ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

Ю.Б. Буркатовская, С.Э. Воробейчиков, Е.Е. Сергеева

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕДУР ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ И ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ ОБОБЩЕННОГО АВТОРЕГРЕССИОННОГО ПРОЦЕССА С УСЛОВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В работе исследованы асимптотические свойства последовательных процедур оценивания параметров и обнаружения момента изменения значений параметров процесса GARCH(p,q), параметры которого предполагаются неизвестными до и после момента разладки. Численное моделирование показало работоспособность предложенных процедур.

Ключевые слова: *GARCH(p,q)*, *момент разладки*, *метод наименьших квадратов*, *среднеквадратическое отклонение*, *гарантированное оценивание*, *центральная предельная теорема для мартингалов.*

Авторегрессионные модели с условной неоднородностью (GARCH) находят широкое применение в задачах последовательного анализа данных. При описании процессов типа GARCH предполагается, что на текущую изменчивость дисперсии влияют как предыдущие изменения показателей, так и предыдущие значения дисперсии, вследствие чего модель хорошо подходит для описания эволюции финансовых индексов [1].

Данная работа является продолжением статьи [2], в которой дан обзор методов оценивания параметров процесса GARCH(p,q) и предложена последовательная процедура обнаружения момента разладки процесса GARCH(p,q) с неизвестными авторегрессионными параметрами, основанная на сравнении оценок на различных временных интервалах. Для построения оценок используется взвешенный метод наименьших квадратов, который позволяет ограничить среднеквадратическое отклонение оценок от истинного значения параметров. Свойства оценок также позволяют получить теоретические границы для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала. В работе получены асимптотические верхние границы среднеквадратического отклонения оценок от истинного значения параметров вероятностей ошибок в процедуре обнаружения разладки. Результаты моделирования демонстрируют эффективность предложенной процедуры.

1. Постановка задачи

Рассматривается устойчивый случайный процесс GARCH(p,q)

$$x_n = \sigma_n \varepsilon_n,\ n = 0,1..., \tag{1}$$

где $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случай-

ных величин с нулевым средним, единичной дисперсией и известным распределением. Условная вариация процесса x_n имеет вид

$$\sigma_n^2 = a + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_{n-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \mu_i \sigma_{n-i}^2.$$

Параметры $\{a, \lambda_i\}$ предполагаются неизвестными, а параметры μ_i – известными, причем

$$a > 0, \lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q, 0 < \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j < 1. \quad (2)$$

Тогда процесс $\left\{\sigma_n^2\right\}$ является стационарным [1]. Вектор параметров $\Lambda = \left[a, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\right]$ меняет свое значение с Λ_0 на Λ_1 в неизвестный момент времени θ. Начальное и конечное значения параметров удовлетворяют условию

$$\left\|\Lambda_0 - \Lambda_1\right\|^2 \geq \Delta > 0,$$

где Δ является известным значением, определяющим минимальное расстояние между значениями параметров до и после момента разладки. Требуется по наблюдениям за процессом $\{x_n\}$ определить момент разладки.

2. Гарантированные оценки параметров

В [2] предложены гарантированные последовательные оценки вектора параметров Λ. В каждый момент n составляется вектор $F(n, \mu, x)$, рекуррентные уравнения для которого имеют вид

$$F_0(n, \mu, x) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \mu_j F_0(n-j, \mu, x), \quad F_i(n, \mu, x) = x_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \mu_j F_i(n-j, \mu, x), \quad i = \overline{1, p};$$

$$F(n_0 - j, \mu, x) = \left[1, x_{n_0-1-j}^2, \ldots, x_{n_0-p-j}^2\right], \quad j = \overline{0, q-1}.$$

Вводятся следующие обозначения:

$$m_n = \max\left\{F_0(n, \mu, x), \ldots, F_p(n, \mu, x)\right\}, \; y_n = x_n^2 / m_n, \; u_{n,i} = F_i(n, \mu, x) / m_n, 0 \leq i \leq p;$$

$$U_n = \left[u_{n,0}, \ldots, u_{n,p}\right]^T, \Lambda = \left[a, \lambda_1, \ldots, \lambda_p\right], \zeta_n = \left(\varepsilon_n^2 - 1\right) / B, \; B^2 = E\left(\varepsilon_n^2 - 1\right)^2, \; b_n = B \Lambda U_n.$$

Сначала для фиксированного значения параметра $H>0$ определяется момент остановки

$$\tau = \tau(H) = \inf\{N_1 > N + 1 : \upsilon_{\min}(N_1) \geq H\}, \quad (3)$$

где $\upsilon_{\min}(N_1)$ – минимальное собственное значение матрицы

$$\mathrm{A}(N_1) = \sum_{n=N+1}^{N_1} v(n, x) U_n U_n^T.$$

Положительные весовые функции $v(n, x)$ на интервале $[N+1, N+\sigma-1]$, где σ – наименьшее значение N_1, для которого матрица $\mathrm{A}(N_1)$ не вырождена, задаются следующим образом:

$$v(n, x) = 1 / \sqrt{\Gamma_N U_n^T U_n}. \quad (4)$$

Веса $v(n,x)$ на интервале $[N+\sigma,\tau]$ находятся из условий

$$\frac{\upsilon_{\min}(k)}{\Gamma_N}=\sum_{n=N+\sigma}^{k}v^2(n,x)U_n^TU_n,\quad \frac{\upsilon_{\min}(\tau)}{\Gamma_N}\geq\sum_{n=N+\sigma}^{\tau}v^2(n,x)U_n^TU_n,\quad \upsilon_{\min}(\tau)=H. \quad (5)$$

Множитель Γ_N используется для компенсации неизвестной дисперсии помех и выбирается в одной из форм:

$$a)\quad \Gamma_N=C_N\left(\sum_{l=N_0}^{N}z_l\right)^2,\quad C_N=B^2E\left(\sum_{l=N_0}^{N}\varepsilon_l^2\right)^{-2};$$

$$b)\quad \Gamma_N=C_N\sum_{l=N_0}^{N}z_l^2,\quad C_N=B^2E\left(\sum_{l=N_0}^{N}\varepsilon_l^4\right)^{-1};$$

$$z_n=x_n^2\Big/\min\left\{F_0(n,\mu,x),\ldots,F_p(n,\mu,x)\right\}. \quad (6)$$

Из соотношений (6) следует, что

$$E\frac{1}{\Gamma_n}\leq\frac{1}{C},\quad b_n^2\leq C=B^2\left(a+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\right)^2. \quad (7)$$

Затем строится оценка параметров вида

$$\Lambda^*(H)=\left(\sum_{n=N+1}^{\tau}v(n,x)y_nU_n^T\right)\mathrm{A}^{-1}(\tau),\quad \mathrm{A}(\tau)=\sum_{n=N+1}^{\tau}v(n,x)U_nU_n^T \quad (8)$$

Свойства предложенной оценки определяет теорема 1 [2]:

Теорема 1. Для любого значения параметра процедуры $H>0$ момент прекращения наблюдений $\tau(H)$ конечен с вероятностью единица и средний квадрат нормы отклонения оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству

$$E\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2\leq\frac{H+p}{H^2}.$$

3. Асимптотические свойства оценки

Для изучения асимптотических свойств оценки (8) нам понадобится следующий результат (аналогичные результаты для одномерного случая рассматриваются в [3, 4]).

Теорема 2. Пусть $\left\{F_k^n\right\}_{k\geq0}$ – неубывающий поток σ-алгебр, такой, что $F_0^n=\{\varnothing,\Omega\}$, $F_k^n\subseteq F_{k+1}^n$ для всех $0\leq k<n$. Пусть $Y^n=\sum_{k=1}^{\tau_n}\xi_k^n$, $\tau_n\leq n$, – марковский момент относительно $\left\{F_k^n\right\}_{k\geq0}$. Пусть при каждом $n\geq1$ последовательность $\xi^n=\left(\xi_k^n,F_k^n\right)$ является последовательностью мартингал-разностей, $E\left\|\xi_k^n\right\|^2<\infty$, и

$$(A)\quad \max_{1\leq k\leq\tau_n}\left\|\xi_k^n\right\|^2\xrightarrow{P}0;\qquad (B)\quad \sum_{k=1}^{\tau_n}E\left[\xi_k^n\left(\xi_k^n\right)^T\middle|F_{k-1}^n\right]\xrightarrow{P}\Sigma,$$

где Σ – случайная положительно определенная матрица, $E\Sigma < \infty$. Тогда $Y^n \xrightarrow{d} Y$, где Y – случайный вектор с характеристической функцией

$$Ee^{i\lambda^T Y} = E\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^T \Sigma \lambda\right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим вектор Y^n. Здесь и далее для упрощения записи положим $\tau_n = \tau$. Рассмотрим асимптотическое поведение его стохастической экспоненты $\Psi^n(\lambda)$. Представим ее в виде

$$\begin{aligned}
\Psi^n(\lambda) &= \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} \middle| F_{k-1}^n\right] = \\
&= \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]\right\} \times \\
&\times \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]\right\} \times \\
&\times \prod_{k=1}^{n}\left(1 + E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Введем обозначение $\alpha_k = E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]$ и покажем, что произведение двух последних множителей в (9) стремится к единице

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]\right\} \times \\
&\times \prod_{k=1}^{n}\left(1 + E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]\right) = \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1 + E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]\right) \times \\
&\times \exp\left\{-E\left[e^{i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)}} - 1 - i\lambda^T \xi_k^n \chi_{(k\le\tau)} \middle| F_{k-1}^n\right]\right\} = \prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)\exp\{-\alpha_k\}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством $\left|e^x - 1\right| \le e^{|x|}|x|$, получаем

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)\exp\{-\alpha_k\} - 1\right| = \left|\exp\left\{\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)\exp\{-\alpha_k\}\right)\right\} - 1\right| \le \\
&\le \exp\left\{\left|\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)\exp\{-\alpha_k\}\right)\right|\right\}\left|\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k)\exp\{-\alpha_k\}\right)\right| = \\
&= \exp\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(1+\alpha_k) - \alpha_k\right)\right|\right\}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(1+\alpha_k) - \alpha_k\right)\right|.
\end{aligned}$$

Используя неравенство $\left|\ln(1+x) - x\right| \le |x|^2$, имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(1+\alpha_k) - \alpha_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\ln(1+\alpha_k) - \alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2 \le \max_{1\le k\le n}|\alpha_k| \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|.$$

Поскольку $\left|e^{ix}-1-ix\right|\le x^2/2$, то верно

$$\max_{1\le k\le n}|\alpha_k|\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\le\frac{1}{4}\max_{1\le k\le n}E\left[\left(\lambda^T\xi_k^n\right)^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\sum_{k=1}^{n}E\left[\left(\lambda^T\xi_k^n\right)^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\le$$

$$\le\frac{\|\lambda\|^4}{4}\max_{1\le k\le n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\sum_{k=1}^{n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right].$$

Учитывая условия (*A*), (*B*) теоремы, получаем

$$\max_{1\le k\le n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\middle|F_{k-1}^n\right]\sum_{k=1}^{n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\le\max_{1\le k\le n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\middle|F_{k-1}^n\right]\mathrm{tr}\,\Sigma\xrightarrow{P}0.$$

Итак, произведение последних двух слагаемых в (9) стремится к единице.

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[e^{i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}}-1-i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[-\frac{1}{2}\left(\lambda^T\xi_k^n\right)^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[e^{i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}}-1-i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}+\frac{1}{2}\left(\lambda^T\xi_k^n\right)^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}.$$

Используя оценку $\left|e^{ix}-1-ix+x^2/2\right|\le|x|^3/6$ и учитывая условия (*A*), (*B*) теоремы, получаем

$$\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[e^{i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}}-1-i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}+\frac{1}{2}\left(\lambda^T\xi_k^n\right)^2\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}\le$$

$$\le\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}E\left[\frac{1}{6}\left|\lambda^T\xi_k^n\right|^3\chi_{(k\le\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}\le\exp\left\{\frac{\|\lambda\|^3}{6}\sum_{k=1}^{\tau_n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^3\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}\le$$

$$\le\exp\left\{\frac{\|\lambda\|^3}{6}\max_{1\le k\le n}\left\|\xi_k^n\right\|\sum_{k=1}^{\tau_n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}\xrightarrow{P}1.$$

Итак, нами получено предельное выражение для стохастической экспоненты

$$\lim_{n\to\infty}\Psi^n(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\tau_n}E\left[-\frac{1}{2}\lambda^T\xi_k^n\left(\xi_k^n\right)^T\lambda\middle|F_{k-1}^n\right]\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^T\Sigma\lambda\right\}=\Psi(\lambda),\ (10)$$

где сходимость понимается по вероятности.

Покажем теперь, что $Ee^{i\lambda^TY^n}\to E\Psi(\lambda)$. Представим $\Psi^n(\lambda)$ в следующем виде:

$$\Psi^n(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}E\left[e^{i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}}\middle|F_{k-1}^n\right]=\prod_{k=1}^{n}\left(1-E\left[1+i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}-e^{i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}}\middle|F_{k-1}^n\right]\right).$$

Используя неравенство $\left|e^{ix}-1-ix\right|\le x^2/2$, получаем

$$\left|\Psi^n(\lambda)\right|=\prod_{k=1}^{n}\left|1+E\left[1+i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}-e^{i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}}\middle|F_{k-1}^n\right]\right|\ge$$

$$\ge\prod_{k=1}^{n}\left(1-E\left[\left|1+i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}-e^{i\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\le\tau)}}\right|\middle|F_{k-1}^n\right]\right)\ge$$

$$\geq \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2}E\left[\left(\lambda^T\xi_k^n\chi_{(k\leq\tau)}\right)^2\middle|F_{k-1}^n\right]\right)\geq \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\|\lambda\|^2}{2}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi_{(k\leq\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right)=$$

$$=\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{\|\lambda\|^2}{2}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi_{(k\leq\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right)\right).$$

Учитывая условие (*A*), получаем, что для последнего выражения можно применить неравенство $\ln(1-x)\geq -2x$, которое верно для $x\in[0,1/2]$:

$$\left|\Psi^n(\lambda)\right|\geq\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}E\left[\|\lambda\|^2\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi_{(k\leq\tau)}\middle|F_{k-1}^n\right]\right)\geq\exp\left(-\|\lambda\|^2\sum_{k=1}^{\tau_n}E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\middle|F_{k-1}^n\right]\right).$$

Используя затем условие (*B*), получаем

$$\left|\Psi^n(\lambda)\right|\geq\exp\left(-\|\lambda\|^2\operatorname{tr}\Sigma\right)=c(\lambda)>0. \tag{11}$$

Рассмотрим случайную величину $m_n(\lambda)=e^{i\lambda^TY^n}\big/\Psi^n(\lambda)$. Тогда

$$\left|Ee^{i\lambda^TY^n}-E\Psi(\lambda)\right|\leq E\left|m^n(\lambda)\Psi^n(\lambda)-\Psi(\lambda)\right|\leq$$

$$\leq E\left|m^n(\lambda)\Psi^n(\lambda)-m^n(\lambda)\Psi(\lambda)\right|+E\left|m^n(\lambda)\Psi(\lambda)-\Psi(\lambda)\right|\leq$$

$$\leq E\left|m^n(\lambda)\right|\left|\Psi^n(\lambda)-\Psi(\lambda)\right|+E\left|\left(m^n(\lambda)-1\right)\Psi(\lambda)\right|. \tag{12}$$

Из (11) следует, что $\left|m^n(\lambda)\right|\leq 1/c(\lambda)<\infty$. В силу (19) и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, первое слагаемое в последнем выражении стремится к нулю. Рассмотрим второе слагаемое:

$$E\left|\left(m^n(\lambda)-1\right)\Psi(\lambda)\right|=E\left|\left(e^{i\lambda^TY^n}-\Psi^n(\lambda)\right)\frac{\Psi(\lambda)}{\Psi^n(\lambda)}\right|.$$

Из (10), (11) следует, что $\left|\Psi(\lambda)\big/\Psi^n(\lambda)\right|\leq 1/c(\lambda)<\infty$. Раскладывая функции в ряд Тейлора, имеем

$$\left|e^{i\lambda^TY^n}-\Psi^n(\lambda)\right|=\prod_{k=1}^{n}\left|e^{i\lambda^T\xi_k^n}-E\left[e^{i\lambda^T\xi_k^n}\middle|F_{k-1}^n\right]\right|=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left|1+i\lambda^T\xi_k^ne^{i\alpha\lambda^T\xi_k^n}-E\left[1+i\lambda^T\xi_k^n-\left(\lambda^T\xi_k^n\right)^2e^{i\beta\lambda^T\xi_k^n}\big/2\middle|F_{k-1}^n\right]\right|=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left|i\lambda^T\xi_k^ne^{i\alpha\lambda^T\xi_k^n}+\frac{1}{2}E\left[\left(\lambda^T\xi_k^n\right)^2e^{i\beta\lambda^T\xi_k^n}\middle|F_{k-1}^n\right]\right|\leq$$

$$\leq\prod_{k=1}^{n}\|\lambda\|\left(\left\|\xi_k^n\right\|\left|e^{i\alpha\lambda^T\xi_k^n}\right|+\frac{1}{2}\left(E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\left|e^{i\beta\lambda^T\xi_k^n}\right|\middle|F_{k-1}^n\right]\right)\right).$$

В силу условия (*A*) и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, второе слагаемое в (12) стремится к нулю. Отсюда получаем, что $Ee^{i\lambda^TY^n}\to E\Psi(\lambda)$.

Теорема 3. Пусть плотность распределения величин $\{\varepsilon_l\}$ такова, что

$$E\left(\sum_{l=N_0}^{N}\varepsilon_l^2\right)^{-3}<\infty,\quad E\left(\varepsilon_k^2-1\right)^4<\infty.$$

Тогда для достаточно больших значений параметра процедуры $H>0$ вероятность отклонения оценки $\Lambda^*(H)$ от истинного значения вектора параметров Λ удовлетворяет неравенству

$$P\left\{\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2>\delta\right\}\le 1-\left(2\Phi\left(\sqrt{\frac{\delta H^2}{H+p}}\right)-1\right)^{p+1}, \qquad (13)$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного одномерного нормального распределения.

Доказательство. Рассмотрим отклонение оценки от истинного значения параметра

$$\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2=\left\|\left(\sum_{k=N+1}^{\tau}b_k\zeta_k v(n,x)U_k^T\right)A^{-1}(\tau)\right\|^2\le\frac{1}{H^2}\left\|\sum_{k=N+1}^{\tau}b_k\zeta_k v(n,x)U_k^T\right\|^2. \qquad (14)$$

Изучим асимптотическое распределение вектора в правой части последнего неравенства. Для этого введем обозначения

$$Y^n=\frac{1}{\sqrt{H}}\sum_{k=N+1}^{\tau_n}b_k\zeta_k v(k,x)U_k^T=\sum_{n=N+1}^{\tau_n}\xi_k,\ \ \tau_n=\min\{\tau,n\},\ \ \xi_k=\frac{1}{\sqrt{H}}b_k\zeta_k v(k,x)U_k^T. \qquad (15)$$

Процесс $\{\xi_k\}$ является мартингал-разностью, поскольку

$$E[\xi_k|F_{k-1}]=\frac{b_k v(k,x)U_k^T}{\sqrt{H}}E[\zeta_k|F_{k-1}]=[0,\ldots,0].$$

Проверим для этих величин условие (A) теоремы 2. Используя свойства условных математических ожиданий и неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$P\left\{\max_{1\le k\le\tau_n}\left\|\xi_k^n\right\|^2>\delta\right\}\le P\left\{\sum_{k=N+1}^{\tau_n}\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi\left(\left\|\xi_k^n\right\|^2>\delta\right)>\delta\right\}\le\frac{1}{\delta}E\left(\sum_{k=N+1}^{\tau_n}\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi\left(\left\|\xi_k^n\right\|^2>\delta\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\delta}\sum_{k=N+1}^{n}EE\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi(\tau\ge k)\chi\left(\left\|\xi_k^n\right\|^2>\delta\right)\middle|F_{k-1}\right]=\frac{1}{\delta}E\sum_{k=N+1}^{n}\chi(\tau\ge k)E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi\left(\left\|\xi_k^n\right\|^2>\delta\right)\middle|F_{k-1}\right].$$

Используя соотношения $v(k,x)\le 1/\sqrt{\Gamma_N}$, $b_k^2\le C$ и $U_k^TU_k\le p+1$, неравенство Коши – Буняковского и неравенство Чебышева, имеем

$$E\left[\left\|\xi_k^n\right\|^2\chi\left(\left\|\xi_k^n\right\|^2>\delta\right)\middle|F_{k-1}\right]=\frac{Cv^2(k,x)U_k^TU_k}{H}E\left[\zeta_k^2\chi\left(\frac{C(p+1)}{H\Gamma_N}\zeta_k^2>\delta\right)\middle|F_{k-1}\right]\le$$

$$\le\frac{Cv^2(k,x)U_k^TU_k}{H}\sqrt{E\zeta_n^4}\sqrt{P\left\{\zeta_k^2>\frac{\delta H\Gamma_N}{C(p+1)}\right\}}\le\frac{Cv^2(k,x)U_k^TU_k}{H}\sqrt{E\zeta_n^4}\sqrt{\frac{C(p+1)}{\delta H\Gamma_N}}.$$

Отсюда, учитывая (4), (5), получаем

$$P\left\{\max_{1\le k\le\tau_n}\left\|\xi_k^n\right\|^2>\delta\right\}\le\sqrt{\frac{C^3(p+1)E\zeta_n^4}{\delta H}}\frac{1}{H}E\left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma_N}}\sum_{k=N+1}^{\tau}v^2(k,x)U_k^TU_k\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{C^3(p+1)E\zeta_n^4}{\delta H}}\frac{1}{H}E\left(\frac{1}{\sqrt{\Gamma_N}}\sum_{k=N+1}^{N+\sigma-1}v^2(k,x)U_k^TU_k+\frac{1}{\sqrt{\Gamma_N}}\sum_{k=N+\sigma}^{\tau}v^2(k,x)U_k^TU_k\right)\le$$

$$\le\sqrt{\frac{C^3(p+1)E\zeta_n^4}{\delta H}}\frac{p+H}{H}E\left(\frac{1}{\Gamma_N^{3/2}}\right).$$

Пусть множитель Γ_N выбран в форме (6a), тогда

$$E\frac{1}{\Gamma_N^{3/2}} = \frac{1}{C_N^{3/2}} E\left(\sum_{l=N_0}^{N} z_l\right)^{-3} \le \frac{1}{C^{3/2} C_N^{3/2}} E\left(\sum_{l=N_0}^{N} \varepsilon_l^2\right)^{-3}.$$

Если плотность распределения величин $\{\varepsilon_l\}$ такова, что математическое ожидание в правой части неравенства существует, то условие (A) теоремы 2 выполнено. Случай, когда множитель Γ_N выбран в форме (6b), может быть рассмотрен аналогично.

Проверим условие (B) теоремы 2:

$$E\left[\xi_k^n \left(\xi_k^n\right)^T \middle| F_{k-1}^n\right] = \frac{1}{H} E\left[b_k^2 \zeta_k^2 v^2(k,x) U_k U_k^T \middle| F_{k-1}^n\right] =$$

$$= \frac{1}{H} b_k^2 v^2(k,x) U_k U_k^T E\left[\zeta_k^2 \middle| F_{k-1}^n\right] = \frac{1}{H} b_k^2 v^2(k,x) U_k U_k^T.$$

Отсюда

$$\Sigma_n = \sum_{k=N+1}^{\tau_n} E\left[\xi_k^n \left(\xi_k^n\right)^T \middle| F_{k-1}^n\right] = \frac{1}{H} \sum_{k=N+1}^{\tau_n} b_k^2 v^2(k,x) U_k U_k^T.$$

Поскольку $b_k^2 \le C$, и учитывая (4), (5), получаем, что каждый элемент матрицы Σ_n ограничен сверху

$$\Sigma_n(i,j) \le \frac{1}{H} \sum_{k=N+1}^{\tau_n} b_k^2 v^2(k,x) \left\| U_k \right\| \le \frac{C}{H} \sum_{k=N+1}^{\tau_n} v^2(k,x) \left\| U_k \right\| \le \frac{C(p+H)}{\Gamma_N H}.$$

Таким образом, $\Sigma_n(i,j)$ является ограниченным сверху субмартингалом и, как показано в теореме Дуба [3], имеет предел, т.е.

$$\sum_{k=N+1}^{\tau_n} E\left[\xi_k^n \left(\xi_k^n\right)^T \middle| F_{k-1}^n\right] \xrightarrow{P} \Sigma,$$

причем $E\Sigma(i,j) < \infty$. Условие (B) теоремы 2 выполнено.

Устремляя в (15) $n \to \infty$, получаем

$$Y = \lim_{n\to\infty} Y^n = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum_{k=N+1}^{\tau} b_k \zeta_k v(k,x) U_k^T = \sum_{n=N+1}^{\tau} \xi_k.$$

Учитывая (14), $P\left\{\left\|\Lambda^*(H) - \Lambda\right\|^2 > \delta\right\} \le P\left\{\|Y\|^2 > \delta H\right\}$. Применяя теорему Фубини об изменении порядка интегрирования, получаем

$$P\left\{\|Y\|^2 > \delta H\right\} = \int_{YY^T > \delta H} \left(E \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p+1} |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} Y \Sigma^{-1} Y^T\right\} \right) dY =$$

$$= E\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p+1} |\Sigma|}} \int_{YY^T > \delta H} \exp\left\{-\frac{1}{2} Y \Sigma^{-1} Y^T\right\} dY \right).$$

Поскольку матрица Σ симметрична и положительно определена, существует ортогональное преобразование, которое приводит ее к диагональной матрице Σ' [5]:

$T\Sigma T^T = \Sigma'$, $TT^T = T^T T = I$, где I – единичная матрица. Делая замену переменных $S = Y\Sigma^{-1/2}T^T$, получаем

$$P\left\{\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2 > \delta\right\} \le E\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p+1}|\Sigma|}}\int\limits_{YY^T>\delta H}\exp\left\{-\frac{1}{2}Y\Sigma^{-1}Y^T\right\}dY =$$

$$= E\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p+1}}}\int\limits_{S\Sigma'S^T>\delta H}\exp\left\{-\frac{1}{2}SS^T\right\}dS \le E\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{p+1}}}\int\limits_{\mathrm{tr}(\Sigma)\max\limits_{0\le j\le p}s_j^2>\delta H}\exp\left\{-\frac{1}{2}SS^T\right\}dS.$$

Здесь $S = \left[s_0,\ldots,s_p\right]$ – стандартный нормально распределенный вектор. Отсюда

$$P\left\{\left\|\Lambda^*(H)-\Lambda\right\|^2 > \delta\right\} \le EP\left\{\max_{0\le j\le p}s_j^2 > \frac{\delta H}{\mathrm{tr}(\Sigma)}\right\} = 1-E\prod_{j=0}^{p}P\left\{s_j^2 \le \frac{\delta H}{\mathrm{tr}(\Sigma)}\right\} =$$

$$= 1-E\left(2\Phi\left(\sqrt{\frac{\delta H}{\mathrm{tr}(\Sigma)}}\right)-1\right)^{p+1}.$$

Используя свойства условных математических ожиданий и соотношения (4), (5) и (7), имеем

$$\mathrm{tr}(\Sigma) = \sum_{i=0}^{p}EZ_i^2 = \frac{1}{H}\sum_{i=0}^{p}E\left(\sum_{n=N+1}^{\tau}b_n\zeta_n v(n,x)u_{n,i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{H}\sum_{i=0}^{p}E\sum_{n=N+1}^{T}E\left[b_n^2\zeta_n^2v^2(n,x)u_{n,i}^2\chi_{(\tau\ge n)}\middle|F_{n-1}\right]+$$

$$+\frac{2}{H}\sum_{i=0}^{p}E\sum_{n=N+2}^{T}\sum_{k=N+1}^{n-1}E\left[b_kb_n\zeta_k\zeta_n v(k,x)v(n,x)u_{k,i}u_{n,i}\chi_{(\tau\ge n)}\middle|F_{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{H}\sum_{i=0}^{p}E\sum_{n=N+1}^{T}b_n^2v^2(n,x)u_{n,i}^2\chi_{(\tau\ge n)}E\left[\zeta_n^2\middle|F_{n-1}\right]+$$

$$+\frac{2}{H}\sum_{i=0}^{p}E\sum_{n=N+2}^{T}\sum_{k=N+1}^{n-1}b_kb_n\zeta_k v(k,x)v(n,x)u_{k,i}u_{n,i}\chi_{(\tau\ge n)}E\left[\zeta_n\middle|F_{n-1}\right] \le$$

$$\le \frac{C}{H}\sum_{i=0}^{p}E\sum_{n=N+1}^{\tau}v^2(n,x)u_{n,i}^2 \le E\frac{C(p+H)}{\Gamma_n H} \le \frac{p+H}{H}.$$

Отсюда получаем (13). Теорема доказана.

4. Построение процедуры обнаружения разладки

Рассмотрим процедуру определения момента разладки. Пусть матрица

$$\mathrm{A}(T_1,T_2) = \sum_{n=T_1}^{T_2}v(n,x)U_nU_n^T,$$

а $\upsilon_{\min}(T_1,T_2)$ – ее минимальное собственное значение. Весовые функции $v(n,x)$ определяются аналогично (4), (5). Строится последовательность моментов остановки

$$\tau_0 = N, \quad \tau_i = \min\left\{T > \tau_{i-1} : \upsilon_{\min}(\tau_{i-1}+1,T) \ge H\right\}, \quad i \ge 1.$$

На каждом интервале $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ находим оценку параметров $\Delta_i^*(H)$ процесса (1), построенную по формуле, аналогичной (13). С интервалом $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ для $i > m$ связывается статистика J_i:

$$J_i = (\Lambda_i^* - \Lambda_{i-m}^*)^T (\Lambda_i^* - \Lambda_{i-m}^*). \quad (16)$$

Алгоритм определения точки изменения параметров процесса заключается в следующем: значение заданной статистики (16) сравнивается с пороговым значением δ. Решение о наличии разладки принимается при превышении значения статистики J_i значения δ.

Теорема 4 [2]. Пусть $0 < \delta < \Delta$, тогда вероятность ложной тревоги P_0 и вероятность ложного спокойствия P_1 на любом интервале наблюдений $[\tau_{i-1}+1, \tau_i]$ являются ограниченными

$$P_0(H,\delta) \le \frac{4(H+p)}{H^2\delta}, \quad P_1(H,\delta) \le \frac{4(H+p)}{H^2\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)^2}. \quad (17)$$

Следующая теорема задает асимптотическую границу для вероятностей ошибок процедуры.

Теорема 5. Пусть $0 < \delta < \Delta$ и выполнены условия теоремы 3. Для больших значений параметра H вероятность ложной тревоги P_0 и вероятность ложного спокойствия P_1 удовлетворяют неравенствам

$$P_0(H,\delta) \le 1 - \left(2\Phi\left(\sqrt{\frac{\delta H^2}{2(H+p)}}\right) - 1\right)^{p+1}, \quad P_1(H,\delta) \le 1 - \left(2\Phi\left(\sqrt{\frac{\left(\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}\right)H^2}{2(H+p)}}\right) - 1\right)^{p+1}, \quad (18)$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного одномерного нормального распределения.

Доказательство. Рассмотрим вероятность ложной тревоги. В этом случае значение статистики J_i превышает порог δ до момента разладки θ. Используя свойства нормы вектора и неравенство Чебышева, а также утверждение Теоремы 1, получаем

$$P_0(H,\delta) = P\{J_i > \delta \mid \tau_i < \theta\} = P\left\{\|\sigma_i - \sigma_{i-m}\|^2 > \delta\right\}.$$

Для нахождения вероятности ложного спокойствия рассматриваются случаи, когда момент разладки уже наступил, а значение статистики (16) не превысило пороговое значение δ. Учитывая, что $\|\Lambda_1 - \Lambda_0\|^2 > \Delta > 0$ и используя свойства нормы, получаем

$$P_1(H,\delta) = P\{J_i < \delta \mid \tau_{i-m} < \theta < \tau_{i-1}\} = P\left\{\|\Lambda_1 - \Lambda_0 + \sigma_i - \sigma_{i-m}\|^2 < \delta\right\} \le$$
$$\le P\left\{\sqrt{\Delta} - \|\sigma_i - \sigma_{i-m}\| < \sqrt{\delta}\right\} = P\left\{\|\sigma_i - \sigma_{i-m}\| < \sqrt{\Delta} - \sqrt{\delta}\right\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 можно показать, что для случайного вектора $\sigma_i - \sigma_{i-m}$ вероятность больших уклонений от среднего не превышает аналогичной вероятности для нормально распределенного вектора с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей, след которой удовлетворяет условию $\mathrm{tr}(\Sigma) \le 2(H+p)/H$. Отсюда получаем (18). Теорема доказана.

Границы для вероятностей ложной тревоги и ложного спокойствия совпадают при $\delta = \Delta/4$, и это обеспечивает минимальное значение параметра H при данной верхней границе вероятности ошибки.

5. Результаты численного моделирования

Для определения качества получаемой оценки неизвестных параметров процесса и проверки работоспособности процедуры обнаружения разладки было проведено численное моделирование процесса GARCH(2,2) со стандартными гауссовскими шумами

$$x_n = \sigma_n \varepsilon_n, \;\; \sigma_n^2 = a + \lambda_1 x_{n-1}^2 + \lambda_2 x_{n-2}^2 + \mu_1 \sigma_{n-1}^2 + \mu_2 \sigma_{n-2}^2. \qquad (19)$$

Проводилась серия из 100 экспериментов. Моделировались реализации процесса (19) длиной по 20 000 значений. Параметры μ_1 и μ_2 предполагались известными и равными $\mu_1 = 0,2$, $\mu_2 = 0,1$. Истинные значения неизвестного вектора параметров $\Lambda = [a, \lambda_1, \lambda_2]$ задавались равными $a = 0,1,\ \lambda_1 = 0,5,\ \lambda_2 = 0,1$.

Таблица 1

Оценки параметров процесса

	Λ	Λ^*	T	MSE_p	MSE_t
H=45	$\begin{pmatrix}0,1\\0,5\\0,1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,1131\\0,4813\\0,0818\end{pmatrix}$	1274	0,0075	0,023
H=55	$\begin{pmatrix}0,1\\0,5\\0,1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,102\\0,4624\\0,1122\end{pmatrix}$	1857	0,007	0,018
H=65	$\begin{pmatrix}0,1\\0,5\\0,1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0,1033\\0,4992\\0,1056\end{pmatrix}$	2024	0,0056	0,016

Здесь через $\Lambda^* = [a^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*]$ обозначен вектор построенных оценок неизвестных параметров, MSE_t и MSE_p – значения среднеквадратического отклонения оценок от их истинных значений, полученные с помощью соотношений, доказанных в теореме 1 и в результате моделирования соответственно, T – средняя длина интервала оценивания параметров.

Для проверки работоспособности процедуры обнаружения разладки были проведены следующие численные эксперименты:

- для определения среднего значения момента изменения параметров процесса GARCH(2,2) было смоделировано 100 реализаций процесса длиной 20 000 значений. В каждой реализации задавался один момент разладки $\theta = 10\,000$. Вектор параметров $\Lambda = [a, \lambda_1, \lambda_2]$ в момент $\theta = 10\,000$ изменялся с $\Lambda_0 = [0,1, 0,5, 0,1]$ на $\Lambda_1 = [0,6, 0,1, 0,3]$. Исследовалась процедура определения момента разладки для различных значений параметров процедуры H и δ;

- для вычисления вероятности ложной тревоги и среднего времени между ложными тревогами рассматривалась реализация процесса длиной один миллион значений, не содержащая момента изменения параметров процесса. Фиксировались те моменты времени, когда процедура обнаруживает разладку;

- для нахождения вероятности запаздывания в обнаружении и среднего времени запаздывания рассматривалось 100 реализаций процесса (19) длиной 20 000 значений каждая, для которых момент разладки параметров процесса моделиро-

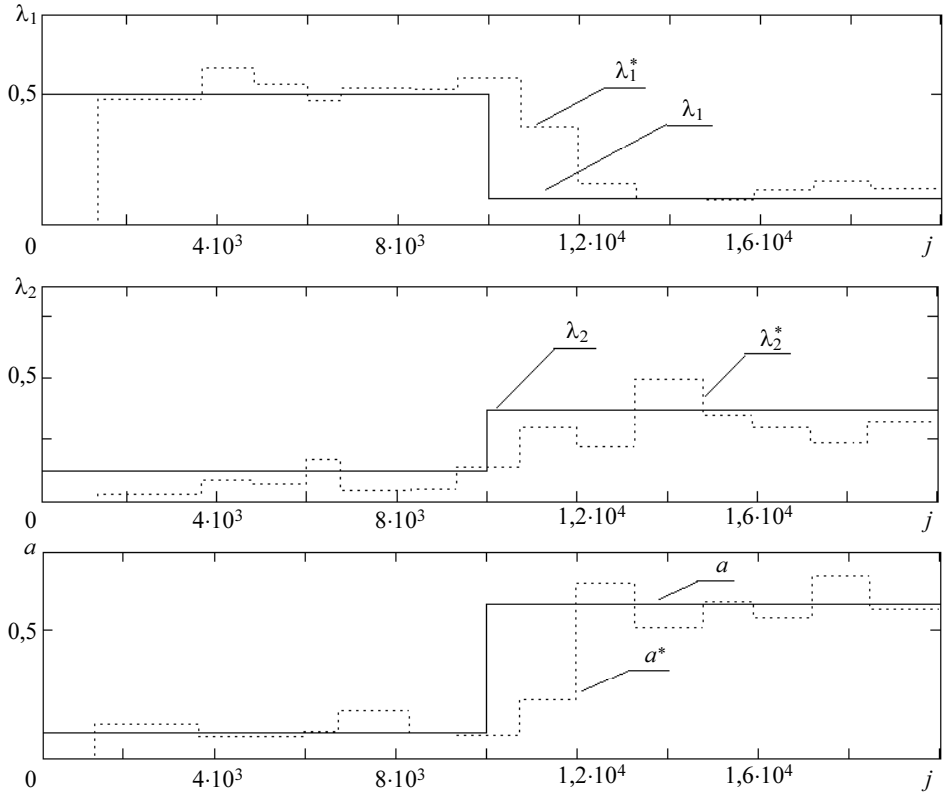
вался как равномерно распределенная случайная величина на интервале [9500, 10500]. Учитывались только те реализации процесса, для которых существовала задержка в обнаружении момента разладки.

Таблица 2

Оценки моментов изменения параметров и характеристики процедуры обнаружения

	θ*	P_0p	P_0A	P_0C	T_0	P_1p	P_1A	P_1C	T_0
H=45, δ=0,1	10889	0,034	0,415	0,928	46038	0,034	0,235	0,738	1031
H=55, δ=0,08	10959	0,0238	0,324	0,942	78417	0,017	0,159	0,501	874
H=65, δ=0,06	11590	0,0181	0,252	0,906	91130	0,01	0,108	0,384	678

Здесь θ* – среднее значение оценок моментов изменения параметров, вычисленное по 100 реализациям процесса; T_0 – среднее время между ложными тревогами; T_1 – среднее время запаздывания в обнаружении; P_0A, P_0C и P_0p обозначают вероятности ложной тревоги, полученные по формулам (18), (17) и в результате моделирования соответственно. Вероятности ложного спокойствия обозначены P_1A, P_1C и P_1p.



Результаты исследований демонстрируют эффективность предложенного метода оценки параметров процесса GARCH(p,q) и предложенной процедуры определения момента разладки. Точность оценки неизвестных параметров процесса зависит от выбора значения параметра H. С увеличением значения параметра H

уменьшается ошибка оценивания параметров. Таким образом, оценки получаются более точными, что показано на рис. 1–3, однако при этом увеличивается интервал оценивания. С уменьшением параметра процедуры δ уменьшается вероятность ложной тревоги и увеличивается интервал между ложными тревогами. С ростом H увеличивается точность оценивания параметров, что приводит к тому, что даже при уменьшении δ уменьшается вероятность запаздывания и сокращается время запаздывания. Во всех случаях выборочные характеристики процедуры обнаружения не превышают асимптотических теоретических границ, что позволяет сделать вывод о возможности их применения.

Заключение

В работе изложены последовательные процедуры оценивания параметров и обнаружения момента изменения значений параметров процесса GARCH(p,q), параметры которого предполагаются неизвестными до и после момента разладки. Исследованы асимптотические свойства предложенных процедур. Приведены результаты численного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // J. Econometrics. 1986. V. 86. P. 307–327.
2. *Буркатовская Ю.Б.*, *Воробейчиков С.Э.*, *Сергеева Е.Е.* Оценивание параметров и обнаружение момента их изменения для обобщенного авторегрессионного процесса с условной неоднородностью // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 48–57.
3. *Ширяев А.Н.* Вероятность: в 2 кн. Кн. 2. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МЦНМО, 2004. 408 с.
4. *Липцер Р.Ш.*, *Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.

Буркатовская Юлия Борисовна
Томский политехнический университет
Воробейчиков Сергей Эрикович, *Сергеева Екатерина Евгеньевна*
Томский государственный университет
E-mail: tracey@tpu.ru; sev@mail.tsu.ru; sergeeva_e_e@mail.ru Поступила в редакцию 14 декабря 2011 г.

Burkatovskaya Yulia B., *Vorobeychikov Sergey E.*, *Sergeeva Ekaterina E.* (Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University). **Asymptotic properties of parameter estimation and change-point detection procedures for a generalized autoregressive process with conditional heteroscedasticity.**

Keywords: GARCH(p,q), change-point, least squares method, mean square error, guaranteed estimation, martingale central limit theorem.

Problem of change-point detection of the parameters of GARCH(p,q) process is considered. The autoregressive parameters of the process before and after the change point are supposed to be unknown. A sequential procedure for estimating the parameters based on the weighted least squares method is developed. The choice of the weights and the stopping rule allows one to construct an estimator with a preassigned mean square error depending on parameter H of the procedure. The asymptotic properties of the proposed estimator are studied. The asymptotic bound for the mean square error is determined. The procedure of change-point detection is based on comparison of the parameter estimators at different observation intervals. The upper bounds for probability characteristics of the proposed procedure: probabilities of the false alarm and the delay are found. The results of numerical simulation demonstrating the performance of the procedure are reported.