ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012 Управление, вычислительная техника и информатика № 1(18)

УДК 519.872

С.Э. Статкевич, М.А. Маталыцкий

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕНАДЕЖНЫМИ СИСТЕМАМИ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Рассматривается применение метода производящих функций для нахождения зависящих от времени вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания (МО) с ненадежными системами обслуживания (СМО). Предполагается, что сеть функционирует в условиях высокой нагрузки. Параметры поступления и обслуживания заявок, исправной работы и восстановления неисправных линий зависят от времени. Такая сеть может служить моделью функционирования беспроводной локальной компьютерной сети (БЛС). Получены приближенные выражения для определения вероятностей состояний, среднего числа исправных линий и среднего числа заявок систем сети в произвольный момент времени. Рассмотрен пример нахождения вероятностей состояний для сети с центральной СМО.

Ключевые слова: *производящая функция, ненадежные СМО, вероятности состояний сети.*

Сети МО с ненадежными системами обслуживания описаны в [1], там же приведены формулы для их стационарных вероятностей состояний. В данной работе проводится исследование таких сетей в переходном режиме, находятся зависящие от времени характеристики.

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО с однотипными заявками, состоящую из n СМО $S_1, S_2, \dots, S_n$. В сеть поступает простейший поток заявок из внешней среды (система S_0) с интенсивностью $\lambda(t)$. Система S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, время обслуживания заявок в каждой из которых распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mu_i(t)$, $i=\overline{1,n}$.

Будем считать, что линии обслуживания системы S_0 абсолютно надежны, а в других системах $S_1, S_2, \dots, S_n$ линии обслуживания подвергаются случайным поломкам, причем время исправной работы каждой линии системы S_i имеет показательную функцию распределения (ф.р.) с параметром $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться и время восстановления также имеет показательную ф. р. с параметром $\gamma_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Допустим, что времена обслуживания заявок в линиях, длительности исправной работы линий и времена восстановления линий обслуживания являются независимыми случайными величинами. Под состоянием сети будем понимать вектор

$$Z(t)=(z,t)=(d,k,t)=(d_1,d_2,\dots,d_n,k_1,k_2,\dots,k_n,t),$$

где d_i – количество исправных линий обслуживания в системе S_i, $0 \le d_i \le m_i$, k_i – число заявок в системе S_i в момент времени t, $t \in [0,+\infty)$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим через p_{0j} – вероятность поступления заявки из системы S_0 в систему S_j,

$\sum_{j=1}^{n} p_{0j} = 1$; p_{ij} – вероятность перехода заявки в СМО S_j после ее обслуживания в СМО S_i, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$, $u(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда. Матрица $P = \left\| p_{ij} \right\|_{(n+1)\times(n+1)}$ является матрицей вероятностей переходов неприводимой марковской цепи. Будем также предполагать, что если во время обслуживания некоторой заявки линия обслуживания вышла из строя, то после окончания восстановления линии прерванная заявка дообслуживается. На обслуживание заявки выбираются в соответствии с дисциплиной FIFO.

Таким образом, рассматривается случай, когда параметры входящего потока заявок, обслуживания, длительности исправной работы и длительности восстановления линий обслуживания зависят от времени. То есть на интервале времени $[t, t+\Delta t)$ в сеть поступает заявка с вероятностью $\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$; если в момент времени t на обслуживании в линии i-й СМО находится заявка, то на интервале $[t, t+\Delta t)$ ее обслуживание закончится с вероятностью $\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$; кроме того, на интервале времени $[t, t+\Delta t)$ линия обслуживания i-й СМО с вероятностью $\beta_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ может выйти из строя либо восстановиться с вероятностью $\gamma_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$.

1. Система уравнений для вероятностей состояний сети

Лемма. Вероятности состояний рассматриваемой сети удовлетворяют системе разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt} = -\left[\lambda(t) + \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_i(t)\min(d_i, k_i) + \beta_i(t) d_i + \gamma_i(t)(m_i - d_i)\right]\right] P(d,k,t) +$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n} p_{0i} u(k_i) P(d, k - I_i, t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)\min(d_i, k_i + 1) p_{i0} P(d, k + I_i, t) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t)\min(d_i, k_i + 1) p_{ij} u(k_j) P\left(d, k + I_i - I_j, t\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t)(m_i - d_i + 1) u(d_i) P(d - I_i, k, t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t)(d_i + 1) P(d + I_i, k, t). \qquad (1)$$

Доказательство. В силу экспоненциальности времен обслуживания заявок, исправной работы линий обслуживания и восстановления неисправных линий случайный процесс $Z(t) = (d, k, t)$ является цепью Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний. Возможны следующие переходы в состояние $(d, k, t+\Delta t)$ за время Δt:

- из состояния (d, k, t) с вероятностью

$$1 - \left[\lambda(t) + \sum_{j=1}^{n} \left[\mu_j(t)\min\left(d_j, k_j\right) + \beta_j(t) d_j + \gamma_j(t)\left(m_j - d_j\right)\right]\right]\Delta t + o(t);$$

- из состояния $(d,k-I_i,t)$ с вероятностью

$$[\lambda(t)p_{0i}u(k_i)\Delta t+o(\Delta t)]\Bigg[1-\Bigg\{\lambda(t)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}p_{0j}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg],\ i=\overline{1,n};$$

- из состояния $(d,k+I_i,t)$ с вероятностью

$$[\mu_i(t)p_{i0}\min(d_i,k_i+1)\Delta t+o(\Delta t)]\Bigg[1-\Bigg\{\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\right.$$

$$\left.+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg],\ i=\overline{1,n};$$

- из состояния $\left(d,k+I_i-I_j,t\right)$ с вероятностью

$$\left[\mu_i(t)p_{ij}\min(d_i,k_i+1)u\left(k_j\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\Bigg[1-\Bigg\{\lambda(t)+\sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{n}[\mu_r(t)\min(d_r,k_r)+\beta_r(t)d_r+$$

$$+\gamma_r(t)(m_r-d_r)\Big]+\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j-1\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg],\ i,j=\overline{1,n};$$

- из состояния $(d-I_i,k,t)$ с вероятностью

$$[\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)u(d_i)\Delta t+o(\Delta t)]\times$$

$$\times\Bigg[1-\Bigg\{\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg],\ i=\overline{1,n};$$

- из состояния $(d+I_i,k,t)$ с вероятностью

$$[\beta_i(t)(d_i+1)\Delta t+o(\Delta t)]\times$$

$$\times\Bigg[1-\Bigg\{\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j(t)\min\left(d_j,k_j\right)+\beta_j(t)d_j+\gamma_j(t)\left(m_j-d_j\right)\right]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg],\ i=\overline{1,n};$$

- из остальных состояний – с вероятностью $o(\Delta t)$, например из состояния $\left(d+I_i-I_j,k,t\right)$ с вероятностью

$$[\beta_i(t)(d_i+1)\Delta t+o(\Delta t)]\left[\gamma_j(t)\left(m_j-d_j+1\right)u\left(d_j\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\Bigg[1-\Bigg\{\lambda(t)+$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\mu_r(t)\min(d_r,k_r)+\sum_{\substack{r=1\\r\neq i}}^{n}[\beta_r(t)d_r+$$

$$+\gamma_r(t)(m_r-d_r)]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg]=o(\Delta t),\ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j.$$

Тогда, используя формулу полной вероятности, можно записать

$$P(d,k,t+\Delta t)=$$

$$=\left\{1-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(t)\min(d_i,k_i)+\beta_i(t)d_i+\gamma_i(t)(m_i-d_i)]\right]\Delta t\right\}P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)P(d,k-I_i,t)\Delta t+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\min(d_i,k_i+1)p_{i0}P(d,k+I_i,t)\Delta t+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\min(d_i,k_i+1)u(k_j)p_{ij}P(d,k+I_i-I_j,t)\Delta t+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)u(d_i)P(d-I_i,k,t)\Delta t+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)P(d+I_i,k,t)\Delta t+o(\Delta t).$$

Разделив обе части полученного соотношения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим систему уравнений (1). Лемма доказана.

2. Нахождение вероятностей состояний с помощью метода производящих функций

Обозначим через $\Psi_{2n}(z,t)$, где $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n,z_{n+1},\ldots,z_{2n})$, $2n$-мерную производящую функцию

$$\Psi_{2n}(z,t)=\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d_1,\ldots,d_n,k_1,\ldots,k_n,t)\,z_1^{d_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{d_n}z_{n+1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_{2n}^{k_n}=$$

$$=\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+i}^{k_i}\,,\ |z|<1\,. \tag{2}$$

Предположим, что все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки [2], т.е. $k_i(t)>d_i(t)\ \ \forall t>0$, $i=\overline{1,n}$. Тогда система (1) принимает вид

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}[(\mu_i(t)+\beta_i(t)-\gamma_i(t))d_i+\gamma_i(t)m_i]\right]P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}P(d,k-I_i,t)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{i0}P(d,k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{ij}P(d,k+I_i-I_j,t)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)u(d_i)P(d-I_i,k,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)P(d+I_i,k,t), \tag{3}$$

количество уравнений в которой счетно в случае открытой сети и конечно в случае замкнутой.

Теорема 1. Производящая функция $\Psi_{2n}(z,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (ДУ) в частных производных:

$$\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial t}=-\left[\lambda(t)\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_{n+i}\right)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)m_i(1-z_i)\right]\Psi_{2n}(z,t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[(\mu_i(t)+\beta_i(t))z_i-\mu_i(t)\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}-\frac{\beta_i(t)}{z_i}\right]\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)p_{ij}\frac{z_{n+j}}{z_{n+i}}\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}. \qquad (4)$$

Доказательство. Умножим каждое из уравнений системы (3) на $\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_l^{k_l}$ и просуммируем по всем возможным значениям d_l от 0 до m_l и по k_l от 1 до $+\infty$, $l=\overline{1,n}$. Здесь суммирование по всем k_l берется от 1, так как все слагаемые в (2), для которых в состоянии сети $Z(t)$ встречаются компоненты $k_l=0$, в силу предположения о функционировании в режиме высокой нагрузки равны нулю, поскольку, например, $P(d,k_1,\dots,k_{l-1},0,k_{l+1},\dots,k_n,t)=0$, $l=\overline{2,n}$. Тогда получим

$$\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{dP(d,k,t)}{dt}\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}=$$

$$=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}[(\mu_i(t)+\beta_i(t)-\gamma_i(t))d_i+\gamma_i(t)m_i]\right]\times$$

$$\times\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k-I_i,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{i0}\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k+I_i,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{ij}u(k_j)\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k+I_i-I_j,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)u(d_i)\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d-I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)u(m_i-d_i)\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d+I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}. \qquad (5)$$

Рассмотрим суммы, входящие в соотношение (5). Пусть

$$\sum\nolimits_1(z,t)=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mu_i(t)+\beta_i(t)-\gamma_i(t)\right)d_i+\gamma_i(t)m_i\right]\right]\times$$
$$\times\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}.$$

Тогда

$$\sum\nolimits_1(z,t)=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)m_i\right]\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i(t)+\beta_i(t)-\gamma_i(t)\right)d_i\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}=$$
$$=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)m_i\right]\Psi_{2n}(z,t)-\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i(t)+\beta_i(t)-\gamma_i(t)\right)z_i\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}.$$

Для суммы

$$\sum\nolimits_2(z,t)=\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k-I_i,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}$$

имеем

$$\sum\nolimits_2(z,t)=\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_{n+i}\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{\substack{k_j=1\\ j=\overline{1,n},\,j\neq i}}^{\infty}\sum_{k_i=1}^{\infty}P(d,k-I_i,t)\frac{\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}}{z_{n+i}}=$$
$$=\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_{n+i}\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{\substack{k_j=1\\ j=\overline{1,n}}}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}=\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_{n+i}\Psi_{2n}(z,t).$$

Сумма

$$\sum\nolimits_3(z,t)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{i0}\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k+I_i,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}$$

имеет вид

$$\sum\nolimits_3(z,t)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)d_i\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k+I_i,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}z_{n+i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}d_iP(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}\sum_{d_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{\substack{k_j=1\\ j=\overline{1,n},\,j\neq i}}^{\infty}d_iP(d,k_1,\ldots,k_{i-1},0,k_{i+1},\ldots,k_n,t)\frac{\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}}{z_{n+i}^{k_i}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{\substack{k_j=1\\ j=\overline{1,n},\,j\neq i}}^{\infty}d_iP(d,k_1,\dots,k_{i-1},0,k_{i+1},\dots,k_n,t)\frac{\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}}{z_{n+i}^{k_i}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}.$$

Сумма

$$\sum\nolimits_4(z,t)=\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{ij}u(k_j)\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k+I_i-I_j,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}:$$

$$\sum\nolimits_4(z,t)=\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)d_ip_{ij}\frac{z_{n+j}}{z_{n+i}}\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k+I_i-I_j,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}\cdot\frac{z_{n+i}}{z_{n+j}}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)p_{ij}\frac{z_{n+j}}{z_{n+i}}\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}-\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)p_{ij}\frac{z_{n+j}}{z_{n+i}}\times$$

$$\times\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{\substack{k_j=1\\ j=\overline{1,n},\,j\neq i}}^{\infty}d_iP(d,k_1,\dots,k_{i-1},0,k_{i+1},\dots,k_n,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}\cdot\frac{z_{n+i}}{z_{n+j}}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)p_{ij}\frac{z_{n+j}}{z_{n+i}}\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}.$$

Для суммы

$$\sum\nolimits_5(z,t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i+1)u(d_i)\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d-I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}$$

справедливо соотношение

$$\sum\nolimits_5(z,t)=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)m_i-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)u(d_i)(d_i-1)\right]\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d-I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-u(d_i)(d_i-1))\right]z_i\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d-I_i,k,t)\frac{\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}}{z_i}=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i)\right]z_i\sum_{\substack{d_j=0\\ j=\overline{1,n}\,j\neq i}}^{m_j}\sum_{d_i=0}^{m_i-1}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-d_i)\right]z_i\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}-$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)(m_i-m_i)\right]z_i\sum_{\substack{d_j=0\\ j=\overline{1,n}\, j\neq i}}^{m_j}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d_1,\dots,d_{i-1},m_i,d_{i+i},\dots,d_n,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)m_iz_i\Psi_{2n}(z,t)-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)z_i\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}.$$

И, наконец, для последней суммы

$$\sum\nolimits_6(z,t)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(d_i+1)\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}P(d+I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}$$

будем иметь

$$\sum\nolimits_6(z,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(t)}{z_i}\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}(d_i+1)P(d+I_i,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}z_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(t)}{z_i}\sum_{\substack{d_j=0\\ j=\overline{1,n},\, j\neq i}}^{m_j}\sum_{d_i=1}^{m_i}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}d_iP(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}z_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(t)}{z_i}\sum_{d_1=0}^{m_1}\dots\sum_{d_n=0}^{m_n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\dots\sum_{k_n=1}^{\infty}d_iP(d,k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{d_l}z_{n+l}^{k_l}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(t)}{z_i}\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_i}.$$

Таким образом, учитывая вид производящей функции (2), получаем уравнение в частных производных первого порядка (4). Теорема доказана.

Далее рассмотрим случай, когда

$$m_i=1,\ k_i(t)>0\quad\forall t,\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

При этом число исправных линий обслуживания в системе S_i может быть равным 0 или 1. Если состоянием сети (d,k,t) является $(d_1,\dots,d_{i-1},0,d_{i+1},\dots,d_n,k,t)$, то справедлива система уравнений

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(t)+\beta_i(t)+\gamma_i(t)]\right]P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}P(d,k-I_i,t)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)p_{i0}P(d,k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)p_{ij}P\left(d,k+I_i-I_j,t\right)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)P(d_1,\dots,d_{i-1},1,d_{i+i},\dots,d_n,k,t),$$

а если $(d_1,\dots,d_{i-1},1,d_{i+1},\dots,d_n,k,t)$, то

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(t)+\beta_i(t)+\gamma_i(t)]\right]P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n} p_{0i}P(d,k-I_i,t)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)p_{i0}P(d,k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\,p_{ij}P\left(d,k+I_i-I_j,t\right)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)P(d_1,\ldots,d_{i-1},0,d_{i+i},\ldots,d_n,k,t).$$

Их можно объединить в одну систему

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}[\mu_i(t)+\beta_i(t)+\gamma_i(t)]\right]P(d,k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n} p_{0i}P(d,k-I_i,t)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)p_{i0}P(d,k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\,p_{ij}P\left(d,k+I_i-I_j,t\right)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)u(d_i)P(d_1,\ldots,d_{i-1},0,d_{i+i},\ldots,d_n,k,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)(1-u(d_i))P(d_1,\ldots,d_{i-1},1,d_{i+i},\ldots,d_n,k,t). \qquad (7)$$

Пусть

$$\Lambda(t)=\int\lambda(t)dt,\ \mathrm{M}_i(t)=\int\mu_i(t)dt,$$

$$\mathrm{B}_i(t)=\int\beta_i(t)dt,\ \mathrm{G}_i(t)=\int\gamma_i(t)dt. \qquad (8)$$

Из последней теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Если в начальный момент времени сеть МО находится в состоянии $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n},0)$, $\alpha_i \ge 0$, $\alpha_{n+i}>0$, $i=\overline{1,n}$, то производящая функция (2) имеет вид

$$\Psi_{2n}(z,t)=a_0(t)\exp\left\{(\Lambda(t)-\Lambda(0))\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_{n+i}\right\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0))\frac{p_{i0}}{z_{n+i}}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{i,j=1}^{n}(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0))\,p_{ij}\,\frac{z_{n+j}}{z_{n+i}}\right\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{G}_i(t)-\mathrm{G}_i(0))(1-u(d_i))z_i\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{B}_i(t)-\mathrm{B}_i(0))u(d_i)\frac{1}{z_i}\right\}\prod_{l=1}^{2n}z_l^{\alpha_l}, \qquad (9)$$

где

$$a_0(t)=\exp\left\{-(\Lambda(t)-\Lambda(0))-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}[(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0))+(\mathrm{B}_i(t)-\mathrm{B}_i(0))+(\mathrm{G}_i(t)-\mathrm{G}_i(0))]\right\}. \qquad (10)$$

Преобразуем (9) к виду, удобному для нахождения вероятностей состояний сети, разложив входящие в него экспоненты в ряд Маклорена. Тогда будет справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Выражение для производящей функции (9) можно представить в виде

$$\Psi_{2n}(z,t)=a_0(t)\sum_{g_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{g_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{h_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{h_n=0}^{\infty}(\Lambda(t)-\Lambda(0))^{\sum_{i=1}^{n}l_i}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i}p_{i0}^{r_i}\left(\prod_{j=1}^{n}p_{ij}\right)^{h_i}}{l_i!r_i!h_i!q_i!g_i!}[\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)]^{r_i+h_i}[(\mathrm{G}_i(t)-\mathrm{G}_i(0))(1-u(d_i))]^{q_i}\times\right.$$

$$\left.\times[(\mathrm{B}_i(t)-\mathrm{B}_i(0))u(d_i)]^{g_i}\,z_i^{\alpha_i+q_i-g_i}\,z_{n+i}^{\alpha_{n+i}+l_i-r_i-h_i+H}\right],\qquad(11)$$

где $H=\sum_{i=1}^{n}h_i$.

Пример 1. Рассмотрим модель БЛС, изображенную на рис. 1. Системы $S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}$ соответствуют терминалам (периферийным компьютерам), система S_n – локальному серверу. Напомним, что БЛС часто функционируют в условиях высокой нагрузки [2]. Запросы (пакеты, заявки) могут поступать на сервер не только из терминалов, но и из внешней среды через базовую станцию.

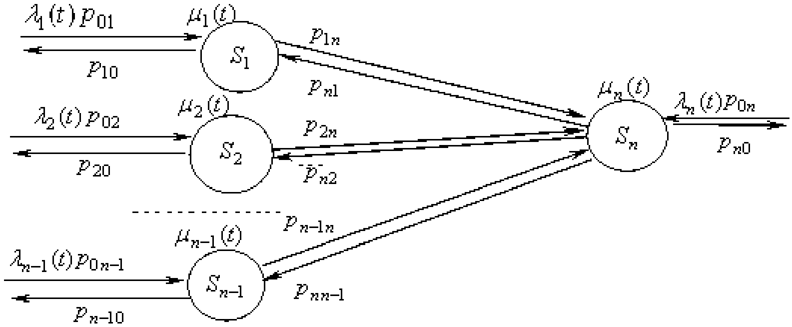

Рис.1. Модель локальной сети

Выражение (11) в этом случае принимает вид

$$\Psi_{2n}(z,t)=a_0(t)\sum_{g_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{g_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{h_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{h_n=0}^{\infty}(\Lambda(t)-\Lambda(0))^{\sum_{i=1}^{n}l_i}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n-1}p_{jn}^{h_j}p_{nj}^{h_n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i}p_{i0}^{r_i}}{l_i!r_i!h_i!q_i!g_i!}[\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)]^{r_i+h_i}[(\mathrm{G}_i(t)-\mathrm{G}_i(0))(1-u(d_i))]^{q_i}\times\right.$$

$$\left.\times[(\mathrm{B}_i(t)-\mathrm{B}_i(0))u(d_i)]^{g_i}\,z_i^{\alpha_i+q_i-g_i}\,z_{n+i}^{\alpha_{n+i}+l_i-r_i-h_i+H}\right].\qquad(12)$$

Пусть, например,

$$\lambda(t)=\lambda\cos(at+\omega)+b\ ,\ \mu_i(t)=\mu_i\sin(a_it+\omega_i)+c_i\ ,$$

$$\beta_i(t)=\beta_i\sin(\theta_it+\nu_i)+\rho_i\ ,\ \gamma_i(t)=\gamma_i\cos(\eta_it+\delta_i)+e_i\ ,\ i=1,2\ ,$$

тогда

$$\Lambda(t)=\frac{\lambda\sin(at+\omega)}{a}+bt\ ,\ \Lambda(0)=\frac{\lambda\sin\omega}{a}\ ,$$

$$\mathrm{M}_i(t)=-\mu_i\frac{\cos(a_it+\omega_i)}{a_i}+c_it\ ,\ \mathrm{M}_i(0)=-\mu_i\frac{\cos\omega_i}{a_i}\ ,$$

$$\mathrm{B}_i(t)=-\beta_i\frac{\cos(\theta_it+\nu_i)}{\theta_i}+\rho_it\ ,\ \mathrm{B}_i(0)=-\beta_i\frac{\cos\nu_i}{\theta_i}\ ,$$

$$\mathrm{G}_i(t)=-\gamma_i\frac{\cos(\eta_it+\delta_i)}{\eta_i}+e_it\ ,\ \mathrm{G}_i(0)=-\gamma_i\frac{\cos\delta_i}{\eta_i}\ ,\ i=\overline{1,n}\ ,$$

$$a_0(t)=\exp\left\{-\left(bt+\frac{\lambda\sin(at+\omega)}{a}-\frac{\lambda\sin\omega}{a}\right)-\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\left(c_it-\mu_i\frac{\cos(a_it+\omega_i)}{a_i}+\mu_i\frac{\cos\omega_i}{a_i}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(e_it-\gamma_i\frac{\cos(\eta_it+\delta_i)}{\eta_i}+\gamma_i\frac{\cos\delta_i}{\eta_i}\right)+\left(\rho_it-\beta_i\frac{\cos(\theta_it+\nu_i)}{\theta_i}+\beta_i\frac{\cos\nu_i}{\theta_i}\right)\right]\right\}.$$

Из (12) получаем

$$\Psi_{2n}(z,t)=a_0(t)\times$$

$$\times\sum_{g_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{g_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{h_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=0}^{\infty}\left(bt+\frac{\lambda\sin(at+\omega)}{a}-\frac{\lambda\sin\omega}{a}\right)^{\sum_{i=1}^{n}l_i}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n-1}p_{jn}^{h_j}p_{nj}^{h_n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i}p_{i0}^{r_i}}{l_i!r_i!h_i!q_i!g_i!}\left[c_it-\mu_i\frac{\cos(a_it+c_i)}{a_i}+\mu_i\frac{\cos\omega_i}{a_i}\right]^{r_i+h_i}\times\right.$$

$$\times\left[\left(e_it-\gamma_i\frac{\cos(\eta_it+\delta_i)}{\eta_i}+\gamma_i\frac{\cos\delta_i}{\eta_i}\right)(1-u(d_i))\right]^{q_i}\times$$

$$\left.\times\left[\left(\rho_it-\beta_i\frac{\cos(\theta_it+\nu_i)}{\theta_i}+\beta_i\frac{\cos\nu_i}{\theta_i}\right)u(d_i)\right]^{g_i}z_i^{\alpha_i+q_i-g_i}z_{n+i}^{\alpha_{n+i}+l_i-r_i-h_i+H}\right].$$

Вероятность состояния $P(d_1\ldots,d_n,k_1,\ldots,k_n,t)$ является коэффициентом при $z_1^{d_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{d_n}z_{n+1}^{k_1}\cdot\ldots\cdot z_{2n}^{k_n}$ в разложении функции $\Psi_{2n}(z,t)$ в многократный ряд (12), при условии, что в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n},0)$.

Положим, что $n=4$, $\lambda=15$, $a=1$, $\omega=0.5$, $b=2$, $\mu_1=\mu_3=5$, $\mu_2=\mu_4=3$, $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=a_4=2$, $\omega_1=5$, $\omega_2=\omega_3=\omega_4=0.5$, $c_1=c_2=c_3=c_4=8$, $\beta_1=3.5$, $\beta_2=0.9$, $\beta_3=\beta_4=0.4$, $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu_4=1$,

$\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=0$, $\gamma_1=4$, $\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=1$, $\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta_4=2$, $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=1$, $e_1=e_2=e_3=e_4=0.5$, $p_{0i}=1/4$, $i=\overline{1,4}$, $p_{i0}=2/5$, $i=\overline{1,3}$, $p_{40}=1/2$, $p_{4i}=1/6$, $i=\overline{1,3}$, $p_{i4}=3/5$, $i=\overline{1,3}$, $p_{ii}=0$, $i=\overline{0,4}$. На рис. 2 изображен график вероятности состояния $P(1,0,0,0,2,4,3,3,t)$ при условии, что в начальный момент времени сеть находилась в состоянии $(1,1,1,1,4,5,5,4)$.

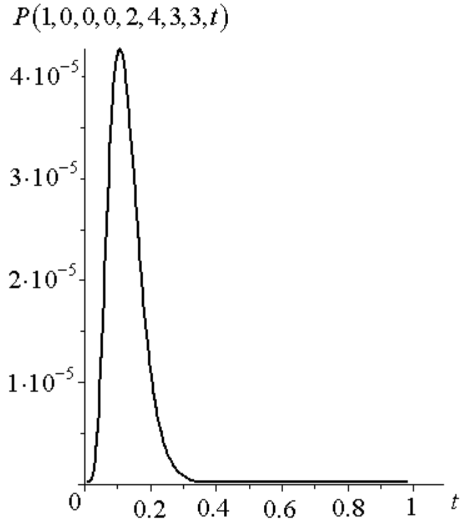

Рис. 2. График вероятности состояния $P(1,0,0,0,2,4,3,3,t)$

3. Нахождение средних характеристик

Математическое ожидание c-й компоненты многомерной случайной величины можно найти, продифференцировав выражение для производящей функции по z_c и положив $z_i=1$, $i=\overline{1,2n}$. Тогда среднее число исправных линий в системе S_c может быть найдено по формуле

$$\bar{d}_c(t)=\left.\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_c}\right|_{z=(1,1,\dots,1)}=$$

$$=a_0(t)\sum_{g_1=0}^{\infty}\dots\sum_{g_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\dots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{h_1=0}^{\infty}\dots\sum_{h_n=0}^{\infty}(a_c+q_c-g_c)\times$$

$$\times(\Lambda(t)-\Lambda(0))^{\sum_{i=1}^{n}l_i}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i}p_{i0}^{r_i}\left(\prod_{j=1}^{n}p_{ij}\right)^{h_i}}{l_i!r_i!h_i!q!g!}[\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)]^{r_i+h_i}\times\right.$$

$$\left.\times[(\mathrm{G}_i(t)-\mathrm{G}_i(0))(1-u(a_i+q_i-g_i))]^{q_i}[(\mathrm{B}_i(t)-\mathrm{B}_i(0))u(a_i+q_i-g_i)]^{g_i}\right],\ c=\overline{1,n},$$

а среднее число заявок в системе S_c имеет вид

$$N_c(t)=\left.\frac{\partial\Psi_{2n}(z,t)}{\partial z_{n+c}}\right|_{z=(1,1,\ldots,1)}=$$

$$=a_0(t)\sum_{g_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{g_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{h_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{h_n=0}^{\infty}(a_{n+c}+l_c-r_c-h_c+H)\times$$

$$\times(\Lambda(t)-\Lambda(0))^{\sum_{i=1}^{n}l_i}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i}p_{i0}^{r_i}\left(\prod_{j=1}^{n}p_{ij}\right)^{h_i}}{l_i!r_i!h_i!q!g!}[\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)]^{r_i+h_i}\times\right.$$

$$\left.\times[(\mathrm{G}_i(t)-\mathrm{G}_i(0))(1-u(a_i+q_i-g_i))]^{q_i}\,[(\mathrm{B}_i(t)-\mathrm{B}_i(0))u(a_i+q_i-g_i)]^{g_i}\right],$$

$$c=\overline{1,n}\,. \tag{13}$$

Сделав в выражении (13) замену переменных $k_c=\alpha_{n+c}+l_c-r_c-h_c+H$, т.е. $l_c=k_c-\alpha_{n+c}+r_c+h_c-H$, с учетом того, что системы сети функционируют в условиях высокой нагрузки, получим

$$N_c(t)=a_0(t)\sum_{g_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{g_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}k_c\sum_{h_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{h_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\alpha_{n+1}-h_1+H-1}\ldots\sum_{r_n=0}^{\alpha_{2n}-h_n+H-1}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{((\Lambda(t)-\Lambda(0))p_{0i})^{k_i-\alpha_{n+i}+r_i+h_i-H}\;p_{i0}^{r_i}\left(\prod_{j=1}^{n}p_{ij}\right)^{h_i}}{(k_i-\alpha_{n+i}+r_i+h_i-H)!r_i!h_i!q!g!}[\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)]^{r_i+h_i}\times\right.$$

$$\left.\times[(\mathrm{G}_i(t)-\mathrm{G}_i(0))(1-u(a_i+q_i-g_i))]^{q_i}\,[(\mathrm{B}_i(t)-\mathrm{B}_i(0))u(a_i+q_i-g_i)]^{g_i}\right].$$

Заключение

В работе проведено исследование в переходном режиме и условиях высокой нагрузки сети произвольной структуры с ненадежными СМО. Такие сети могут служить моделями функционирования БЛС. Полученная система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний системы (1) с нелинейными коэффициентами заменяется системой (3) с линейными коэффициентами, которая решается с помощью метода производящих функций. Данная замена является приближенным методом исследования системы (1) в условиях высокой нагрузки. Получены выражения, позволяющие определить вероятности состояний такой сети, а также среднее число исправных линий обслуживания и среднее число заявок в системах сети в произвольный момент времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матальцкий М.А.* Сети массового обслуживания в стационарном и переходном режимах. Гродно: ГрГУ, 2001. 211 с.

2. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.

Статкевич Святослав Эдуардович
Матальщкий Михаил Алексеевич
Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы, Беларусь
E-mail: sstat@grsu.by; m.matalytski@gmail.com
Поступила в редакцию 7 октября 2011 г.

Statkevich Svyatoslav, Matalytski Mikhail (Grodno State University of Yanka Kupala, Belarus).
Investigation of queueing network with unreliable systems at transient regime.

Keywords: generating function, unreliable QS, state probabilities.

The open exponentional queuing network with unreliable systems which functioning under condition of heavy loading is investigated. The Poisson flow of rate $\lambda(t)$ enters the network. The service time of messages in each of network systems has exponential distribution with parameter $\mu_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Service channels are exposed to random failure and serviceable work time of each channel of system S_i has exponential distribution with parameter $\beta_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. After failure the service channel immediately starts to be restored and restoration time also has exponential distribution with parameter $\gamma_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Let's consider, that service times of messages, durations of serviceable work of channels and restoration time of service channels are independent random variables.

State of network could be described via vector

$$Z(t)=(z,t)=(d,k,t)=(d_1,d_2,\ldots,d_n,k_1,k_2,\ldots,k_n,t),$$

where d_i – number of serviceable channels in system S_i, $0 \le d_i \le m_i$, k_i – messages number in system S_i at the moment t, $t\in[0,+\infty)$, m_i – total number of channels in system S_i, $i=\overline{1,n}$.

By the instrumentality of generating functions approximate expressions for the time-dependent state probabilities, average number of messages and serviceable channels are obtained.