УДК 519.2

Н.В. Степанова, А.Ф. Терпугов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТОРГОВОЙ ТОЧКИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА $M/M/1/\infty$ С ОТКАЗАМИ ОТ ПОСТАНОВКИ В ОЧЕРЕДЬ. ЧАСТЬ 2. ПОТОК ЗАЯВОК, ОТКАЗАВШИХСЯ ОТ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Изучаются свойства потока необслуженных заявок системы массового обслуживания типа $M/M/1/N-1$. Получены асимптотические выражения для математического ожидания и дисперсии числа событий в уходящем (необслуженном) потоке.

Ключевые слова: *система массового обслуживания*, *выходящий поток.*

Рассмотрена система массового обслуживания, в которой на вход поступает простейший поток заявок с параметром λ. Время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Пусть r_i вероятность того, что данная заявка, застав в системе i заявок, в очередь не становится и покидает систему. В работе [1] рассмотрена система массового обслуживания с ожиданием и дисциплиной обслуживания, заключающейся в том, что если поступающее требование застает в системе i заявок, то с вероятностью r_i, $0 \le r_i \le 1$, оно в очередь не становится и покидает систему, а с вероятностью $1 - r_i$ становится в очередь для ожидания обслуживания, завершив которое требование покидает систему. В первой части [1] этой работы изучались свойства выходящего потока заявок рассматриваемой системы массового обслуживания. Во второй части выполнено исследование потока заявок, отказавшихся от обслуживания.

1. Исследование потока уходящих требований

Для исследования потока потока уходящих требований введем обозначения:

$m(t)$ – число заявок, отказавшихся от обслуживания (поток уходящих требований) в течение времени t;

$i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t.

Для рассматриваемой системы массового обслуживания (СМО) процесс $m(t)$ немарковский, поэтому рассмотрим случайный процесс $\{i(t),m(t)\}$, который является двумерной цепью Маркова, поэтому для его распределения вероятностей

$$P(i,m,t) = P\{i(t)=i, m(t)=m\}$$

при $i > 0$ можно записать равенства [1,2]

$$P(i,m,t+\Delta t) = P(i,m,t)[1-(\lambda+\mu)\Delta t] + P(i,m-1,t)\lambda\Delta t \cdot r_i + \\ + P(i-1,m,t)\lambda\Delta t\cdot(1-r_{i-1}) + P(i+1,m,t)\mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad (1)$$

откуда получаем

$$\frac{\partial P(i,m,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu)P(i,m,t) + \lambda r_i P(i,m-1,t) + \\ + \lambda(1-r_{i-1})P(i-1,m,t) + \mu P(i+1,m,t). \qquad (2)$$

При $i = 0$ аналогично можно получить

$$\frac{\partial P(0,m,t)}{\partial t} = -\lambda P(0,m,t) + \lambda r_0 P(0,m-1,t) + \mu P(1,m,t). \qquad (3)$$

Обозначив

$$H(i,u,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P(i,m,t), \qquad (4)$$

получим для этих функций систему уравнений

$$\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial t} = -\lambda H(0,u,t) + \lambda r_0 e^{ju} H(0,u,t) + \mu H(1,u,t),$$

$$\frac{\partial H(i,u,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu) H(i,u,t) + \lambda r_i e^{ju} H(i,u,t) + \lambda(1-r_{i-1}) H(i-1,u,t) + \mu H(i+1,u,t),$$

которую для удобства перепишем в виде

$$\frac{\partial H(0,u,t)}{\partial t} = -\lambda(1-r_0) H(0,u,t) + \lambda r_0 (e^{ju}-1) H(0,u,t) + \mu H(1,u,t),$$

$$\frac{\partial H(i,u,t)}{\partial t} = \lambda(1-r_{i-1}) H(i-1,u,t) - [\lambda(1-r_i)+\mu] H(i,u,t) +$$
$$+ \mu H(i+1,u,t) + (e^{ju}-1)\lambda r_i H(i,u,t).$$

Вводя вектор-строку

$$H(u,t) = \{H(0,u,t), H(1,u,t), \ldots\},$$

перепишем эту систему в матричном виде

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\{Q + \lambda(e^{ju}-1) r\}, \qquad (5)$$

где r – диагональная матрица с элементами r_i по главной диагонали, а матрица Q – трехдиагональная инфинитезимальная матрица процесса гибели и размножения $i(t)$, введённая в первой части [1].

Для дифференциально-матричного уравнения (5) начальное условие, как и в случае потока обслуженных заявок, возьмём в виде

$$H(u,0) = R = H(0,t),$$

где R– вектор-строка стационарного распределения вероятностей в цепи Маркова процесса $i(t)$, удовлетворяющий условиям $RQ = 0$, $RE = 1$. Он был найден ранее в [1].

Таким образом, для вектор-строки $H(u, t)$ имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\{Q + \lambda(e^{ju}-1) r\}, \\ H(u,0) = R, \end{cases} \qquad (6)$$

решение которой однозначно определяет характеристическую функцию величины $m(t)$ равенством

$$\mathrm{M}\left\{ e^{jum(t)} \right\} = H(u,t) E, \qquad (7)$$

где E – вектор-столбец, составленный из единиц.

2.Метод моментов

Обозначив вектор-строку

$$m_1(t) = \frac{1}{j}\frac{\partial H(u,t)}{\partial u}\bigg|_{u=0},$$

из (6) получим

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = m_1(t)Q + R\lambda r .$$

Так как

$$\mathrm{M}\{m(t)\} = m_1(t)E ,$$

то
$$\frac{d\,\mathrm{M}\{m(t)\}}{dt} = m_1(t)QE + \lambda RrE = \lambda RrE, \tag{8}$$

и, следовательно,
$$\mathrm{M}\{m(t)\} = \lambda RrE \cdot t = \kappa_1 t. \tag{9}$$

Здесь
$$\kappa_1 = \lambda RrE = \lambda\sum_{i=0}^{\infty} r_i R(i) .$$

Упростим это выражение. В процессе вывода стационарного распределения $R(i)$ было получено соотношение

$$\lambda(1-r_{i-1})R(i-1) = \mu R(i) .$$

Отсюда
$$\lambda r_i R(i) = \lambda R(i) - \mu R(i+1) .$$

Суммируя по i, получаем

$$\lambda\sum_{i=0}^{\infty} r_i R(i) = \lambda\sum_{i=0}^{\infty} R(i) - \mu\sum_{i=0}^{\infty} R(i+1) = \lambda - \mu\sum_{s=1}^{\infty} R(s) = \lambda - \mu(1-R(0)) ,$$

так что

$$\kappa_1 = \lambda - \mu(1-R(0)), \qquad \mathrm{M}\{m(t)\} = [\lambda - \mu(1-R(0))]\cdot t. \tag{10}$$

Заметим, что выполняется соотношение

$$\mathrm{M}\{n(t)\} + \mathrm{M}\{m(t)\} = \lambda t ,$$

что вполне естественно.

3.Решение задачи (6) методом преобразования Фурье

Введём преобразование Фурье по t от вектор-функции $H(u, t)$:

$$Y(u,\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha t} H(u,t)dt. \tag{11}$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} e^{j\alpha t}\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}dt = e^{j\alpha t}H(u,t)\Big|_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} H(u,t)d_t e^{j\alpha t} = -R - j\alpha Y(u,\alpha)$$

и уравнение (5) принимает вид

$$-R - j\alpha Y(u,\alpha) = Y(u,\alpha)\left\{ Q + (e^{ju}-1)\lambda r \right\} .$$

Его решение:

$$Y(u,\alpha) = R\left[\lambda r - Q - j\alpha I - e^{ju}\lambda r\right]^{-1} =$$

$$= R\left\{(\lambda r - Q - j\alpha I)\left[I - e^{ju}(\lambda r - Q - j\alpha I)^{-1}\lambda r\right]\right\}^{-1} =$$

$$= R\left[I - e^{ju}(\lambda r - Q - j\alpha I)^{-1}\lambda r\right]^{-1}(\lambda r - Q - j\alpha I)^{-1} =$$

$$= R\sum_{m=0}^{\infty} e^{jum}\left[(\lambda r - Q - j\alpha I)^{-1}\lambda r\right]^{m}(\lambda r - Q - j\alpha I)^{-1}.$$

В силу (4) и (11) для преобразования Фурье от $P(m, t)$ имеем

$$P(m,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha t} R\left[(\lambda r - Q - j\alpha I)^{-1}\lambda r\right]^{m}(\lambda r - Q - j\alpha I)^{-1} E d\alpha. \qquad (12)$$

Численная реализация этих формул достаточно проблематична, так как требует обращения бесконечных матриц и нахождения значений несобственных интегралов, поэтому рассмотрим приближенное решение задачи (6) асимптотическим методом при условии растущего времени t.

4. Решение задачи (6) асимптотическим методом в условии растущего времени

Пусть T – некоторая достаточно большая величина, для которой будем полагать, что $T \to \infty$.

Условие $t = \tau T$, где $0 \le \tau < \infty$, будем называть асимптотическим условием растущего времени [4].

Асимптотикой первого порядка для характеристической функции

$$H(u,t)\cdot E = \mathrm{M}\left\{e^{jum(t)}\right\}$$

числа событий $m(t)$, наступивших в потоке необслуженных требований за время t, будем называть функцию $h_1(u, t)$ вида

$$h_1(u,t) = \exp\{ju\kappa_1 t\},$$

где константа κ_1 определена выше и имеет вид

$$\kappa_1 = \lambda R r E = \lambda - \mu(1 - R(0)).$$

5. Асимптотика второго порядка

Для построения асимптотики второго порядка в уравнении задачи (6)

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = H(u,t)\left\{Q + \lambda(e^{ju} - 1)r\right\}$$

выполним замену

$$H(u,t) = H_2(u,t)e^{ju\kappa_1 t}. \qquad (13)$$

Тогда для функции $H_2(u, t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t} = H_2(u,t)\left\{Q + \lambda(e^{ju} - 1)r - ju\kappa_1 I\right\},$$

где I – единичная матрица. В этом уравнении, обозначив $\varepsilon^2 = 1/T$, выполнив замены

$$t\varepsilon^2 = \tau, \qquad u = \varepsilon w, \qquad H_2(u,t) = F_2(w,\tau,\varepsilon), \tag{14}$$

получим уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(u,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = F_2(u,\tau,\varepsilon)\left\{Q + (e^{j\varepsilon w} - 1)\lambda r - j\varepsilon w \kappa_1 I\right\}. \tag{15}$$

Это уравнение решим в два этапа.

Этап 1. Решение $F_2(w,\tau,\varepsilon)$ уравнения (15) запишем в виде

$$F_2(w,\tau,\varepsilon) = \Phi_2(w,\tau)\{R + j\varepsilon w f_2\} + O(\varepsilon^2) \tag{16}$$

и найдём вектор-строку f_2, а скалярную функцию $\Phi_2(w,\tau)$ определим ниже на втором этапе.

Уравнение (15) перепишем в виде

$$O(\varepsilon^2) = F_2(w,\tau,\varepsilon)\{Q + j\varepsilon w\lambda r - j\varepsilon w\kappa_1 I\} =$$

$$= (R + j\varepsilon w f_2)\{Q + j\varepsilon w(\lambda r - \kappa_1 I\} =$$

$$= RQ + j\varepsilon w\{R(\lambda r - \kappa_1 I) + f_2 Q\} =$$

$$= j\varepsilon w\{f_2 Q + R(\lambda r - \kappa_1 I)\}.$$

Отсюда получим, что вектор f_2 является решением неоднородной системы уравнений

$$f_2 Q + R(\lambda r - \kappa_1 I) = 0. \tag{17}$$

В силу того, что Q – вырожденная матрица, на f_2 для его однозначного определения можно наложить дополнительное условие. Наложим его в виде

$$f_2 E = 0.$$

Этап 2. Умножая дифференциально-матричное уравнение (15) на вектор E, получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} E = F_2(w,\tau,\varepsilon)\left\{QE + (e^{j\varepsilon w} - 1)\lambda r E - j\varepsilon w\kappa_1 E\right\} =$$

$$= F_2(w,\tau,\varepsilon)\left\{ j\varepsilon w(\lambda r - \kappa_1 I)E + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\lambda r E\right\} + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя сюда разложение (16), получим равенство

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi_2(w,\tau)}{\partial \tau} RE = \Phi_2(w,\tau)(R + j\varepsilon w f_2)\left\{ j\varepsilon w(\lambda r - \kappa_1 I)E + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\lambda r E\right\} =$$

$$= \Phi_2(w,\tau)\left\{ j\varepsilon w R(\lambda r - \kappa_1 I)E + \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}[R\lambda r E + 2 f_2(\lambda r - \kappa_1 I)E]\right\} + O(\varepsilon^3) =$$

$$= \Phi_2(w,\tau)\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\{\lambda R r E + 2 f_2 \lambda r E\} + O(\varepsilon^3),$$

из которого получим уравнение для скалярной функции $\Phi_2(w,\tau)$:

$$\frac{\partial \Phi_2(w,\tau)}{\partial \tau} = \Phi_2(w,\tau)\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2, \tag{19}$$

где

$$\kappa_2 = \lambda R r E + 2\lambda f_2 r E. \tag{20}$$

Отсюда получаем, что функция $\Phi_2(w, \tau)$ имеет вид

$$\Phi_2(w,\tau) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\tau\right\}.$$

Подставляя это выражение в (16), получим

$$F_2(w,\tau,\varepsilon)E = \Phi_2(w,\tau)\{RE + j\varepsilon w f_2 E\} + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \Phi_2(w,\tau) + O(\varepsilon^2) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\tau\right\} + O(\varepsilon^2).$$

Выполнив здесь обратные к (14) замены, получим

$$H_2(u,t)E = \exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\kappa_2 t\right\} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Подставляя это выражение в (13), получим

$$Me^{jum(t)} = H(u,t)E = H_2\ (u,t)Ee^{juk_1t} = \left\{\exp\left[\frac{(ju)^2}{2}\ k_2 t\right] + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\}\ e^{juk_1t} =$$

$$= \exp\left\{juk_1t + \frac{(ju)^2}{2}\ k_2 t\right\} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Функция $h_2(u,t) = \exp\left\{ju\kappa_1 t + \frac{(ju)^2}{2}\ \kappa_2 t\right\}$ будет являться асимптотикой второго порядка.

Здесь величина κ_2 определяется равенством (20)

$$\kappa_2 = \lambda RrE + 2\lambda f_2 rE = \kappa_1 + 2\lambda f_2 rE,$$

в котором f_2 определяется системой (17), (18).

Отсюда следует, что при больших t величина $m(t)$ является асимптотически нормальной случайной величиной с $\mathrm{M}\{m(t)\} = \kappa_1 t$ и дисперсией $\mathrm{D}\{m(t)\} = \kappa_2 t$.

Очевидно, что если $f_2 rE \neq 0$, то поток $m(t)$ не является пуассоновским, так как нарушено необходимое условие $\mathrm{M}\{m(t)\} = \mathrm{D}\{m(t)\}$ пуассоновского распределения.

6. Вычисление вектора f_2

Обозначим через c вектор-строку $c = R(\kappa_1 I - \lambda r)$. Тогда система (17), (18) принимает вид

$$f_2 Q = c, \quad f_2 E = 0.$$

В явном виде первое уравнение этой системы имеет вид

$$-\lambda(1-r_0)f_2(0) + \mu f_2(1) - c(0) = 0,$$

$$\lambda(1-r_0)f_2(0) - [\lambda(1-r_1)+\mu]f_2(1) + \mu f_2(2) - c(1) = 0, \qquad (21)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda(1-r_{i-1})f_2(i-1) - [\lambda(1-r_i)+\mu]f_2(i) + \mu f_2(i+1) - c(i) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\ .$$

Суммируя первые i уравнений этой системы, получим

$$-\lambda(1-r_0)f_2(0)+\mu f_2(1)-c(0)=0\,,$$
$$-\lambda(1-r_1)f_2(1)+\mu f_2(2)-c(0)-c(1)=0\,, \tag{22}$$
$$-\lambda(1-r_{i-1})f_2(i-1)+\mu f_2(i)-\sum_{\nu=0}^{i-1}c(\nu)=0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

Отсюда получаем рекуррентное соотношение для $f_2(i)$:

$$f_2(i)=\rho(1-r_{i-1})f_2(i-1)+\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=0}^{i-1}c(\nu). \tag{23}$$

Если обозначить $\frac{1}{\mu}\sum_{\nu=0}^{i-1}c(\nu)=b(i)$, то дальнейший вывод буквально повторяет вывод явного выражения для вектора f. Поэтому

$$f_2(i)=f_2(0)\rho^i\prod_{k=0}^{i-1}(1-r_k)+\sum_{\nu=1}^{i-1}b(\nu)\prod_{k=\nu}^{i-1}(1-r_k)+b(i)\,,$$
$$-f_2(0)=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{i-1}b(\nu)\prod_{k=\nu}^{i-1}(1-r_k)+b(i)\right\}}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\rho^i\prod_{k=0}^{i-1}(1-r_k)}.$$

Эти формулы позволяют, по крайней мере численно, вычислить κ_2, а с ним и дисперсию величины $m(t)$.

Заключение

1. Исследован поток требований, получивших отказы. Получены точные формулы для среднего числа событий в потоке.

2. Методом асимптотического анализа, предложенным А.А. Назаровым [4], в условиях растущего времени получены асимптотические выражения для математического ожидания и дисперсии числа событий в уходящем (необслуженном) потоке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанова Н.В.*, *Терпугов А.Ф.* Математическая модель торговой точки в виде системы массового обслуживания типа M/M/1/∞ с отказами от постановки в очередь. Часть I. Выходящий поток обслуженных требований // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 1(6). С. 59–68.
2. *Лопухова С.В.* Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008.
3. *Назаров А.А.*, *Терпугов А.Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
4. *Назаров А.А.*, *Моисеева С.П.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006.

Степанова Наталья Викторовна
Томский государственный университет
E-mail: natalia0410@rambler.ru

Поступила в редакцию 30 января 2012 г.

Stepanova Natalia V., *Terpugov Alexander F.* (Tomsk State University). **Mathematical model of the trade as a queuing system of M/M/1/∞ type with the refusal of queuing. Part 2. The flow of cancelled from service orders.**

Keywords: mass service system, leaving stream.

The queuing system with Poisson flow of orders with parameter λ is analyzed. Time of service has exponential distribution with parameter μ. Let r_i be probability that the given order arriving at the system when *i* orders are waiting for a service in the line, will not stand in a queue and leaves the system. The first paper studies queuing system in which the order arriving at the system with a queue of length *i* with probability r_i, $0 \le r_i \le 1$ will not stand in a queue. The first part of this paper the characteristics of leaving order flow is investigated. The second part of this paper contains the study of the flow of orders which denied the service. Explicit formulas for an average number of events in a flow are obtained. By the method of asymptotic analysis suggested by A.A. Nazarov in conditions of increasing service time we have got asymptotic expressions for mathematical expectation and variance of events in the leaving (unserved) flow.