

УДК 519.865

К.И. Лившиц, Я.С. Бублик

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОГО ВРЕМЕНИ ДО РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ПРИ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПОТОКАХ СТРАХОВЫХ ПРЕМИЙ И СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТ¹

Найдена производящая функция моментов условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и выплат и малой нагрузке страховой премии.

Ключевые слова: *условное время до разорения, вероятность разорения, дважды стохастический поток, нагрузка страховой премии*

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [1], в которой было получено выражение для вероятности разорения страховой компании на бесконечном временном интервале при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат и малой нагрузке страховой премии. Однако более исчерпывающей характеристикой деятельности компании является распределение условного времени до ее разорения при условии, что разорение происходит [2]. Через распределение условного времени до разорения может быть выражена, в частности, вероятность разорения на конечном временном интервале. В настоящей работе находится производящая функция моментов условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат и малой нагрузке страховой премии.

1. Математическая модель страховой компании

Итак, будем считать, что интенсивность потока страховых премий $\lambda(t)$ является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и m состояниями $\lambda(t) = \lambda_i$ [3]. Переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $A = [\alpha_{ij}]$ ранга $m-1$. Таким образом, переход из состояния i в состояние j за малое время Δt имеет вероятность

$$\begin{aligned} P_{ij}(\Delta t) &= \alpha_{ij}\Delta t + o(\Delta t), i \neq j; \\ P_{ii}(\Delta t) &= 1 + \alpha_{ii}\Delta t + o(\Delta t), i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где $\alpha_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} = 0. \quad (1)$$

Обозначим $P_i(t) = P\{\lambda(t) = \lambda_i\}$, $i = \overline{1, m}$. Если управляющая цепь является нераз-

¹ Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2011 гг.), проект № 2.1.2/11803 и гранта РФФИ № 11-01-90713-моб. ст.

ложимой, то существуют финальные вероятности

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t),$$

которые являются решением системы уравнений

$$\sum_{j=1}^m \pi_j \alpha_{ji}; \quad (2)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m = 1. \quad (3)$$

Обозначим, далее, через λ_0 среднюю интенсивность потока страховых премий в стационарном режиме

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^m \pi_i \lambda_i. \quad (4)$$

Будем считать, что страховые премии являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\varphi(x)$, средним значением $M\{x\} = a$ и моментами $M\{x^k\} = a_k$, $k = 2, 3$.

Будем считать, что интенсивность потока страховых выплат $\mu(t)$ также является однородной цепью Маркова с непрерывным временем и n состояниями интенсивности $\mu(t) = \mu_i$. Переход из состояния в состояние задается матрицей инфинитезимальных характеристик $B = [\beta_{ij}]$ ранга $n-1$, где $\beta_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ и

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} = 0. \quad (5)$$

Обозначим через ρ_j – финальные вероятности состояний μ_j . Величины ρ_j являются решениями системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n \rho_j \beta_{ji} = 0; \quad (6)$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n = 1. \quad (7)$$

Обозначим через μ_0 среднюю интенсивность потока страховых выплат

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i \mu_i. \quad (8)$$

Будем считать, что страховые выплаты являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения $\psi(x)$, средним значением $M\{x\} = b$ и моментами $M\{x^k\} = b_k$, $k = 2, 3$.

Наконец, будем считать, что с начала функционирования страховой компании прошло какое-то время, имеются застрахованные риски, потоки страховых премий и страховых выплат не зависят друг от друга.

Пусть $\bar{S}(t)$ – средний капитал компании в момент времени t . Как показано в [1],

$$\bar{S}(t) = S(0) + (\lambda_0 a - \mu_0 b)t + \sum_{i=1}^m \lambda_i a \int_0^t (P\{\lambda(t) = \lambda_i\} - \pi_i) dt - \sum_{i=1}^n \mu_i b \int_0^t (P\{\mu(t) = \mu_i\} - \rho_i) dt. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что при $t \gg 1$ капитал компании в среднем монотонно возрастает, если

$$\lambda_0 a = (1 + \theta) \mu_0 b, \quad (10)$$

где $\theta > 0$. При $\theta < 0$ компания разоряется. Параметр θ , как и в классической модели [4], – нагрузка страховой премии.

2. Производящие функции условного времени

Пусть $(\Omega, F, \mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}, P)$ – вероятностное пространство, на котором определены траектории процесса $S(t)$ изменения капитала компании. Пусть в начальный момент времени капитал компании равен s и значения интенсивностей $\lambda(t) = \lambda_i$ и $\mu(t) = \mu_j$. Разобьем все возможные траектории процесса $S(t)$, выходящие из этой точки, на два класса: $\{S_\omega(t), \omega \in \Omega_{ij}(s)\}$ – траектории, приводящие к разорению, и $\{S_\omega(t), \omega \in \bar{\Omega}_{ij}(s)\}$ – траектории, приводящие к выживанию. Пусть $t_{ij}(s, \omega)$ – время до разорения на траектории, приводящей к разорению. Обозначим

$$\Phi_{ij}(s, u) = \int_{\Omega_{ij}(s)} e^{-ut_{ij}(s, \omega)} P(d\omega) \quad (11)$$

и пусть

$$G_{ij}(s) = \int_{\bar{\Omega}_{ij}(s)} P(d\omega) \quad (12)$$

– вероятность разорения на бесконечном интервале при условии, что в начальный момент времени капитал равен s и интенсивности потоков равны λ_i и μ_j . Тогда

$$\Phi_{ij}(s, u) = \frac{\Phi_{ij}(s, u)}{G_{ij}(s)} \quad (13)$$

есть производящая функция моментов условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен s и интенсивности потоков равны λ_i и μ_j .

Функции $\Phi_{ij}(s, u)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\Phi_{ij}(s, 0) = G_{ij}(s), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi_{ij}(s, u) = 0, \quad (14)$$

второе из которых вытекает из того, что при $s \rightarrow \infty$ область интегрирования в (11) $\Omega_{ij}(s) \rightarrow \emptyset$.

Пусть $F_{ij}(t, s)$ – функция распределения условного времени до разорения при условии, что в начальный момент времени капитал равен s и интенсивности по-

токов равны λ_i и μ_j . Если $P_{ij}(s, t)$ – вероятность разорения страховой компании за время t , то

$$P_{ij}(s, t) = F_{ij}(s, t) G_{ij}(s),$$

так как для разорения за время, не превосходящее t , компания должна разориться и время до разорения должно быть не больше, чем t . Поэтому определение любой из вероятностей $P_{ij}(s, t)$ или $F_{ij}(t, s)$ определяет и вторую вероятность.

Для вывода уравнений, которым должны удовлетворять функции $\Phi_{ij}(s, u)$, рассмотрим два соседних момента времени t и $t + \Delta t$. Пусть в момент времени t капитал компании равен s , интенсивность $\lambda = \lambda_i$, интенсивность $\mu = \mu_j$. За время Δt капитал компании изменится на величину Δs и

$$t_{ij}(s, \omega) = \Delta t + t_{pq}(s + \Delta s, \omega), \quad (15)$$

где номер p соответствует значению интенсивности $\lambda(t)$, а номер q – значению интенсивности $\mu(t)$ в момент времени $t + \Delta t$. Усредняя соотношение (15), будем иметь

$$\Phi_{ij}(s, u) = e^{-u\Delta t} M_{\Delta s, p, q} \{ \Phi_{p, q}(s + \Delta s, u) \}. \quad (16)$$

При принятой модели за время Δt могут произойти следующие события:

1. С вероятностью $(1 - \lambda_i \Delta t)(1 - \mu_j \Delta t)(1 + \alpha_{ii} \Delta t)(1 + \beta_{jj} \Delta t) + o(\Delta t)$ страховые премии не поступают, страховые выплаты не производятся, интенсивности потоков не меняются.
2. С вероятностью $\lambda_i \Delta t \varphi(x) dx + o(\Delta t)$ поступает страховая премия размера x , выплаты не производятся, интенсивности потоков не меняются.
3. С вероятностью $\mu_j \Delta t \psi(x) dx + o(\Delta t)$ производится страховая выплата размера x , страховые премии не поступают, интенсивности потоков не меняются.
4. С вероятностью $\alpha_{ik} \Delta t + o(\Delta t)$ интенсивность потока страховых премий изменяется с λ_i на λ_k , страховые выплаты не производятся, страховые премии не поступают.
5. С вероятностью $\beta_{jk} \Delta t + o(\Delta t)$ интенсивность потока страховых выплат изменяется с μ_j на μ_k , страховые выплаты не производятся, страховые премии не поступают.

Остальные события имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, получим из (16)

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(s, u) = & (1 - u\Delta t) [(1 - (\lambda_i + \mu_j) \Delta t + (\alpha_{ii} + \beta_{jj}) \Delta t) \Phi_{ij}(s, u) + \\ & + \lambda_i \Delta t \int_0^\infty \Phi_{ij}(s + x, u) \varphi(x) dx + \mu_j \Delta t \int_0^s \Phi_{ij}(s - x, u) \psi(x) dx + \\ & + \mu_j \Delta t \int_s^\infty \psi(x) dx + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} \Delta t \Phi_{kj}(s, u) + \sum_{k \neq j} \beta_{jk} \Delta t \Phi_{ik}(s, u) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где учтено, что при $s < 0$ $t_{ij}(s, u) = 0$. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu_j + u) \Phi_{ij}(s, u) = & \lambda_i \int_0^\infty \Phi_{ij}(s+x, u) \varphi(x) dx + \\ & + \mu_j \int_0^s \Phi_{ij}(s-x, u) \psi(x) dx + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \Phi_{kj}(s, u) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \Phi_{ik}(s, u) + \mu_j \int_s^\infty \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

3. Производящие функции условного времени при малой нагрузке страховой премии

Получить точное решение систем уравнений (17) не удастся. Поэтому рассмотрим далее асимптотический случай, когда нагрузка страховой премии $\theta \ll 1$. Решение системы уравнений (17) будем искать в виде

$$\Phi_{ij}(s, u) = A(u, \theta) f_{ij}\left(\theta s, \frac{u}{\theta^2}, \theta\right), \quad (18)$$

где $A(u, \theta)$ и $f_{ij}(z, u, \theta)$ – некоторые пока не определенные функции. В силу произвольности функции $A(u, \theta)$ можно считать, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \pi_i \rho_j f_{ij}(0, u, \theta) = 1. \quad (19)$$

Также будем считать, что функции $f_{ij}(z, u, \theta)$ по крайней мере дважды дифференцируемы по z и равномерно непрерывны по u и θ , а также, что существует конечный предел

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} A(\theta^2 u, \theta) \neq 0.$$

Подставляя (18) в уравнения (17) и сделав замены переменных $\theta s = z$, $\frac{u}{\theta^2} = \omega$, получим уравнения относительно функций $f_{ij}(z, \omega, \theta)$

$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu_j + \omega \theta^2) f_{ij}(z, \omega, \theta) = & \lambda_i \int_0^\infty f_{ij}(z+\theta x, \omega, \theta) \varphi(x) dx + \\ & + \mu_j \int_0^\infty f_{ij}(z-\theta x, \omega, \theta) \psi(x) dx + \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} f_{kj}(z, \omega, \theta) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f_{ik}(z, \omega, \theta) + R(\theta), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где} \quad R(\theta) = \mu_j \int_{\frac{z}{\theta}}^\infty f_{ij}(z-\theta x, \omega, \theta) \psi(x) dx + \frac{\mu_j}{A(\theta^2 \omega, \theta)} \int_{\frac{z}{\theta}}^\infty \psi(x) dx. \quad (21)$$

Оценим поведение $R(\theta)$ при $\theta \ll 1$. Имеем

$$\frac{1}{\theta^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^\infty \psi(x) dx = \frac{1}{z^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^\infty \frac{z^3}{\theta^3} \psi(x) dx \leq \frac{1}{z^3} \int_{\frac{z}{\theta}}^\infty x^3 \psi(x) dx \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0,$$

так как по условию $M\{x^3\} = b_3$ существует. Так как $f_{ij}(z, \theta)$ считается дифференцируемой и, следовательно, ограниченной, то аналогично ведет себя и второе слагаемое. Поэтому $R(\theta) = o(\theta^3)$ и в дальнейшем это слагаемое учитываться не будет.

Обозначим

$$f_{ij}(z, \omega) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f_{ij}(z, \omega, \theta). \quad (22)$$

Переходя в (20) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, получим, что

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} f_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} f_{ik}(z, \omega) = 0.$$

Как показано в [1], отсюда можно получить, что

$$f_{ij}(z, \omega) = f(z, \omega) \quad \forall i, j, \quad (23)$$

где $f(z, \omega)$ – неизвестная пока функция.

Представим теперь функции $f_{ij}(z, \omega, \theta)$ в виде

$$f_{ij}(z, \omega, \theta) = f(z, \omega) + A_i(z, \omega)\theta + o(\theta). \quad (24)$$

Подставляя разложения (24) в уравнения (20), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами разложения, имеющими порядок θ , получим, что

$$\theta \left[\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} A_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} A_{ik}(z, \omega) \right] + \theta(\lambda_i a - \mu_j b) f'(z, \omega) + o(\theta) = 0. \quad (25)$$

Наконец, с учетом (10)

$$\lambda_i a - \mu_j b = (\lambda_i - \lambda_0) a - (\mu_j - \mu_0) b + \mu_0 b \theta.$$

Переходя в (61) к пределу при $\theta \rightarrow 0$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} A_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} A_{ik}(z, \omega) = -[(\lambda_i - \lambda_0) a - (\mu_j - \mu_0) b] f'(z, \omega). \quad (26)$$

Представим теперь функции $f_i(z, v, \theta)$ в виде

$$f_{ij}(z, \omega, \theta) = f(z, \omega) + A_{ij}(z, \omega)\theta + B_{ij}(z, \omega)\theta^2 + o(\theta^2). \quad (27)$$

Подставляя разложения (27) в уравнения (20), раскладывая $f(z \pm \theta x)$, $A_{ij}(z \pm \theta x)$, $B_{ij}(z \pm \theta x)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами, имеющими порядок θ^2 , получим, учитывая (26), что при $\theta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} B_{kj}(z, \omega) + \sum_{k=1}^n \beta_{jk} B_{ik}(z, \omega) + \frac{\lambda_i a_2 + \mu_j b_2}{2} f''(z) + \mu_0 b f'(z, \omega) + \\ + [(\lambda_i - \lambda_0) a - (\mu_j - \mu_0) b] A'_{ij}(z, \omega) = \omega f(z, \omega). \end{aligned} \quad (28)$$

Умножая соотношения (28) на π_i и ρ_j , суммируя и учитывая (2), (6), получим

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0 a_2 + \mu_0 b_2}{2} f''(z, \omega) + \mu_0 b f'(z, \omega) - \omega f(z, \omega) + \sum_{i=1}^m \pi_i (\lambda_i - \lambda_0) a \sum_{j=1}^n \rho_j A'_{ij}(z, \omega) - \\ - \sum_{j=1}^n \rho_j (\mu_j - \mu_0) b \sum_{i=1}^m \pi_i A'_{ij}(z, \omega) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Обозначим

$$V_i(z, \omega) = \sum_{j=1}^n \rho_j A_{ij}(z, \omega), \quad i = \overline{1, m}.$$

$$U_j(z, \omega) = \sum_{i=1}^m \pi_i A_{ij}(z, \omega), \quad j = \overline{1, n}.$$

Из соотношений (26), учитывая (2), (4) и (6), (8), умножая уравнения системы на π_i и ρ_j соответственно и суммируя, получим, что функции $U_j(z, \omega)$ и $V_i(z, \omega)$ удовлетворяют системам уравнений

$$\sum_{k=1}^n \beta_{jk} U_k(z, \omega) = (\mu_j - \mu_0) b f'(z, \omega) \quad (30)$$

и
$$\sum_{k=1}^m \alpha_{ik} V_k(z, \omega) = -(\lambda_i - \lambda_0) a f'(z, \omega). \quad (31)$$

Рассмотрим систему уравнений (30). Ранг матрицы $[\beta_{jk}]$ равен $n-1$. Перепишем систему (30) в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \beta_{jk} U_k(z, \omega) = -\beta_{jn} U_n(z, \omega) + (\mu_j - \mu_0) b f'(z, \omega).$$

Откуда
$$U_k(z, \omega) = U_n(z, \omega) + \sum_{k=1}^{n-1} Q_{kj} (\mu_j - \mu_0) b f'(z, \omega), \quad (32)$$

где
$$Q = [Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n-1,1} & \cdots & \beta_{n-1,n-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (33)$$

Аналогично,
$$V_k(z, \omega) = V_m(z, \omega) - \sum_{j=1}^{m-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) a f'(z, \omega), \quad (34)$$

где
$$R = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m-1,1} & \cdots & \alpha_{m-1,m-1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (35)$$

Подставляя соотношения (32) и (34) в (29), получим уравнение на функцию $f(z, \omega)$

$$A_1 f''(z, \omega) + A_2 f'(z, \omega) - \omega f(z, \omega) = 0, \quad (36)$$

где

$$A_1 = \frac{\lambda_0 a_2 + \mu_0 b_2}{2} - a^2 \sum_{k=1}^{m-1} \pi_k (\lambda_k - \lambda_0) \sum_{j=1}^{m-1} R_{kj} (\lambda_j - \lambda_0) -$$

$$- b^2 \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k (\mu_k - \mu_0) \sum_{j=1}^{n-1} Q_{kj} (\mu_j - \mu_0), \quad (37)$$

$$A_2 = \mu_0 b.$$

Откуда

$$f(z, \omega) = U_1(\omega) e^{x_1(\omega)z} + U_2(\omega) e^{x_2(\omega)z},$$

где

$$x_1(\omega) = \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 + 4A_1\omega}}{2A_1}, \quad x_2(\omega) = \frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1\omega}}{2A_1} \quad (38)$$

– корни характеристического уравнения дифференциального уравнения (36).

В работе [1] было доказано, что постоянная $A_1 > 0$. Поэтому $U_2(\omega) = 0$. Наконец, из условия (19) получаем, что $U_1(\omega) = 1$. Таким образом,

$$f(z, \omega) = e^{\frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 + 4A_1\omega}}{2A_1} z} \quad (39)$$

и

$$\Phi_{ij}(s, u) = A(u, \theta) e^{x_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right)\theta s} + O(\theta). \quad (40)$$

При выводе соотношения (40) неявно предполагалось, что в уравнениях (20) $s \neq 0$. Для определения функции $A(u, \theta)$ рассмотрим теперь уравнения (20) при $s = 0$. Умножая уравнения системы (20) на π_i и ρ_j и складывая уравнения, при $s = 0$ будем иметь

$$(\lambda_0 + \mu_0 + u)A(u, \theta) = \lambda_0 A(u, \theta) \int_0^\infty e^{x_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right)\theta x} \varphi(x) dx + \mu_0. \quad (41)$$

Откуда

$$A(u, \theta) = \frac{\mu_0}{(\lambda_0 + \mu_0 + u) - \lambda_0 \int_0^\infty e^{x_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right)\theta x} \varphi(x) dx}. \quad (42)$$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$\Phi_{ij}(s, u) = \frac{\mu_0 e^{x_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right)\theta s}}{(\lambda_0 + \mu_0 + u) - \lambda_0 \int_0^\infty e^{x_1\left(\frac{u}{\theta^2}\right)\theta x} \varphi(x) dx} + O(\theta). \quad (43)$$

Из соотношений (43) и (14) можно получить теперь ранее вычисленное [1] выражение для вероятностей разорения на бесконечном интервале при $\theta \ll 1$

$$G_{ij}(s) = \frac{\mu_0 e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta s}}{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta x} \varphi(x) dx}. \quad (44)$$

Моменты условного времени до разорения определяются соотношениями

$$t_{ij}^k(s) = \frac{(-1)^k \partial^k \Phi_{ij}(s, u)}{G_{ij}(s) \partial u^k} \Big|_{u=0}. \quad (45)$$

Вычисляя производные, получим, что при $\theta \ll 1$ среднее значение условного времени

$$t_{ij}^1(s) = \frac{1}{\theta A_2} \left(s + \frac{\lambda_0 a}{\mu_0} \right) + O(1). \quad (46)$$

Дисперсия условного времени

$$D_{ij}(s) = \frac{2A_1}{\theta^3 A_2^3} \left(s + \frac{\lambda_0 a}{\mu_0} \right) + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right). \quad (47)$$

4. Плотность распределения условного времени при неограниченно возрастающем начальном капитале

Будем теперь считать, что при $\theta \rightarrow 0$ начальный капитал компании $s \rightarrow \infty$.

Более точно, будем считать, что $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta s(\theta) = \infty$, но $\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{\frac{3}{2}} s(\theta) = 0$. Обозначим

$$m = \frac{1}{\theta A_2}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{2A_1}{\theta^3 A_2^3}}$$

и введем величину

$$z = \frac{t - ms}{\sigma \sqrt{s}}.$$

Производящая функция величины z

$$\varphi_{i,j,z}(u, s) = e^{\frac{mus}{\sigma \sqrt{s}}} \varphi_{i,j}\left(\frac{u}{\sigma \sqrt{s}}, s\right),$$

или

$$\varphi_{i,j,z}(u, z) = \frac{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{A_2}{A_1} \theta x} \varphi(x) dx}{\lambda_0 + \mu_0 + \frac{u}{\sigma \sqrt{s}} - \lambda_0 \int_0^{\infty} e^{x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{s}} \right) \theta x} \varphi(x) dx} e^{\frac{A_2}{A_1} \theta s + x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{s}} \right) \theta s + \frac{m}{\sigma} \sqrt{s} u}. \quad (48)$$

Обозначим $\gamma = \sqrt{\frac{A_2}{2A_1}}$. Тогда

$$e^{\frac{A_2}{A_1} \theta s + \frac{m}{\sigma} \sqrt{s} u + x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{s}} \right) \theta s} = e^{2\gamma^2 \theta s + \gamma u \sqrt{\theta s} + x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{s}} \right) \theta s}. \quad (49)$$

Далее,

$$x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{s}} \right) = -\frac{A_2}{2A_1} = -\gamma^2 - \gamma^2 \sqrt{1 + \frac{2u}{\gamma \sqrt{\theta s}}} =$$

$$= -\gamma^2 \left[2 + \frac{u}{\gamma \sqrt{\theta s}} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{\gamma^2 \theta s} + \frac{1}{2\gamma^3} \frac{u^3}{\theta s \sqrt{\theta s}} + o \left(\frac{1}{\theta s \sqrt{\theta s}} \right) \right].$$

Поэтому

$$e^{2\gamma^2 \theta s + \gamma u \sqrt{\theta s} + x_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{s}} \right) \theta s} = e^{\frac{1}{2} u^2 - \frac{u^3}{2\gamma \sqrt{\theta s}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{\theta s}} \right)}.$$

Наконец, при $\theta \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$ отношение

$$\frac{\lambda_0 + \mu_0 - \lambda_0 \int_0^\infty e^{-2\gamma^2 \theta x} \varphi(x) dx}{\lambda_0 + \mu_0 + \frac{u}{\sigma \sqrt{s}} - \lambda_0 \int_0^\infty e^{\chi_1 \left(\frac{u}{\theta^2 \sigma \sqrt{s}} \right) \theta x} \varphi(x) dx} \rightarrow 1.$$

Положив $u = j\omega$, получим, при $\theta \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \varphi_z(j\omega, s) = e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

т.е. распределение условного среднего времени до разорения при условии, что разорение происходит, сходится к нормальному распределению.

Заключение

В работе найдена производящая функция условного времени до разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат и дополнительном предположении о малости нагрузки страховой премии. Предложенная методика может быть использована для анализа других моделей страхования при условии, что нагрузка страховой премии считается малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц К.И., Бублик Я.С. Вероятность разорения страховой компании при дважды стохастических потоках страховых премий и страховых выплат // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 64–73.
2. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. 180 с.
3. Наумов В.А. Марковские модели потоков требований // Системы массового обслуживания и информатика. М.: УДН, 1978. С. 67–73.
4. Panjer H.Y., Willmont G.E. Insurance Risk Models. Society of Actuaries, 1992. 442 p.

Лившиц Климентий Исаакович

Томский государственный университет

Бублик Яна Сергеевна

Филиал Кемеровского государственного университета

в г. Анжеро-Судженске

E-mail: kim47@mail.ru; yana@asf.ru

Поступила в редакцию 8 ноября 2011 г.

Livshits Klimeniy I., Public Yana S. (Tomsk State University. Anjero-Sudjensk branch of the Kemerovo State University). **Distribution of the conditional time to ruin of an insurance company under double stochastic insurance premium and insurance payment flows.**

Keywords: conditional time to ruin, probability of the ruin over a finite interval, double stochastic flow, relative security loading.

The generating function for the moments of the conditional time to ruin of an insurance company provided that ruin has happened is evaluated for the situation when the intensities of the insurance premiums and the insurance payments flows are the homogeneous Markov chains with the continuous time and the relative security loading θ is small.

Let s be the initial capital of an insurance company. It is shown that the conditional time to ruin has the asymptotical normal distribution if $\theta s(\theta) \rightarrow \infty$, but $\theta^{\frac{3}{2}} s(\theta) \rightarrow 0$ as $\theta \rightarrow 0$.