безусловной вероятности ошибки

λ_1	0,61	0,62	0,63	0,64	0,66	0,67	0,68	0,69	0,7
$P_o^{(1)}$	0,209	0,174	0,149	0,13	0,115	0,104	0,094	0,086	0,079

Таблица 2

Результаты расчета безусловной вероятности ошибки

λ_1	0,61	0,62	0,63	0,64	0,66	0,67	0,68	0,69	0,7
$P_o^{(2)}$	0,145	0,142	0,139	0,136	0,131	0,129	0,126	0,124	0,122

Таблица 3

Результаты расчета безусловной вероятности ошибки

λ_1	0,11	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,91
λ_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
P_o	0,155	0,087	0,061	0,047	0,038	0,032	0,027	0,024	0,022

Таблица 4

Результаты расчета безусловной вероятности ошибки

λ_1	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12	0,13
λ_2	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,11	0,12
$P_o^{(0)}$	0,269	0,26	0,254	0,25	0,246	0,244	0,242	0,24	0,239

В первой строке табл. 1 – 4 указаны значения изменяемого параметра λ_1 . Во второй строке табл. 3, 4 указаны значения изменяемых параметров λ_2 , а соответственно. В последней строке всех таблиц указаны значения безусловной вероятности ошибки.

В табл. 1 вероятность $P_o^{(1)}$ рассчитана по формуле (24) для $\lambda_2 = 0,6$; $\alpha = 0,04$; в табл. 2 вероятность $P_o^{(2)}$ – по формуле (25) для $\lambda_2 = 0,6$; $\alpha = 0,05$; в табл. 3 вероятность P_o – по формуле (33) для $\alpha = 0,01$ и в табл. 4 вероятность $P_o^{(0)}$ – по формуле (34) для $\alpha = 0,01$.

Поведение безусловных вероятностей ошибок в зависимости от изменяемых параметров согласуется с физическими представлениями.

Заключение

Предложенный алгоритм оптимального оценивания состояний обобщенного полусинхронного потока событий осуществляет оценку состояний по результатам текущих наблюдений за потоком. Параллельно с этим в момент оценки состояния потока вычисляется условная вероятность ошибки вынесения решения.

Для особых случаев, когда поток событий является рекуррентным, выражения безусловной вероятности ошибки выписаны в явном виде. Последнее позволяет до начала наблюдений определить, при заданном наборе параметров, значение безусловной вероятности ошибки, не привлекая методов имитационного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66 – 81.
2. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 С.
3. Горцев А.М., Леонова М.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. №1(10). С. 33 – 47.
4. Горцев А.М., Зуев В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. №2(11). С. 44 – 65.
5. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256с.
6. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлеваемом мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. №1. С. 31 – 41.
7. Нежелская Л.А. Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы Четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: Изд-во БГУ, 1998. С. 18 – 21.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 383с.

Горцев Александр Михайлович

Калягин Алексей Андреевич

Томский государственный университет

E-mail: amg@fpmk.tsu.ru redall@inbox.ru

Поступила в редакцию 31 октября 2011 г.

Gortsev Alexander M., Kalyagin Aleksey A. (Tomsk State University). The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized semi-synchronous flow of events.

Keywords: generalized semi-synchronous flow of events, flow state, posterior probability of state, state estimation, the probability of wrong decision.

Generalized semi-synchronous flow of events which intensity is piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two states λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, Poisson flow of events takes place with the intensity λ_i , $i = 1, 2$. Transition from the first state of the process $\lambda(t)$ into the second one is possible only at the moment of event occurrence, thus, the transition is carried out with probability p ($0 < p \leq 1$); with probability $1 - p$ process $\lambda(t)$ remains in the first state. In this case the duration of process stay $\lambda(t)$ in the first state is a random variable with exponential distribution function $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Transition from the second state of process into the first state can be carried out at any moment of time. Thus, duration of process stay $\lambda(t)$ in the second condition is distributed in accordance with the exponential law: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. The process of transition $\lambda(t)$ from the second state into the first initiates with probability δ ($0 \leq \delta \leq 1$) additional event in the first state.

We solve the problem of finding the unconditional (or conditional) probability of error decision. The algorithm for calculating the conditional probability of wrong decisions $P_o(w|\lambda_i|t_i + 0)$, τ_i) at any time $\tau_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots$ (general case) is proposed. For the particular and special cases of relations between flow parameters the unconditional probability of wrong decision is found.