ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2012 Управление, вычислительная техника и информатика № 2(19)

УДК 519.21

А.М. Горцев, А.А. Калягин

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА

Изучается обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок (событий), функционирующих в современных цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Приводятся явные выражения плотности вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей длительности двух соседних интервалов. Формулируются условия рекуррентности потока событий.

Ключевые слова: *обобщенный полусинхронный поток событий, плотность вероятностей, совместная плотность вероятностей, рекуррентность потока событий.*

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование обобщенного полусинхронного потока событий, начатое в работах [1, 2]. Обобщенный полусинхронный поток событий (далее – поток) относится к классу дважды стохастических потоков и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в ЦСИО [3]. С одной стороны, параметры потока событий и его состояния оказывают непосредственное влияние на процесс функционирования системы массового обслуживания. С другой стороны, в реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что еще более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [1, 2]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [4].

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока в первую очередь необходимо знание вероятностных свойств потока. В настоящей статье находятся явные виды плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1,2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \le 1$); с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии будет распределена по экспоненциальному закону с параметром $p\lambda_1$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ $(0 \le \delta \le 1)$ дополнительное событие в первом состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{matrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2+\alpha) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{matrix} \right\| = \| D_0 \,|\, D_1 \|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположенным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1,2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; t_1, t_2,… – моменты наступления событий; t_4,… – моменты инициирования дополнительных событий с вероятностью δ. Если $\delta = 0$, то имеет место обычный полусинхронный поток событий [4].

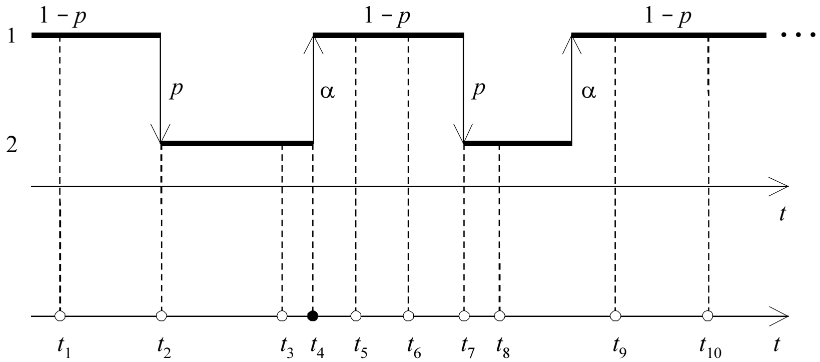

Рис. 1. Формирование обобщенного полусинхронного потока

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий t_1, t_2,… . Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий t_1, t_2,…, t_k, … образует вложенную цепь Маркова, т.е. обобщенный полусинхронный поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момент наступления события), $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – значение длительности k-го интервала между соседними событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \ge 0$, для любого k. В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$. Пусть теперь (t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассматривать соседние интервалы (t_1, t_2), (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ – моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Задача заключается в нахождении явного вида $p(\tau)$ и явного вида $p(\tau_1,\tau_2)$, а также в установлении условий рекуррентности обобщенного полусинхронного потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p(\tau)$

Введем в рассмотрение вероятности $p_{ij}(\tau)$ того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$ $(i, j = 1,2)$. При этом, в силу предпосылок, $p_{12}(\tau) = 0$ для любого τ. Тогда, в соответствии с определением потока, $p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau(1- p) + o(\Delta\tau)$ – совместная вероятность перехода на интервале $(0, \tau)$ процесса $\lambda(\tau)$ из первого состояния в первое, наступления события потока на полуинтервале $[\tau. \tau + \Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ – достаточно малая величина, и перехода на этом полуинтервале процесса $\lambda(\tau)$ из первого состояния в первое. Аналогичные совместные вероятности примут вид

$$p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau p + o(\Delta\tau);\quad p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau + o(\Delta\tau);\quad p_{22}(\tau)\alpha\Delta\tau\delta + o(\Delta\tau);$$
$$p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau(1-p) + o(\Delta\tau);\quad p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau p + o(\Delta\tau).$$

Соответствующие плотности вероятностей выпишутся в виде

$$\begin{gathered}\tilde{p}_{11}(\tau) = (1-p)\lambda_1 p_{11}(\tau);\ \tilde{p}_{12}(\tau) = p\lambda_1 p_{11}(\tau);\\ \tilde{p}_{21}(\tau) = (1-p)\lambda_1 p_{21}(\tau) + \alpha\delta p_{22}(\tau);\ \tilde{p}_{22}(\tau) = p\lambda_1 p_{21}(\tau) + \lambda_2 p_{22}(\tau).\end{gathered} \tag{1}$$

Составляя дифференциальные уравнения относительно неизвестных $p_{ij}(\tau)$, $i,j = 1,2$, ($p_{12}(\tau) = 0$) и решая полученные уравнения с соответствующими граничными условиями: $p_{11}(0) = p_{22}(0) = 1$, $p_{21}(0) = 0$, находим

$$p_{11}(\tau) = e^{-\lambda_1\tau},\ p_{22}(\tau) = e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau},\ p_{21}(\tau) = \frac{\alpha(1-\delta)}{\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha}(e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau} - e^{-\lambda_1\tau}). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i,j = 1,2$.

Введем в рассмотрение вероятность $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в i –м состоянии при условии, что в момент $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1,2$ $(\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1)$. Тогда, так как моменты наступления событий образуют вложенную цепь Маркова, справедливы следующие уравнения для вероятностей $\pi_i(0)$:

$$\pi_1(0) = \pi_1(0)p_{11} + \pi_2(0)p_{21};\ \pi_2(0) = \pi_1(0)p_{12} + \pi_2(0)p_{22}, \tag{3}$$

где p_{ij} – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до наступления следующего события потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из i-го состояния в j-е $(i, j = 1,2)$. При этом вероятности p_{ij} определятся в виде

$$p_{11}=\int_0^\infty \tilde p_{11}(\tau)d\tau=(1-p)\lambda_1\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau;\ p_{12}=\int_0^\infty \tilde p_{12}(\tau)d\tau=p\lambda_1\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau;$$
$$p_{21}=\int_0^\infty \tilde p_{21}(\tau)d\tau=(1-p)\lambda_1\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau+\alpha\delta\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau; \qquad (4)$$
$$p_{22}=\int_0^\infty \tilde p_{22}(\tau)d\tau=p\lambda_1\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau+\lambda_2\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau,$$

где $\tilde p_{ij}(\tau)$ определены в (1), $p_{ij}(\tau)$ – в (2). Подставляя (2) в (4), находим

$$p_{11}=1-p;\, p_{12}=p;\ p_{21}=\alpha(1-p+p\delta)/(\alpha+\lambda_2);\ p_{22}=[\lambda_2+p\alpha(1-\delta)]/(\alpha+\lambda_2). \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получаем

$$\pi_1(0)=\alpha(1-p+p\delta)/[\alpha+(\lambda_2+\alpha\delta)p];\ \pi_2(0)=p(\alpha+\lambda_2)/[\alpha+(\lambda_2+\alpha\delta)p]. \qquad (6)$$

Тогда плотность вероятностей $p(\tau)$ примет вид

$$p(\tau)=\sum_{i=1}^{2}\pi_i(0)\sum_{j=1}^{2}\tilde p_{ij}(\tau),\ \tau\ge 0. \qquad (7)$$

Подставляя в (7) сначала (1), затем (2) и (6), проделывая при этом необходимые преобразования, получаем явный вид плотности вероятностей $p(\tau)$:

$$p(\tau)=\gamma\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}+(1-\gamma)(\alpha+\lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau},\ \tau\ge 0;$$
$$\gamma=\frac{\alpha}{\alpha+p(\lambda_2+\alpha\delta)}\left[1-\frac{p\lambda_1(1-\delta)}{\lambda_1-\lambda_2-\alpha}\right], \qquad (8)$$

где $\lambda_1-\lambda_2-\alpha\ne 0$. Для случая $\lambda_1-\lambda_2-\alpha=0$ имеем

$$p(\tau)=\lambda_1\left[1-\frac{p\alpha(1-\delta)}{(1-p)\alpha+p(\lambda_1+\alpha\delta)}(1-\lambda_1\tau)\right]e^{-\lambda_1\tau},\ \tau\ge 0. \qquad (9)$$

Отметим, что если $\delta=0$, то получаем (8) и (9) для обычного полусинхронного потока [4].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p(\tau_1,\tau_2)$

В силу того, что последовательность моментов наступления событий потока образует вложенную цепь Маркова, совместная плотность вероятностей $p(\tau_1,\tau_2)$ примет вид

$$p(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i=1}^{2}\pi_i(0)\sum_{j=1}^{2}\tilde p_{ij}(\tau_1)\sum_{k=1}^{2}\tilde p_{jk}(\tau_2),\ \tau_1\ge 0,\ \tau_2\ge 0, \qquad (10)$$

где $\tilde p_{ij}(\tau_1)$, $\tilde p_{ij}(\tau_2)$ определены в (1). При этом в выражениях для $\tilde p_{ij}(\tau)$, $i,j=1,2$, нужно произвести замену τ на τ_1 и τ на τ_2. Тогда подставляя в (10) сначала $\tilde p_{ij}(\tau_1)$, $\tilde p_{ij}(\tau_2)$, определенные в (1), затем $p_{ij}(\tau_1)$, $p_{ij}(\tau_2)$, определенные в (2), для $\tau=\tau_1$ и $\tau=\tau_2$, затем $\pi_i(0)$, определенные в (6), $i,j=1,2$, и проделывая необходимые преобразования, находим

$$p(\tau_1,\tau_2)=p(\tau_1)p(\tau_2)+\frac{\lambda_2-(\lambda_2+\alpha\delta)p}{\alpha+\lambda_2}\gamma(1-\gamma)\left[\lambda_1e^{-\lambda_1\tau_1}-(\alpha+\lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau_1}\right]\times$$
$$\times\left[\lambda_1e^{-\lambda_1\tau_2}-(\alpha+\lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau_2}\right],\ \tau_1\ge 0,\ \tau_2\ge 0, \qquad (11)$$

где $p(\tau_1)$, $p(\tau_2)$, γ определены в (8) для $\tau=\tau_1$ и $\tau=\tau_2$ и $\lambda_1-\lambda_2-\alpha\neq 0$. Для случая $\lambda_1-\lambda_2-\alpha=0$ имеем

$$p(\tau_1,\tau_2)=p(\tau_1)p(\tau_2)+\lambda_1\left[\alpha(1-p+p\delta)-\lambda_1(1-p)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{p\alpha(1-\delta)}{\alpha(1-p)+p(\lambda_1+\alpha\delta)}\right]^2(1-\lambda_1\tau_1)(1-\lambda_1\tau_2)e^{-\lambda_1(\tau_1+\tau_2)},\ \tau_1\geq 0,\ \tau_2\geq 0, \qquad (12)$$

где $p(\tau_1)$, $p(\tau_2)$ определены формулой (9) для $\tau=\tau_1$ и $\tau=\tau_2$.

Нетрудно получить вероятностные характеристики потока, такие, как математическое ожидание длительности интервала между событиями, дисперсию и ковариацию.

1. Вариант $\lambda_1-\lambda_2-\alpha\neq 0$:

$$M_\tau=\frac{\gamma}{\lambda_1}+\frac{1-\gamma}{\alpha+\lambda_2},\ D_\tau=2\left[\frac{\gamma}{\lambda_1^2}+\frac{1-\gamma}{(\alpha+\lambda_2)^2}\right]-\left[\frac{\gamma}{\lambda_1}+\frac{1-\gamma}{\alpha+\lambda_2}\right]^2,$$

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=\gamma(1-\gamma)(\lambda_1-\lambda_2-\alpha)^2\frac{\lambda_2-(\lambda_2+\alpha\delta)p}{\lambda_1^2(\alpha+\lambda_2)^3}.$$

2. Вариант $\lambda_1-\lambda_2-\alpha=0$:

$$M_\tau=(1+C)/\lambda_1,\ D_\tau=(1+2C-C^2)/\lambda_1^2,$$

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=C^2\left[\alpha(1-p+\delta p)-\lambda_1(1-p)\right]/\lambda_1^3,$$

$$C=p\alpha(1-\delta)\left[\alpha(1-p)+p(\lambda_1+\alpha\delta)\right]^{-1}.$$

В рассматриваемом потоке присутствуют события трех типов:1) события пуассоновского потока интенсивности λ_1; 2) события пуассоновского потока интенсивности λ_2; 3) дополнительные события. Типы событий являются неразличимыми. Обозначим q_j – стационарные вероятности того, что наступившее событие потока есть событие j-го типа, $j=1,2,3$. Тогда, используя вышеприведенные результаты, нетрудно получить явные выражения для q_j:

$$q_1=\frac{\alpha}{\alpha+(\lambda_2+\alpha\delta)p},\ q_2=\frac{p\lambda_2}{\alpha+(\lambda_2+\alpha\delta)p},\ q_3=\frac{p\alpha\delta}{\alpha+(\lambda_2+\alpha\delta)p}.$$

Отметим, что $\pi_1(0)=q_1(1-p)+q_3$, $\pi_2(0)=q_1p+q_2$. Полагая в (11), (12) $\delta=0$, получаем формулы $p(\tau_1,\tau_2)$ для обычного полусинхронного потока [4].

4. Условия рекуррентности обобщенного полусинхронного потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых обобщенный полусинхронный поток становится рекуррентным.

1. Вариант $\lambda_1-\lambda_2-\alpha\neq 0$. Тогда для ситуаций: а) $\gamma=1$ (данное условие реализуется, если $\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta=0$); б) $\gamma=0$ (данное условие реализуется, если $\lambda_1(1-p+p\delta)-\lambda_2-\alpha=0$); в) $\lambda_2-(\lambda_2+\alpha\delta)p=0$; г) $p=1$, $\delta=0$, совместная плотность (11) факторизуется. Так как последовательность моментов наступления событий есть вложенная цепь Маркова, то нетрудно показать, что факторизуется и совместная плотность $p(\tau_1,\ldots,\tau_k)$. Последнее означает, что для этих ситуаций

обобщенный полусинхронный поток является рекуррентным [5]. При этом из (8) вытекает, что:

для ситуации а)

$$p(\tau)=\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau},\ \tau \geq 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 + \alpha\delta;$$

для ситуации б)

$$p(\tau)=(\alpha+\lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau},\ \tau \geq 0,\ \alpha + \lambda_2 = \lambda_1\,(1 - p + p\delta);$$

для ситуации в)

$$p(\tau)=\gamma_1\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}+(1-\gamma_1)(\alpha+\lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau},\ \tau \geq 0,\ \alpha + \lambda_2 = \alpha(1 - p - \delta p)/(1 - p),$$

$$\gamma_1 = (1 - p)\,(\lambda_1 - \alpha - p\lambda_1)[(1 - p)(\lambda_1 - \alpha) - \alpha\delta p]^{-1};$$

для ситуации г)

$$p(\tau)=\gamma_2\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}+(1-\gamma_2)(\alpha+\lambda_2)e^{-(\alpha+\lambda_2)\tau},\ \gamma_2=-\alpha/(\lambda_1-\lambda_2-\alpha).$$

2. Вариант $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0$. Тогда для ситуаций: а) $\delta = 1$; б) $p = 1$, $\delta = 0$; в) $\alpha(1 - p + p\delta) = \lambda_1(1 - p)$, $p \neq 1$, совместная плотность (12) факторизуется. Последнее означает, аналогично варианту 1, что факторизуется и совместная плотность $p(\tau_1,\ldots,\tau_k)$, так что для перечисленных ситуаций поток является рекуррентным. При этом из (9) вытекает, что:

для ситуации а) $p(\tau)=\lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}$, $\tau \geq 0$, $\lambda_1 = \alpha + \lambda_2$;

для ситуации б) $p(\tau)= (\lambda_1-\alpha+\lambda_1\alpha\tau)e^{-\lambda_1\tau}$, $\tau \geq 0$, $\lambda_1 = \alpha + \lambda_2$;

для ситуации в) $p(\tau)=\left[\lambda_1-\alpha p(1-\delta)(1-\lambda_1\tau)\right]e^{-\lambda_1\tau}$, $\tau \geq 0$, $\lambda_1 = \alpha + \lambda_2$.

При нижеследующем обсуждении условий рекуррентности необходимо использование результатов, приведенных в [1].

1. Вариант 1 ($\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha \neq 0$):

1.а. Апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ (не смотря на то, что поток рекуррентный и плотность $p(\tau)$ экспоненциальная) зависит от предыстории, т.е. зависит от моментов наступления событий $t_1, \ldots, t_k$. Если здесь ввести дополнительное ограничение $\lambda_2 = p\lambda_1$ ($p \neq 1$), то вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ не будет зависеть от предыстории, а будет зависеть только от её значения в момент наступления события потока, т.е. от $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = 1 - p$, $k = 1, 2, \ldots$; так что при дополнительном ограничении имеется некоторая близость обобщенного полусинхронного потока к простейшему потоку.

1.б. Вероятность $w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1$, $t \geq 0$, где $\pi_1 = \alpha/(\alpha + p\lambda_1)$ – априорная стационарная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$. То есть для этой ситуации апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ вообще не зависит от моментов наступления событий, так что здесь имеет место наибольшая близость обобщенного полусинхронного потока к простейшему потоку.

1.в. Вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от её значения в момент наступления события, т.е. от $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = 1 - p$, $k = 1, 2, \ldots$, так что для этой ситуации, аналогично ситуации а), имеется некоторая близость обобщенного полусинхронного потока к простейшему потоку.

1.г. Вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от её значения в момент наступления события, т.е. от $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, так что и для этой ситуации обобщенный полусинхронный поток в некоторой степени близок к простейшему потоку.

2. Вариант 2 ($\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha = 0$):

2.а. Вероятность $w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1$, $t \geq 0$. То есть для этой ситуации апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ вообще не зависит от моментов наступления событий и обобщенный полусинхронный поток наиболее близок к простейшему потоку.

2.б. Вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от её значения в момент наступления события, т.е. от $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, так что для этой ситуации наблюдается некоторая близость обобщенного полусинхронного потока к простейшему потоку.

2.в. Вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ не зависит от предыстории, как и для ситуации 2.б., при этом $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = 1 - p$, $k = 1, 2, \ldots$. При этом имеется некоторая близость обобщенного полусинхронного потока к простейшему потоку.

Заключение

Полученные результаты делают возможным решение задачи оценки неизвестных параметров, задающих поток.

В общем случае для коррелированного обобщенного полусинхронного потока для оценки неизвестных параметров можно использовать метод моментов; для частных случаев, когда обобщенный полусинхронный поток становится рекуррентным – метод максимального правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М.*, *Калягин А.А.*, *Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2(11). С. 66–81.
2. *Горцев А.М.*, *Калягин А.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 4(13). С. 50–60.
3. *Дудин А.Н.*, *Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
4. *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.* Полусинхронный дважды стохастический поток событий при продлевающемся мертвом времени // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 1. С. 31–41.
5. *Ивченко Г.И.*, *Каштанов В.А.*, *Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.

Горцев Александр Михайлович
Калягин Алексей Андреевич
Томский государственный университет
E-mail: amg@tsu.fpmk.ru redall@inbox.ru
Поступила в редакцию 26 декабря 2011 г.

Gortsev Alexander M., *Kalyagin Aleksey A.* (Tomsk State University). **The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semi-synchronous flow.**

Keywords: generalized semi-synchronous flow of events, probability density, joint probability density, recurrence of the event flow.

Generalized semi-synchronous flow of events which intensity is piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two values λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, Poisson flow of events takes place with the intensity λ_i , $i = 1,2$. Transition from the first state of the process $\lambda(t)$ into the second is possible only at the moment of event occurrence, thus, the transition is carried out with probability p ($0 < p \leq 1$); with probability $1 - p$ process $\lambda(t)$ remains in the first state. In this case the duration of process stay $\lambda(t)$ in the first state is a random variable

with exponential distribution function $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Transition from the second state of process into the first state can be carried out at any moment of time. Thus, duration of process stay $\lambda(t)$ in the second state is distributed according exponential law: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. By transition $\lambda(t)$ from the second state into the first one an additional event in the first state is initiated with probability δ ($0 \le \delta \le 1$).

We find the explicit form of the probability density $p(\tau)$ of duration of the interval between two successive events in generalized semi-synchronous flow and the explicit form of $p(\tau_1,\tau_2)$ – the joint probability density of the length of two adjacent intervals. The conditions for the recurrence of generalized semi-synchronous flow of events are given.