ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012 Управление, вычислительная техника и информатика № 1(18)

УДК 336:51

Г.А. Медведев

О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДОХОДНОСТИ. 1. МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА

Исследуются свойства таких характеристик временной структуры процентных ставок, как кривые доходности и форвардные ставки, в случае, когда используется аффинная модель доходности. В отличие от известных подходов анализируются не только однофакторные, но и многофакторные модели. Кроме того, рассматривается не только диапазон коротких и средних сроков погашения активов, но и длительные сроки. При этом в качестве временной переменной предлагается использовать дюрацию безрисковой ставки. Это дает возможность сравнения кривых доходности и форвардных кривых на всем интервале изменения сроков погашения активов.

Ключевые слова: *процентные ставки доходности*, *аффинная модель*, *кривая доходности*, *форвардная кривая*, *модель Васичека.*

В последние годы много внимания уделяется исследованию временной структуры процентных ставок (т.е. зависимости процентных ставок доходности от срока до погашения свободных от неуплаты ценных бумаг) и относящихся к ней таких величин, как номинальная кривая доходности и форвардная кривая. Эта зависимость играет важную роль при определении стоимости долговых инструментов и финансовых производных от процентных ставок [1, с. 137; 2, с. 9], исследовании влияния налогообложения и ликвидности на цены облигаций [3, с. 1540; 4, с. 617]. Временная структура процентных ставок используется также при управлении риском (см. например, технологию RiskMetrics [5]), где используются методы генерирования спот-ставок, по которым конструируется матрица ковариации, а также при разработке монетарной стратегии, когда ожидаемые ставки разделяются на краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные [6, с. 27]. Известна также попытка формализовать связь между кривой доходности и реальной экономической активностью. На основании этой связи выводятся формулы для временной структуры процентных ставок. При этом временная структура олицетворяет рыночные ожидания об изменениях макроэкономической основы – роста реального совокупного продукта экономики, что позволяет использовать рыночные данные об облигациях для предсказания роста внутреннего валового продукта в промышленных странах [7, с. 6].

Временной структурой, интересной для практиков и исследователей, является номинальная кривая доходности, представляющая доходность до погашения на номинальные облигации (т.е. облигации, продающиеся по номинальной стоимости и имеющие купоны с такой же доходностью). Определение номинальной кривой доходности основывается на наблюдении находящихся в обращении государственных ценных бумаг, только что проданных на аукционе и наиболее ликвидных. Эти ценные бумаги в странах с развитой экономикой выпускаются для 10 начальных сроков погашения 0,25, 0,5, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20 и 30 лет. Они обычно продаются по номинальной стоимости и их доходности называются доходностями номинальных облигаций. Определение временной структуры процентных ставок сводится к тому, что имея только 10 находящихся в обращении номинальных доходностей, непосредственно наблюдаемых на рынке, и используя другую информацию, содержащуюся в описании этих ценных бумагах, необходимо сконструировать функцию, позволяющую вычислять доходность для любого срока до погашения. Заметим, что имеются методы, не основанные на номинальной кривой доходности, такие, как метод кубических сплайнов [8, с. 21] и сглаживающий метод [9, с. 7].

1. Общие свойства многофакторных моделей временной структуры доходностей

Будем рассматривать номинальные облигации, продаваемые на аукционе в некоторый текущий момент времени t по цене $P(t, T, x)$, где T – дата погашения облигации, а $x = x(t)$ – в общем случае вектор переменных, характеризующих состояние финансового рынка на дату t, $t < T$. Считается, что облигация является свободной от неуплаты и на дату T погашается за 1 денежную единицу, т.е. цена $P(T, T, x) = 1$ для любых состояний $x(T)$.

Процентной ставкой доходности до погашения (или просто доходностью) называется величина

$$y(t,T,x) = \frac{-\ln P(t,T,x)}{T-t}.$$

Временной структурой доходности называют зависимость $y(t, T, x)$ от срока до погашения $T - t$. Именно она представляет интерес для инвесторов, заботящихся об эффективности своих инвестиций в будущем.

Краткосрочная процентная ставка доходности (или просто краткосрочная (*short*) ставка) определяется как предел

$$y(t,x) = \lim_{T\to t} \frac{-\ln P(t,T,x)}{T-t} = \left.\frac{\partial \ln P(t,T,x)}{\partial t}\right|_{T=t}. \quad (1)$$

Эта ставка различными авторами называется также спот (*spot*)-ставкой или безрисковой (*risk-free*) ставкой, поскольку она характеризует доходность в течение инфинитезимального интервала времени, на котором как бы ни изменялось состояния рынка оно «не успеет» стать рисковым.

Наряду со ставкой доходности до погашения, характеризующей доходность облигации за весь период ее активности, инвесторов интересуют доходности облигаций на некотором временном интервале между будущими датами T_1 и T_2 на основе информации о доходности, имеющейся в текущий момент времени t, $t < T_1 < T_2$. Такие ставки $f(t, T_1, T_2)$ называются форвардными. Форвардные ставки при $T_1 \to T_2 = T$ определяют краткосрочные ставки для будущих моментов времени T и называются мгновенными форвардными ставками $f(t, T, x)$. Именно они чаще интересуют инвесторов и словосочетание «форвардные ставки» обычно относится именно к $f(t, T, x)$. Форвардная ставка $f(t, T, x)$ определяется соотношением [10, с. 137]

$$f(t,T,x) = -\frac{\partial \ln P(t,T,x)}{\partial T}.$$

Между доходностью до погашения и форвардной ставкой имеется взаимно однозначные соотношения

$$y(t,T,x) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s,x)ds, \quad f(t,T,x) = y(t,T,x) + (T-t)\frac{\partial y(t,T,x)}{\partial T}.$$

Вектор состояния финансового рынка $X(t) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}}$ следует однородному по времени марковскому процессу, порождаемому стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t)$$

с n-вектором дрейфа $\mu(x)$, $(n\times m)$-матрицей волатильности $\sigma(x)$, и m-вектором $W(t)$ независимых стандартных винеровских процессов.

Предполагается, что функция $P(t, T, x)$ цены облигации дифференцируема по первому аргументу и дважды дифференцируема по третьему аргументу. Согласно стохастическому анализу Ито, цена облигации как функция времени $P(t, T, X(t)) \equiv$ $\equiv Z(t)$ тоже оказывается случайным процессом диффузионного типа и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dZ(t) = \mu_P(t, T, x)\,dt + \sigma_P(t, T, x)^{\mathrm{T}}dW(t),$$

где $\mu_P(t, T, x)$ и $\sigma_P(t, T, x)$ – скалярная функция дрейфа и m-вектор волатильности соответственно, определяемые соотношениями

$$\mu_P(t,T,x) = \frac{\partial P(t,T,x)}{\partial t} + \mu(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial P(t,T,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 P(t,T,x)}{\partial x^2}\sigma(x)\right),$$

$$\sigma_P(t,T,x)^{\mathrm{T}} = \sigma(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial P(t,T,x)}{\partial x}.$$

Уравнение для определения функции $P(t, T, x)$ находится из условия отсутствия на финансовом рынке арбитражных возможностей [11, с. 180], которое в рассматриваемом случае многофакторной модели сводится к тому, что должен существовать m-вектор $\lambda(t, x)$, не зависящий от даты погашения облигаций T, такой, чтобы выполнялось равенство $\mu_P(t, T, x) - y(x)P(t, T, x) = \sigma_P(t, T, x)^{\mathrm{T}}\lambda(t, x)$. Функция $\lambda(t, x)$ называется рыночной ценой риска. Таким образом, приходим к уравнению с частными производными для функции $P(t, T, x)$:

$$\frac{\partial P(t,T,x)}{\partial t} + \mu(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial P(t,T,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 P(t,T,x)}{\partial x^2}\sigma(x)\right) - y(x)P(t,T,x) =$$
$$= \lambda(t,x)^{\mathrm{T}}\sigma(x)^{\mathrm{T}}\frac{\partial P(t,T,x)}{\partial x}.$$

Это уравнение должно решаться с краевым условием $P(T, T, x) = 1$ для любых состояний x.

Тот факт, что марковский процесс $X(t)$ является однородным по времени, приводит к следующему свойству функции $P(t, T, x)$: она зависит не от t и T в отдельности, а только от разности $T - t$, т. е. не от текущего времени и даты погашения, а только от оставшегося срока до погашения $\tau = T - t$. Так что $P(t, T, x) \leftrightarrow P(\tau, x)$, при этом $y(t, x) \leftrightarrow y(x)$, $\lambda(t, x) \leftrightarrow \lambda(x)$. В литературе часто предполагают, что вектор дрейфа $\mu(x)$ и матрица диффузии $\sigma(x)\sigma(x)^{\mathrm{T}}$ состояний финансового рынка описываются аффинными функциями, а рыночные цены риска таковы, что $\sigma(x)\lambda(x)$ – n-вектор с аффинными компонентами,

$$\mu(x) = K(\theta - x),\ \sigma(x)\sigma(x)^{\mathrm{T}} = \alpha + \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i,\ \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^{n}\eta_i x_i.$$

Здесь K, α и β_i – $(n\times n)$-матрицы; θ, ξ и η_i – n-векторы, x_i – компоненты вектора x. Заметим, что указанные соотношения удовлетворяются при

$$\sigma(x) = \sigma\left\langle\sqrt{\gamma+\Gamma x}\right\rangle, \ \lambda(x) = \left\langle\sqrt{\gamma+\Gamma x}\right\rangle\lambda\,,$$

где γ, λ – m-векторы, σ – $(n\times m)$-матрица, Γ – $(m\times n)$-матрица, а $\left\langle\sqrt{\gamma+\Gamma x}\right\rangle$ – диагональная $(m\times m)$-матрица, по диагонали которой стоят квадратные корни компонент вектора $\gamma + \Gamma x$. В этом случае $\alpha = \sigma\langle\gamma\rangle\sigma^{\mathrm{T}}$, $\xi = \sigma\langle\gamma\rangle\lambda$, а элементы матрицы β_i и вектора η_i определяются равенствами

$$(\beta_i)_{kj} = \sum_{u=1}^{m}\sigma_{ku}\sigma_{ju}\Gamma_{ui}, \ 1 \le k, j \le n; \ (\eta_i)_k = \sum_{u=1}^{m}\sigma_{ku}\Gamma_{ui}\lambda_u, \ 1 \le k \le n.$$

Такие предположения приводят к аффинной временной структуре процентных ставок доходности. Перепишем уравнение для цены облигации $P(t, T, x)$ в этом случае:

$$-\frac{\partial P(\tau,x)}{\partial\tau} + (\theta - x)^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial P(\tau,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 P(\tau,x)}{\partial x^2}(\alpha + \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i)\right) - y(x)P(\tau,x) =$$

$$= (\xi + \sum_{i=1}^{n}\eta_i x_i)^{\mathrm{T}}\ \frac{\partial P(\tau,x)}{\partial x}. \qquad (2)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде $P(\tau, x) = \exp\{A(\tau) - x^{\mathrm{T}}B(\tau)\}$, где функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ удовлетворяют начальным условиям: $A(0) = 0$ и $B(0) = 0$. Заметим, что для цены облигации в таком виде краткосрочная процентная ставка (1) приобретает вид

$$y(x) = \lim_{\tau\to 0}\frac{-\ln P(\tau,x)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{x^{\mathrm{T}}B(\tau) - A(\tau)}{\tau} = x^{\mathrm{T}}\left.\frac{dB(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} - \left.\frac{dA(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} =$$

$$= x^{\mathrm{T}}B'(0) - A'(0), \qquad (3)$$

т.е. тоже является аффинной функцией вектора x. Штрих обозначает производную по τ. Заметим, что состояние финансового рынка обычно характеризуется значениями процентных ставок, иначе говоря, компонентами вектора x являются величины, имеющие смысл процентных ставок. Когда процентные ставки равны нулю, доходность облигации отсутствует, поэтому в выражении (3) следует положить $A'(0) = 0$. В дальнейшем это предположение будет приниматься во всех случаях. Обозначим $B'(0) = \phi$. Вектор ϕ можно рассматривать как вектор, составленный из весов, которые приписываются той или иной компоненте вектора состояния x при определении краткосрочной ставки

$$y(x) = x^{\mathrm{T}}\phi = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + \ldots + x_n\phi_n; \ \phi_i \ge 0, \ 1 \le i \le n; \ \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n = 1.$$

Подстановка решения $P(\tau, x) = \exp\{A(\tau) - x^{\mathrm{T}}B(\tau)\}$ в уравнение (2) для $P(t, T, x)$ приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau) = (B_1(\tau), B_2(\tau), \ldots, B_n(\tau))$:

$$A'(\tau) = (\xi - K\theta)^{\mathrm{T}}B(\tau) + B(\tau)^{\mathrm{T}}\alpha\, B(\tau)/2, \ A(0) = 0; \qquad (4)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^{\mathrm{T}}(\eta_i + K_i) - B(\tau)^{\mathrm{T}}\beta_i B(\tau)/2, \ B_i(0) = 0. \qquad (5)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i-й столбец матрицы K, $1 \le i \le n$.

Заметим, что как следует из вышеприведенных определений, в рамках аффинной структуры ставка доходности и форвардная ставка определяются соотношениями

$$y(\tau,x)=\frac{x^{\mathrm{T}}B(\tau)-A(\tau)}{\tau},\ \ f(\tau,x)=x^{\mathrm{T}}\frac{dB(\tau)}{d\tau}-\frac{dA(\tau)}{d\tau}\,; \tag{6}$$

$$y(\tau,x)=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}f(s,x)ds\,,\ \ f(\tau,x)=y(\tau,x)+\tau\frac{\partial\, y(\tau,x)}{\partial\,\tau}\,. \tag{7}$$

Функции $y(\tau,\ x)$ и $f(\tau,\ x)$, рассматриваемые как функции от переменной τ, обычно называются соответственно кривой доходности и форвардной кривой. Вид и свойства именно этих функций представляют интерес для инвесторов. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться явным аналитическим выражением этих функций и определением их свойств. Выясним вначале некоторые общие свойства.

Общим пределом обеих кривых на левом конце, т.е. при $\tau \to 0$, является краткосрочная процентная ставка доходности $y(x)$. Действительно, так как $A'(0) = 0$ и $B'(0) = \phi$,

$$y(x)=x^{\mathrm{T}}\phi=\lim_{\tau\to 0}y(\tau,x)=\lim_{\tau\to 0}f(\tau,x).$$

Для малых сроков погашения согласно (7) справедливы представления

$$y(\tau,x)=y(x)+\tau\left(\frac{\partial y(\tau,x)}{\partial\,\tau}\right)_{\tau=0}+o(\tau)\ ,f(\tau,x)=\ y(x)+2\tau\left(\frac{\partial y(\tau,x)}{\partial\,\tau}\right)_{\tau=0}+o(\tau).$$

Отсюда видно, что, стартуя из одной точки $y(x)$, кривые $y(\tau,\ x)$ и $f(\tau,\ x)$ с ростом τ расходятся. При этом форвардная кривая изменяется вдвое быстрее.

Если кривая доходности имеет экстремум для некоторого срока до погашения τ_*, т.е. $\left.\dfrac{\partial\, y(\tau,x)}{\partial\,\tau}\right|_{\tau=\tau_*}=0$, тогда форвардная ставка и ставка доходности для этого срока совпадают по величине $f(\tau_*,\ x) = y(\tau_*,\ x)$.

Отсюда следует общий вывод о том, что если кривая доходности имеет максимум (минимум) $y(\tau_*,\ x)$, то наибольшее (наименьшее) значение форвардной ставки f^* всегда больше (меньше) этого значения $y(\tau_*,\ x)$.

Для выяснения того, как кривые $y(\tau,\ x)$ и $f(\tau,\ x)$ ведут себя для длительных сроков погашения, требуется знать свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$. Однако решить уравнения для этих функций в общем случае не удается. Можно только сказать, что вектор $B(\tau)$ является решением многомерного уравнения Риккати. Если вектор $B(\tau)$ удается найти, то функция $A(\tau)$ находится просто интегрированием правой части уравнения для $A(\tau)$. Более детальные свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ можно выяснить только при конкретном задании K, α, β, η, θ и ξ. Однако используя некоторые ожидаемые свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$, можно выяснить ожидаемые свойства кривых $y(\tau,\ x)$ и $f(\tau,\ x)$. Состояние финансового рынка x может быть представлено набором ставок доходностей различных ценных бумаг [12, с. 392], следовательно, компоненты вектора x имеют смысл процентных ставок и являются неотрицательными. Компоненты вектора $B(\tau)$ поэтому имеют размерность времени и их можно рассматривать [13, с. 57; 14, с. 566] как соответствующую дюрацию, т.е. временной интервал, измеренный в определенном масштабе. Таким образом, можно ожидать, что компоненты вектора $B(\tau)$ неотрицательны и ограничены, т.е. для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ ожидается, что $0 < B_k(\tau) < +\infty$. Предположим, что пределы $B_k(\tau)$ при $\tau \to +\infty$ существуют и $\lim\limits_{\tau\to\infty} B(\tau) = B(\infty)$, $\|B(\infty)\| < \infty$. В этих условиях естественно ожидать, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} B'(\tau) = 0$. В этом случае вектор $B(\infty)$ можно определить из системы уравнений

$$\phi_i = B(\infty)^{\mathrm{T}}(\eta_i + K_i) + B(\infty)^{\mathrm{T}}\beta_i B(\infty)/2,\ 1 \le i \le n.$$

Поэтому имеют место следующие равенства:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{B(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{dB(\tau)}{d\tau} = 0,\quad \lim_{\tau\to\infty}\frac{A(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{dA(\tau)}{d\tau} = (\xi - K\theta)^{\mathrm{T}}B(\infty) + B(\infty)^{\mathrm{T}}\alpha\, B(\infty)/2.$$

Из равенств (6) также следует, что

$$y(\infty, x) = f(\infty, x) = (K\theta - \xi)^{\mathrm{T}}B(\infty) - B(\infty)^{\mathrm{T}}\alpha\, B(\infty)/2.$$

Таким образом, кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ совпадают для коротких сроков до погашения (при $\tau \to 0$), с увеличением τ кривые расходятся, но при продолжительных сроках (при $\tau \to \infty$) снова стремятся к одному и тому же пределу. Последнее свойство до сих пор не указывалось авторами, а кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ обычно изображаются расходящимися кривыми. В дальнейшем рассмотрим конкретные модели, обычно рассматриваемые в литературе, чтобы при помощи строгого исследования выяснить, оправдан ли приведенный умозрительный анализ.

2. Модель Васичека и ее обобщение на многомерный случай

В однофакторном случае в качестве состояния рынка принимается краткосрочная ставка $X(t) = r(t)$ и соответствующее стохастическое уравнение имеет вид

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t),$$

где k, θ, σ – скалярные константы, т.е. $K = k$, $\alpha = \sigma^2$, $\beta = 0$, $\eta = 0$, $\xi = \sigma\lambda$.

В этом случае также $y(r) = r$, т.е. $B'(0) = 1$. Уравнения (4) – (5) для определения функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ превращаются в следующие:

$$A'(\tau) = (\sigma\lambda - k\,\theta)\, B(\tau) + \sigma^2 B(\tau)^2/2,\ A(0) = 0,$$

$$B'(\tau) = 1 - k\,B(\tau),\ B(0) = 0.\ B(\tau) = (1 - \exp\{-k\tau\})\,/\,k.$$

Функция $B(\tau)$ имеет простой вид и является монотонно возрастающей функцией от 0 до $1/k$, $B(\infty) = 1/k$. Поскольку $B(\tau)$ – монотонная функция, определяющая дюрацию процентной ставки, она может быть использована в качестве аргумента в кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ вместо срока до погашения τ.

Преимущество такой замены заключается в том, что зависимость на всем интервале времени в виде графика представить невозможно из-за неограниченности интервала времени, $\tau \in (0, \infty)$, в то время как этому неограниченному интервалу соответствует конечный интервал изменения дюрации, $B(\tau) \in (0, 1/k)$. Тогда получим соответствия $y(\tau, r) \leftrightarrow Y(B, r)$, $f(\tau, r) \leftrightarrow F(B, r)$, $\tau = -\ln(1 - kB)/k$. При этом можно ожидать, что свойства функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ могут оказаться проще. На рис. 1 сравнение этих двух представлений кривой доходности и форвардной кривой иллюстрируется графиками для двухфакторной модели.

Аналитические выражения кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ как функций времени имеют вид (здесь аналитическое выражение функции $B(\tau)$ для краткости записи не выписывается)

$$y(\tau,r)=\frac{r}{\tau}B(\tau)-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left((\sigma\lambda-k\theta)B(s)+\frac{\sigma^2}{2}B(s)^2\right)ds =$$

$$=\left(\theta-\frac{\sigma\lambda}{k}-\frac{\sigma^2}{2k^2}\right)+\left(r-\theta+\frac{\sigma\lambda}{k}+\frac{\sigma^2}{2k^2}\right)\frac{B(\tau)}{\tau}+\frac{\sigma^2 B(\tau)^2}{4k\tau}\underset{\tau\to\infty}{\to}\theta-\frac{\sigma\lambda}{k}-\frac{\sigma^2}{2k^2}\equiv y(\infty),$$

$$y(\tau, r)= y(\infty)+(r-y(\infty))\frac{B(\tau)}{\tau}+\frac{\sigma^2}{4k}\frac{B(\tau)^2}{\tau},$$

$$f(\tau,r)=r(1-kB(\tau))-(\sigma\lambda-k\,\theta)\,B(\tau)-\sigma^2B(\tau)^2/2\underset{\tau\to\infty}{\to}\theta-\frac{\sigma\lambda}{k}-\frac{\sigma^2}{2k^2}=y(\infty).$$

В свою очередь, аналитические выражения для функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ получаются такими:

$$Y(B, r)= y(\infty)-(r-y(\infty))\frac{kB}{\ln(1-kB)}-\frac{\sigma^2}{4k^2}\frac{(kB)^2}{\ln(1-kB)}\underset{B\to1/k}{\to}y(\infty),$$

$$F(B,r)=r+[k(\theta-r)-\sigma\lambda]B-\sigma^2B^2/2\underset{B\to1/k}{\to}y(\infty).$$

Отсюда, в частности, видно, что функция $F(B, r)$ для любых значений параметров модели является вогнутой. Впервые этот факт был отмечен Брауном и Шейфером [14, с. 566] для однофакторных моделей.

В многофакторном случае уравнение для состояния рынка приобретает вид

$$dX(t) = K(\boldsymbol{\theta} - X(t))dt + \sigma dW(t).$$

Здесь считается, что матрица коэффициентов диффузии не зависит от состояния, $\gamma = \mathbf{1}$, $\Gamma = \mathbf{0}$. Поэтому $\alpha = \sigma\sigma^{\mathrm{T}}$, $\beta = 0$, $\eta = 0$, $\xi = \sigma\lambda$. При этих значениях параметров функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются из уравнений

$$A'(\tau) = (\sigma\lambda - K\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}B(\tau) + B(\tau)^{\mathrm{T}}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}B(\tau)/2,\ A(0) = 0,$$

$$B'(\tau) = \phi - K^{\mathrm{T}}B(\tau),\ B(0) = 0.$$

Обозначим через $U(\tau)$ фундаментальную матрицу решений однородного уравнения $B'(\tau) = -K^{\mathrm{T}}B(\tau)$. Тогда решение уравнения для функции $B(\tau)$ записывается в виде

$$B(\tau)=\int_0^\tau U(\tau-s)\,\phi\,ds$$

Матрицу $U(\tau)$ можно представить в виде матричного ряда

$$U(\tau)= e^{-K^{\mathrm{T}}\tau}\equiv I+(-K^{\mathrm{T}})\,\tau+(-K^{\mathrm{T}})^2\frac{\tau^2}{2!}\ldots+(-K^{\mathrm{T}})^n\frac{\tau^n}{n!}+\ldots,$$

где I – единичная матрица. Используя это разложение под интегралом, находим вектор $B(\tau)$:

$$B(\tau)=[I\tau+(-K^{\mathrm{T}})\frac{\tau^2}{2!}+\ldots+(-K^{\mathrm{T}})^n\frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots]\phi=(K^{-1})^{\mathrm{T}}(I-e^{-K^{\mathrm{T}}\tau})\phi.$$

Заметим, что для существования этого решения нужно, чтобы матрица K была невырожденной и ее собственные числа $\{\gamma_j\}$ были положительные. Нетрудно видеть, что в этом случае имеет место соотношение

$$B(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} B(\infty) = (K^{-1})^{\mathrm{T}}\phi.$$

Кривая доходности $y(\tau, x)$ и форвардная кривая $f(\tau, x)$ вычисляются по формулам

$$y(\tau, x) = x^{\mathrm{T}}\,\frac{B(\tau)}{\tau} - \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left((\sigma\lambda - K\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}} B(s) + \frac{1}{2} B(s)^{\mathrm{T}}\sigma\sigma^{\mathrm{T}} B(s)\right) ds\,, \qquad (8)$$

$$y(\tau, x) \underset{\tau\to\infty}{\to} y(\infty) = \theta^{\mathrm{T}}\phi - (K^{-1}\sigma\lambda)^{\mathrm{T}}\phi - \phi^{\mathrm{T}}(K^{-1}\sigma)(K^{-1}\sigma)^{\mathrm{T}}\phi/2;$$

$$f(\tau, x) = x^{\mathrm{T}}(\phi - K^{\mathrm{T}}B(\tau)) - (\sigma\lambda - K\theta)^{\mathrm{T}}B(\tau) - B(\tau)^{\mathrm{T}}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}B(\tau)/2, \qquad (9)$$

$$f(\tau, x) \underset{\tau\to\infty}{\to} y(\infty)\,.$$

Таким образом, ожидаемые свойства функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в рассматриваемом случае также подтверждаются. Однако для перехода от временной переменной τ к дюрации необходимо использовать только одну из компонент вектора $B(\tau)$. Для этого надо иметь больше информации о свойствах $B(\tau)$, т.е. о виде матрицы K. Для пояснения этого рассмотрим конкретный случай двухфакторной модели.

Предположим, что состояние рынка описывается не только краткосрочной ставкой, но также экспоненциально сглаженным ее средним значением [15, с. 398]. Состояние рынка $X(t)$ в этом случае характеризуется двумя компонентами, одной из которых $r(t)$ является наблюдаемая краткосрочная ставка, а другой $s(t)$ – экспоненциально сглаженное ее среднее значение. Уравнения состояния рынка приобретают вид

$$\begin{pmatrix} dr(t) \\ ds(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(\theta - r(t)) \\ k_2(r(t) - s(t)) \end{pmatrix} dt + \sigma dW(t).$$

Параметры модели в этом случае задаются соотношениями $\beta = 0$, $\eta = 0$,

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix},\ \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},\ \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$:

$$A'(\tau) = (\sigma_1\lambda_1 - k_1\theta)B_1(\tau) + \sigma_2\lambda_2 B_2(\tau) + \sigma_1^2 B_1(\tau)^2/2 + \sigma_2^2 B_2(\tau)^2/2,\ A(0) = 0;$$

$$B_1'(\tau) = \phi_1 - k_1 B_1(\tau) + k_2 B_2(\tau),\ B_1(0) = 0;$$

$$B_2'(\tau) = \phi_2 - k_2 B_2(\tau),\ B_2(0) = 0.$$

Функции $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ определяются выражениями

$$B_1(\tau) = (\phi_1 + \phi_2)\frac{1 - e^{-k_1\tau}}{k_1} - \phi_2\frac{e^{-k_2\tau} - e^{-k_1\tau}}{k_1 - k_2},\ B_2(\tau) = \phi_2\frac{1 - e^{-k_2\tau}}{k_2}. \qquad (10)$$

Подставляя эти выражения в равенства (8) и (9), получим явные выражения для кривой доходности $y(\tau, x)$ и форвардной кривой $f(\tau, x)$. К сожалению, поскольку количество параметров в рассматриваемом примере двухфакторной модели достаточно большое, выражения для функций $y(\tau, x)$ и $f(\tau, x)$ будут громоздкими. Для получения компактных выражений введем вспомогательные обозначения:

$$u = \frac{1}{k_1} - \frac{\phi_2}{k_1 - k_2},\ v = \frac{\phi_2}{k_1 - k_2},\ w = \frac{\phi_2}{k_2};$$

$$I_1(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (1 - e^{-k_1 t})dt = 1 - \frac{1}{k_1\tau}(1 - e^{-k_1\tau}),\ I_2(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (1 - e^{-k_2 t})dt = 1 - \frac{1}{k_2\tau}(1 - e^{-k_2\tau}),$$

$$I_3(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (1 - e^{-k_1 t})^2 dt = 1 - \frac{2}{k_1\tau}(1 - e^{-k_1\tau}) + \frac{1}{2k_1\tau}(1 - e^{-2k_1\tau}),$$

$$I_4(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (1 - e^{-k_2 t})^2 dt = 1 - \frac{2}{k_2\tau}(1 - e^{-k_2\tau}) + \frac{1}{2k_2\tau}(1 - e^{-2k_2\tau}),$$

$$I_5(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (1 - e^{-k_1 t})(1 - e^{-k_2 t})dt = 1 - \frac{1}{k_1\tau}(1 - e^{-k_1\tau}) - \frac{1}{k_2\tau}(1 - e^{-k_2\tau}) + \frac{1}{(k_1 + k_2)\tau}(1 - e^{-(k_1+k_2)\tau}).$$

Отметим, что функции $I_i(\tau)$, $1 \le i \le 5$, являются монотонно возрастающими от 0 до 1 с увеличением τ от 0 до ∞. Напомним, что в рассматриваемом случае $x^{\mathrm{T}} = (r, s)$. Использование принятых обозначений приводит к выражению, удобному для расчета кривой доходности

$$y(\tau, x) = ruk_1(1 - I_1(\tau)) + (rv + sw)k_2(1 - I_2(\tau)) + (\theta k_1 - \sigma_1\lambda_1)uI_1(\tau) +$$
$$+ [(\theta k_1 - \sigma_1\lambda_1)v - \sigma_2\lambda_2 w]I_2(\tau) - (\sigma_1 u)^2 I_3(\tau)/2 - (\sigma_1^2 v^2 + \sigma_2^2 w^2)I_4(\tau)/2 - \sigma_1^2 uvI_5(\tau).$$

Расчет форвардной кривой удобно выполнять по формуле (9) с применением формул (10).

Заключение

Для многофакторных моделей аффинной доходности найдены аналитические представления кривых доходности и форвардных кривых и предложено в качестве временной переменной использовать дюрацию безрисковой ставки. Поскольку дюрация принимает значения только на конечном интервале, это позволяет наблюдать поведение кривых на всем интервале изменения реального времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fabozzi F.* Bond Markets, Analysis, and Strategies, 4th edition. New York: Prentice Hall Publishing. 2000. 734 p.
2. *Hull J.*, *White A.* Numerical procedure for implementing structural models I: Single-factor models // J. Derivatives. 1994. V. 2. P. 7–16.
3. *Elton E.*, *Green C.* Tax and liquidity effects in pricing government bonds // J. Finance. 1998. V. 53. P. 1533–1562.
4. *Green R.*, *Odegaard B.* Are there tax effects in the relative pricing of U.S. government bonds? // J. Finance. 1997. V. 52. P. 609–633.
5. *RiskMetrics*. http://www.riskmetrics.com
6. *Svensson L.* Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992–1994 // International Monetary Fund: Working Paper WP/94/114. 1994. 53 p.
7. *Hu Z.* The Yield Curve and Real Activity // International Monetary Fund: Working paper WP/93/19. 1993. 38 p.
8. *McCulloch J. H.* Measuring the term structure of interest rates // J. Business. 1971. V. 44. P. 19–31.

9. *Fisher M.*, *Nychka D.*, *Zervos D.* Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines // Federal Reserve Board: Discussion Series, Division of Research and Statistics, Washington, DC. 1995. 27 p.
10. *Hull J.* Options, Futures, and other Derivative Securities. Englewood: Prentice Hall, 1993. 492 p.
11. *Vasiček O.* An equilibrium characterization of the term structure // J. Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
12. *Duffie D.*, *Kan R.* A yield-factor model of interest rates // Mathematical Finance. 1996. V. 6. P. 379–406.
13. *Cox J.*, *Ingersoll J.*, *Ross S.* Duration and the measurement of basis risk // J. Business. 1979. V. 52. P. 51–61.
14. *Brown R.*, *Schaefer S.* Interest rate volatility and shape of the term structure // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1994. V. A 347. P. 563–576.
15. *Cox J.*, *Ingersoll J.*, *Ross S.* A Theory of the term structure of interest rate // Econometrica. 1985. V. 53. P. 385–407.

Медведев Геннадий Алексеевич
Белорусский государственный университет
E-mail: MedvedevGA@cosmostv.by

Поступила в редакцию 17 декабря 2012 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University). **On term structure of yield rates. 1. Vasiček model.**

Keywords: yield interest rates, affine model, yield curve, forward curve, Vasiček model.

The time structure, interesting to experts and researchers, is the nominal yield curve that represents the yields to maturity for nominal bonds (i.e. the bonds that are issued at a face-value and have the coupons with the same yields). Determination of nominal yield curve is based on observation of the state securities being in circulation just sold at auction and most liquid. These securities in the countries with the developed economy are issued for 10 initial terms to maturity. They are issued usually at a face-value and to their yield rates are called as yield of nominal bonds. Determination of time structure of interest rates is reduced to that having only 10 nominal yields being in circulation directly observed in the market, and using other information contained in the description of these securities it is necessary to design the function, allowing to calculate yields for any term to maturity. In the paper properties of such characteristics of time structure of interest rates as yield curve and forward rates in a case when the affine model of yield is used are researched. Unlike known approaches are analyzed not only one-factor, but also multifactor models. Besides, it is considered not only a range of short and middle terms to maturity of securities, but also long terms. For multifactor models of affine yields the analytical representations of yield curves and forward curves are found. In addition instead of time variable it is proposed to use the risk-free rate durations. It gives the possibility for comparisons of yield curves and forward curves for every possible entire interval of change of term to maturities of assets.