УДК 681.5

О.О. Мухина, В.И. Смагин

ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЙ В ПОСТАВКАХ И ТРАНСПОРТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассматривается задача управления запасами для различных структур расположения складов с учетом транспортных задержек и ограничений на грузоподъемность транспортных средств. Для ее решения предлагаются алгоритмы, в основе которых лежит оптимизация модифицированного локального критерия и критерия суммарных издержек на скользящем интервале оптимизации.

Ключевые слова: *управление запасами*, *моделирование*, *транспортные запаздывания*, *минимизация издержек*, *локальный критерий.*

В работах [1–3] рассмотрены задачи синтеза систем управления с учетом запаздываний по управлению для дискретных объектов. В [1] рассматривается метод решения задачи для дискретной системы на основе преобразования модели с запаздываниями к расширенной модели без запаздываний, что в некоторых случаях приводит к значительному увеличению размерности задачи и тем самым к дополнительным вычислительным затратам. В [2, 3] задачи управления запасами предлагается решать без расширения пространства состояний. В [2] рассматривается метод синтеза прогнозирующего управления запасами для эшелонной структуры, обеспечивающего желаемый уровень количества товаров на складах без дополнительных ограничений.

В настоящей работе обобщается подход [3] на случай многих запаздываний. С использованием модифицированного локального критерия решена задача управления запасами и выполнено моделирование для двух структур расположения складов (эшелонной структуры [2] и структуры, состоящей из оптового и розничных складов [4]). Синтез системы управления осуществляется без расширения пространства состояний. Дополнительно вводится критерий суммарных издержек, оптимизация которого проводится на скользящем интервале, и учитываются ограничения на грузоподъемность транспортных средств.

1. Постановка задачи

Пусть модель совокупности связанных складов описывается уравнением

$$x(k+1)=Ax(k)+\sum_{j=1}^{n}B_j u(k-h_j)+Fs(k),\ x(0)=x_0,\ u(\tau)=\varphi(\tau),\ \tau=-h_n,-h_n+1,\dots,-1, \quad (1)$$

где $x(k)\in R^n$, $u(k)\in R^n$, ($x_j(k)$ – количество товара на j-м складе в момент времени k, $j=\overline{1,n}$; $u_j(k)$ – объем поставок на j-й склад; h_j – величины запаздываний, $h_n \ge h_{n-1} \ge \ldots \ge h_1 \ge 0$); $s(k)\in R^r$ – вектор спроса (размерность вектора зависит от структуры системы складов). Предполагается, что $s(k)$ – случайный вектор и его реализация известна на промежутке [0, k], где k – текущее время. A, B_j, F, H – заданные матрицы соответствующей размерности, которые определяются характеристиками и структурой системы складов.

Суммарные издержки на хранение запасов на складах будем определять с помощью следующего критерия, который вычисляется на скользящем интервале:

$$K(k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=k-T}^{k} V_j x_j(t), \tag{2}$$

где V_j – затраты на хранение единицы товара на j-м складе в единицу времени, T – длина скользящего интервала оптимизации.

Поставки на j-й склад осуществляются транспортными средствами с грузоподъемностями $G_{\max, j}$. Предполагается, что вес единицы товара задан и равен P.

Требуется осуществить синтез системы управления запасами по управлению так, чтобы были минимальны издержки на хранение (2) и при этом обеспечивалась загруженность транспортных средств с коэффициентом использования грузоподъемности не менее заданного значения $K_Г$. Будем также предполагать, что для каждого склада определен страховой запас $X_{\mathrm{st}, j}$.

2. Введение вспомогательного критерия и учет транспортных ограничений

Решение задачи предлагается осуществлять с использованием предварительной оптимизации вспомогательного локального критерия вида

$$I(k) = M\left\{(x(k+1) - z(k))^T C(x(k+1) - z(k)) + \sum_{j=1}^{n} u(k-h_j)^T D_j u(k-h_j) / X_0^k\right\}, \tag{3}$$

где $C \geq 0, D_j \geq 0$ – весовые матрицы, $X_0^k = \{x(0), x(1), \ldots, x(k)\}$, $z(k)$ – заданный отслеживаемый вектор.

Критерий (3) отличается от классического критерия [1, 5] тем, что в него входит сумма квадратичных форм от управляющих воздействий с запаздываниями. Критерий (3) оптимизируется с целью нахождения объемов поставок, зависящих от параметра $z(k)$, по которому в дальнейшем будет осуществляться оптимизация критерия (2).

Вычислим значение критерия (3):

$$I(k) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{tr}(B_j^T C B_j + D_j) u(k-h_j) u^T(k-h_j) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{tr} B_j^T C(Ax(k) + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} B_i u(k-h_i) +$$
$$+ f(k) - z(k)) u^T(k-h_j) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{tr}(x^T(k) A^T - f^T(k) - z^T(k)) C B_j u(k-h_j).$$

Оптимальное управление определим из условий

$$\frac{\partial I(k)}{\partial u(k-h_j)} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Будем использовать правила дифференцирования функции tr от произведения матриц по матричному аргументу [6]:

$$\frac{\partial \operatorname{tr} AXB}{\partial X} = A^T B^T, \quad \frac{\partial \operatorname{tr} AX^T B}{\partial X} = BA.$$

Тогда, в силу (4) и с учетом модели (1), получим систему векторных уравнений для определения $u(k-h_j), j=\overline{1,n}$:

$$u(k-h_j) = -(B_j^T C B_j + D_j)^{-1} B_j^T C (A^{h_j+1} x(k-h_j) + \sum_{l=1}^{h_j} A^l \sum_{i=1}^{h_j} B_i u(k-i-l) +$$
$$+ \sum_{i=1, i\neq j}^{h_j} B_i u(k-i) + \sum_{j=0}^{h_j} A^j F s(k-j) - z(k)). \tag{5}$$

Система линейных уравнений (5) решается последовательно для $k = 0, 1, 2,\ldots$, при этом часть из управлений на первых шагах определяется по функции $\varphi(\tau)$, а также из ранее вычисленных управлений. Для решения системы линейных уравнений (5) необходимо осуществлять прогноз переменной $s(k)$, который выполняется с использованием методов прогнозирования временных рядов [7]. Следует учитывать, что k – текущий момент времени и спрос в этот и предыдущие моменты известен, а для моментов времени больших чем k спрос прогнозируется. При увеличении k ранее вычисленные прогнозы пересчитываются в связи с поступлением новой информации, при этом часть прогнозируемых величин спроса заменяется на истинные значения.

На управление, полученное из (5), накладываются транспортные ограничения следующего вида:

$$\bar{u}(k-h_j) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \;\; u(k-h_j) < U_{\min,j}, \\ u(k-h_j), \;\; \text{если} \;\; U_{\min,j} \le u(k) \le U_{\max,j}, \\ U_{\max,j}, \;\; \text{если} \; u(k-h_j) > U_{\max,j}, \end{cases} \tag{6}$$

где $U_{\min,j} = K_\Gamma U_{\max,j}$ – минимально допустимый уровень поставок товаров на j-й склад; $U_{\max,j} = G_{\max,j} / P$ – максимально допустимый уровень поставок товаров на j-й склад. Отметим, что если величины $U_{\max,j}$ и $U_{\min,j}$ получены дробные, то $U_{\min,j}$ следует округлять в большую сторону, а $U_{\max,j}$ – в меньшую.

Предполагается, что при осуществлении поставок имеется достаточное количество транспортных средств.

3. Минимизация издержек на хранение товаров

Минимизация издержек на хранение товаров осуществляется на скользящем временном отрезке $[k-T, k]$ по переменной $z(k)$ и с учетом того, что в условиях нормального функционирования страховой запас $X_{st,j}$ остается неприкосновенным. Тогда оптимизационная задача представляется в виде

$$K(k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=k-T}^{k} V_j x_j(t) \;\Rightarrow \min_{z(k)}, \tag{7}$$

$$x_j(k) \ge X_{st,j}, \forall k \in [k-T, k], j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Минимизация критерия (7) осуществляется по вектору $z(k)$. При этом на каждом шаге пересчитываются $u(k-h_j)$ в соответствии с (5) и (6). Отметим, что при решении уравнений (5) прогноз выполняется на скользящем интервале оптимизации. Найденное значение вектора $z^*(k)$, обеспечивает минимальные издержки на временном интервале от $k-T$ до k. При расчетах поставок по формуле (6) обеспечивается загруженность транспортных средств в соответствии с заданным коэффициентом $K_Г$. По найденному вектору $z^*(k)$ определяется объем поставок в следующий момент $\overline{u}(k+1-h_j)$, и далее, по аналогии, решается задача минимизации критерия $K(k+1)$ с учетом всех ограничений ($\forall k \in [k-T+1, k+1]$) и определяется новый вектор $z^*(k+1)$, который используется для определения поставок в момент времени $k+2$, и так далее.

4. Управление запасами при эшелонном расположении складов

Рассмотрим структурную схему эшелонного (последовательного) расположения складов (рис. 1).

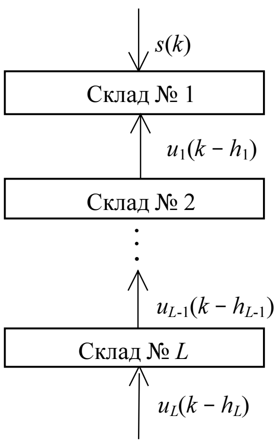

Рис. 1. Структурная схема эшелонного расположения складов

Структура складов состоит из L последовательно связанных складов. Цепь поставок является вертикальной в том смысле, что с каждого склада нижнего уровня осуществляются поставки на склад следующего уровня. На склад верхнего уровня поступает спрос, определяемый рынком. Последний, нижний склад, имеет внешнего поставщика. Модель такой системы описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1-w_1)x_1(k) + u_1(k-h_1) - s(k), \\ x_j(k+1) = (1-w_j)x_j(k) + u_j(k-h_j) - u_{j-1}(k-h_{j-1}), \ \ j = \overline{2,L}, \end{cases} \tag{9}$$

где w_j – коэффициенты потерь, возникающих при хранении товаров на j-м складе.

В качестве примера рассматривается задача управления запасами для последовательной структуры, состоящей из 2 складов. Тогда модель (9) примет вид

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1-w_1)x_1(t) + u_1(k-1) - s(k), \\ x_2(k+1) = (1-w_2)x_2(t) + u_2(k-2) - u_1(k-1). \end{cases} \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$x(k)=\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix},\ u(k-h_j)=\begin{pmatrix} u_1(k-h_j) \\ u_2(k-h_j) \end{pmatrix},\ j=\overline{1,2},\ h_1=1,\, h_2=2,\ A=\begin{pmatrix} 1-w_1 & 0 \\ 0 & 1-w_2 \end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Модель (10) может быть представлена в виде (1), поэтому для решения задачи управления запасами может быть применен метод, описанный в разделах 2, 3.

Моделирование выполнено для следующих исходных данных:

$$x(0)=\begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix},\ \ \varphi(-2)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\varphi(-1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ K_\Gamma=0{,}8,\ \ T=7,$$

$$w_1=0{,}001, w_2=0{,}001,\ V_1=1,\, V_2=1.$$

Отметим, что при прогнозировании спроса применяется метод усреднения по скользящему окну наблюдаемых данных.

На рис. 2 приведена реализация спроса.

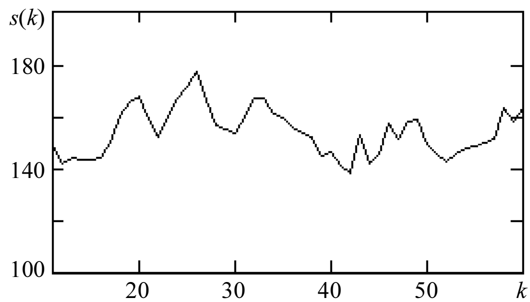

Рис. 2. Реализация внешнего спроса

На рис. 3, 4 приведены диаграммы внешних поставок, поставок с первого склада на второй и графики изменений количества товара на складах.

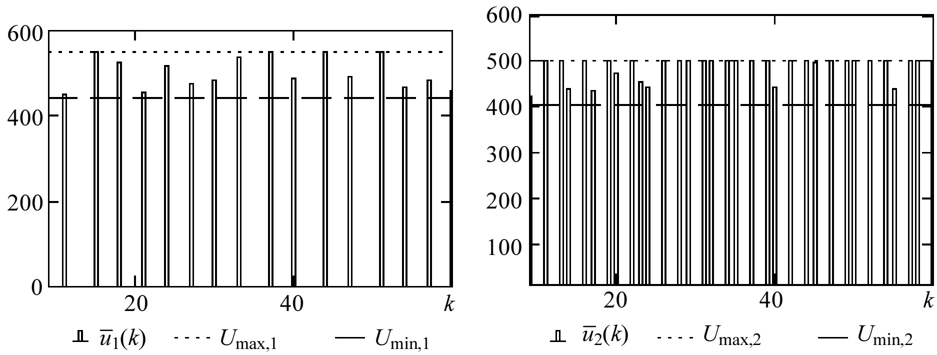

Рис. 3. Поставки на склады

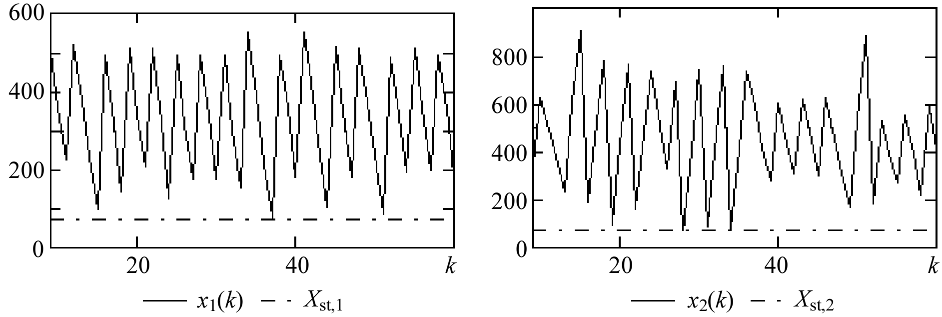

Рис. 4. Изменение количества товара на складах

5. Управление запасами для оптового и розничных складов

Структурная схема системы складов, состоящая из оптового и L розничных складов имеет вид (рис. 5)

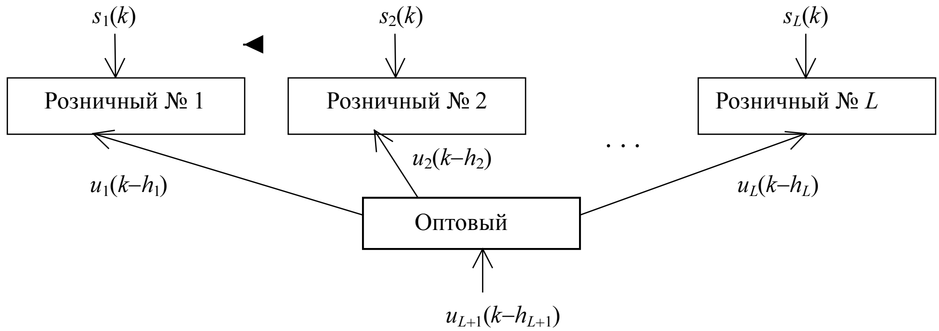

Рис. 5. Структурное расположение системы складов,
состоящей из оптового и L розничных складов

Поставки $u_j(k-h_j)$ осуществляются с оптового склада на розничные с запаздываниями h_j. Спрос, поступающий на розничные склады в момент времени k, описывается величиной $s_j(k)$. Оптовый склад имеет внешнего поставщика. Модель системы складов можно описать набором уравнений

$$x_1(k+1)=(1-w_1)x_1(k)+u_1(k-h_1)-s_1(k)\,,$$

$$x_2(k+1)=(1-w_2)x_2(k)+u_2(k-h_2)-s_2(k)\,,$$

$$\ldots \tag{11}$$

$$x_{L+1}(k+1)=(1-w_{L+1})x_{L+1}(k)+u_{L+1}(k-h_{L+1})-u_1(k-h_1)-u_2(k-h_2)-\ldots-u_L(k-h_L)\,.$$

В качестве примера рассмотрена задача управления запасами для системы складов, состоящей из оптового и 2 розничных складов, которая описывается уравнениями

$$\begin{cases} x_1(k+1)=(1-w_1)x_1(k)+u_1(k-1)-s_1(k), \\ x_2(k+1)=(1-w_2)x_2(k)+u_2(k-2)-s_2(k), \\ x_3(k+1)=(1-w_3)x_3(k)+u_3(k-3)-u_1(k-1)-u_2(k-2), \end{cases} \tag{12}$$

Введем обозначения:

$$x(k)=\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\end{pmatrix},\quad u(k-h_j)=\begin{pmatrix}u_1(k-h_j)\\u_2(k-h_j)\\u_3(k-h_j)\end{pmatrix}, j=\overline{1,3}, h_1=1, h_2=2, h_3=3,$$

$$A=\begin{pmatrix}1-w_1 & 0 & 0\\ 0 & 1-w_2 & 0\\ 0 & 0 & 1-w_3\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда модель (12) может быть представлена в виде (1). При моделировании используются следующие исходные данные:

$$x(0)=\begin{pmatrix}120\\150\\120\end{pmatrix},\quad \varphi(-3)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \varphi(-2)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \varphi(-1)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ K_\Gamma=0{,}8,\quad T=7,$$

$$w_1=0{,}001, w_2=0{,}001,\ w_3=0{,}001,\ V_1=1,\ V_2=1,\ V_3=1.$$

На рис. 6 приводятся реализации спроса на розничных складах.

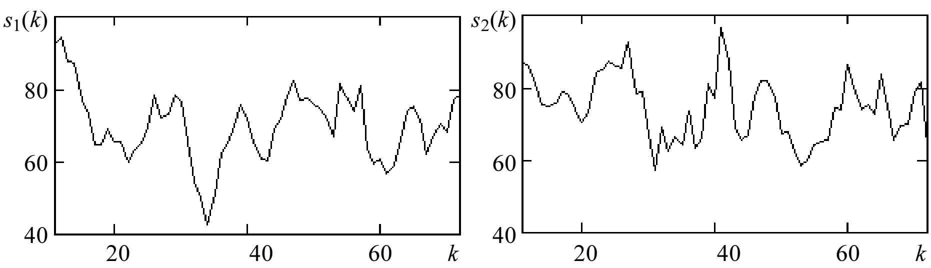

Рис. 6. Спрос на розничных складах

Выполнив расчеты по методике, описанной в разделах 2, 3, получаем результаты моделирования, представленные на рис. 7–10.

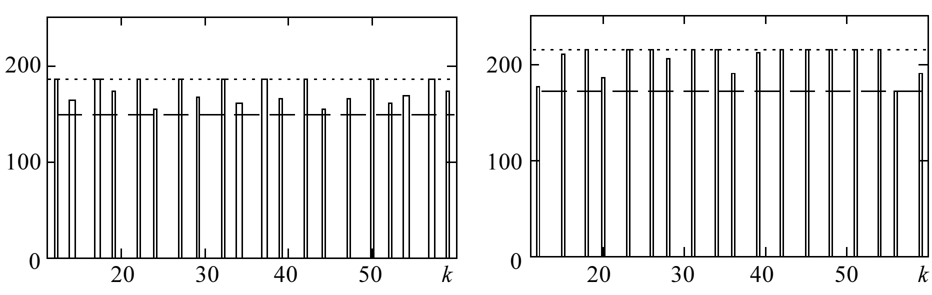

Рис. 7. Диаграммы поставок на розничные склады

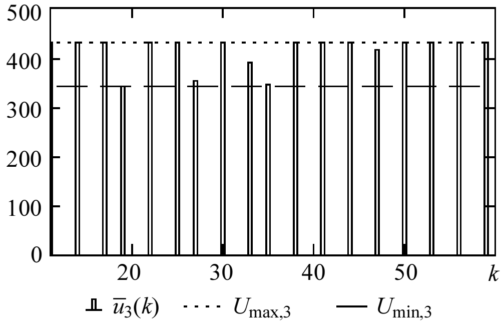

Рис. 8. Диаграмма поставок на оптовый склад

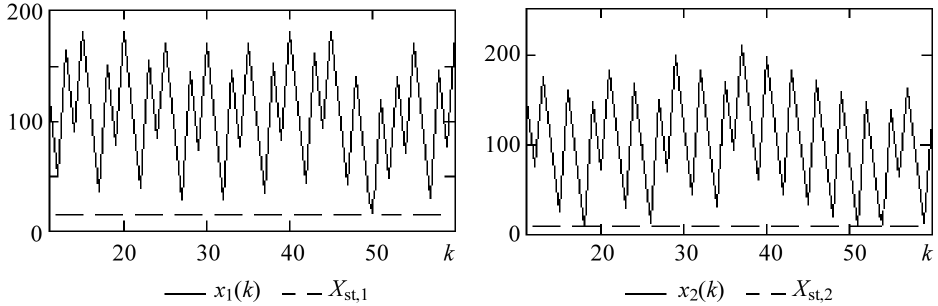

Рис. 9. Изменение количества товара на розничных складах

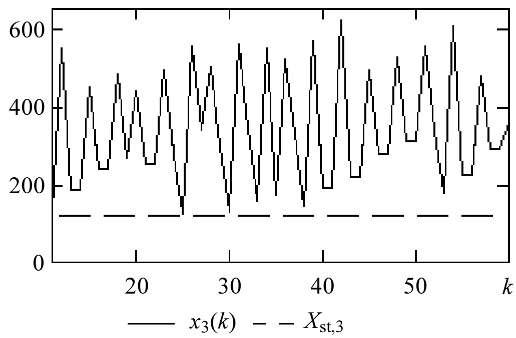

Рис. 10. Изменение количества товара на оптовом складе

Заключение

Разработан алгоритм управления запасами для систем складов с учетом многих транспортных запаздываний. Управление объектом с запаздываниями по управлению реализуется без расширения пространства состояния модели. В основу метода положена оптимизация модифицированного локального критерия и критерия суммарных издержек на скользящем интервале. Выполнено моделирование систем управления запасами для двух структур расположения складов.

Управление, полученное в результате реализации этого метода, может применяться для управления запасами в режиме реального времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дегтярев Г.Л.*, *Ризаев И.С.* Синтез локально-оптимальных алгоритмов управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1991. 304 с.
2. *Conte P.*, *Pennesi P.* Inventory control by model predictive control methods // Proc. 16th IFAC World Congress. Prague, 2005. P. 1–6.
3. *Смагин В.И.*, *Смагин С.В.* Адаптивное управление запасами с учетом ограничений и транспортных запаздываний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 3(4). С. 19–26.
4. *Мухина О.О.*, *Смагин В.И.* Моделирование системы управления запасами для системы складов, состоящей из оптового и розничных складов // Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Информационные технологии и математическое моделирование (ИТТМ-2010)». Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. С. 146–149.
5. *Смагин В.И.*, *Параев Ю.И.* Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во. Том. ун-та., 1996. 170 с.
6. *Athans M.* The matrix minimum principle // Information and Control. 1968. V. 11. No. 5/6. P. 592–606.
7. *Ханк Д.Э.*, *Уичерн Д.У.* Бизнес-прогнозирование. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. 656 с.

Мухина Оксана Олеговна
Смагин Валерий Иванович
Томский государственный университет
E-mail: oksm7@sibmail.com; vsm@mail.tsu.ru
Поступила в редакцию 17 февраля 2012 г.

Mukhina Oksana O., *Smagin Valery I.* (Tomsk State University). **Locally optimal inventory control with time delays in deliveries and transport restrictions.**

Keywords: inventory control, modeling, transportation delays, minimization of costs, local criterion.

The problem of inventory control of the echelon structure of warehouses and the structure, consisting of wholesale and retail warehouses, is considered. The peculiarity of the problem is the presence of many transportation delays and restrictions on the vehicle capacities. There are proposed algorithms for solution of this problem, which are based on optimization of the modified local criterion and the criterion of minimizing total costs on a sliding interval of optimization. The object control with delays in control is implemented without expansion of model. Control obtained by realization of this method can be applied in real-time mode.