

УДК 336:51

Г.А. Медведев

О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДОХОДНОСТИ. 2. МОДЕЛЬ КОКСА – ИНГЕРСОЛЛА – РОССА

Продолжается исследование аффинной временной структуры процентных ставок доходности, начатое в [1], с помощью кривых доходности и форвардных кривых в случае, когда используется модель Кокса – Ингерсолла – Росса. Анализируются не только однофакторные, но и многофакторные модели. Кривые доходности и форвардные кривые в качестве временной переменной используют дюрацию безрисковой ставки. Проводится численное сравнение результатов, основанных на моделях Васичека и Кокса – Ингерсолла – Росса.

Ключевые слова: *процентные ставки доходности, аффинная модель, кривая доходности, форвардная кривая, модель Васичека, модель Кокса – Ингерсолла – Росса.*

Исторически первой популярной моделью динамики процентной ставки является модель Васичека (1977 г.), рассмотренная в предыдущей статье [1]. Она предполагает, что стохастическая процентная ставка следует процессу Орнштейна – Уленбека, в финансовом анализе обычно называемому «процессом с возвращением к среднему». В этой модели процентная ставка имеет нормальное распределение, что очевидно является экономически несостоятельным, так как по смыслу процентная ставка не может принимать отрицательных значений. Вместе с тем эта модель использовалась многими по той причине, что во многих случаях соотношение между средним значением и дисперсией реальных ставок таково, что вероятность появления их отрицательных значений оказывается очень малой. В то же самое время анализ модели Васичека и цен активов, основанных на ней, очень прост, так как приводит к линейным задачам. Позже, в 1985 г. Коксом, Ингерсоллом и Россом была предложена другая модель, называемая еще «моделью с квадратным корнем», в условиях которой процентная ставка принимает только неотрицательные значения и имеет распределение гамма. Однако анализ процентных ставок и цен активов, основанных на этой модели, хотя и приводит к аналитическим результатам, но они существенно сложнее, так как предполагают решение нелинейных задач. Возможность получения аналитических результатов – главное преимущество аффинных моделей. Аналитические результаты важны, потому что иначе доходности должны вычисляться либо методами Монте-Карло, либо методами решения уравнений с частными производными. Оба эти подхода являются в вычислительном отношении трудоемкими, особенно когда параметры модели нужно оценивать, используя выборочные данные доходностей облигаций. Поэтому литература по определению цен облигаций, начиная с работ Васичека и Кокса, Ингерсолла и Росса (далее CIR), сосредоточивала внимание на решениях в замкнутой форме. Безрисковая процентная ставка в этих первых однофакторных постановках была единственным параметром состояния финансового рынка, а это приводило к тому, что доходности облигаций всех сроков погашения были полностью коррелированы. Последовали многие расширения этих постановок как с точки зрения числа переменных состояния, так и с точки зрения процессов, поро-

ждающих эти переменные. В [2] предложена полная характеристика моделей с аффинными доходностями облигации. С практической точки зрения интересно рассмотреть проблему, насколько сильно различаются результаты, полученные с помощью этих моделей при согласованных процессах безрисковой процентной ставки. Основной целью настоящей статьи является получение аналитических решений при анализе временной структуры процентных ставок доходности бескупонных облигаций, использующей модель Кокса – Ингерсолла – Росса в однофакторном и многофакторном варианте, а также сравнение кривых доходности и форвардных кривых, вытекающих из описанных выше моделей поведения краткосрочной процентной ставки.

1. Однофакторная модель Кокса – Ингерсолла – Росса

В однофакторном случае в качестве состояния рынка обычно принимается краткосрочная ставка $X(t) = r(t)$, а соответствующее стохастическое уравнение имеет вид [3, с. 391]

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t), \quad (1)$$

где k, θ, σ – скалярные константы, т.е. $K = k, \alpha = 0, \beta = \sigma^2, \xi = 0, \eta = \sigma\lambda$.

В этом случае принимается, что $y(r) = r$, т.е. $\phi = 1$. Уравнения для определения функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ (см. формулы (4) – (5) в [1, с. 3]) приобретают вид

$$A'(\tau) = -k\theta B(\tau), \quad A(0) = 0,$$

$$B'(\tau) = 1 - (\sigma\lambda + k)B(\tau) - \sigma^2 B(\tau)^2/2, \quad B(0) = 0.$$

Решения этих уравнений выражаются в виде

$$A(\tau) = -\frac{2k\theta}{\sigma^2} [\nu\tau - \ln(1 + \nu B(\tau))], \quad B(\tau) = \left(\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon\tau} - 1} + V \right)^{-1}, \quad (2)$$

где для краткости обозначено

$$\varepsilon = \sqrt{(k + \sigma\lambda)^2 + 2\sigma^2}, \quad \nu = (\varepsilon - \sigma\lambda - k)/2, \quad V = (\varepsilon + \sigma\lambda + k)/2.$$

Заметим, что $\nu + V = \varepsilon$, $\nu V = \sigma^2/2$, $V - \nu = \sigma\lambda + k$, $\tau = [\ln(1 + \nu B) - \ln(1 - VB)]/\varepsilon$.

Кривая доходности $y(\tau, r)$ и форвардная кривая $f(\tau, r)$ определяются соответственно выражениями

$$y(\tau, r) = r \frac{B(\tau)}{\tau} + \frac{k\theta}{V} \left(1 - \frac{\ln(1 + \nu B(\tau))}{\tau\nu} \right) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} y(\infty) = \frac{k\theta}{V},$$

$$f(\tau, r) = r + [k\theta - (V - \nu)r]B(\tau) - \nu V r [B(\tau)]^2 \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \frac{k\theta}{V} = y(\infty).$$

Функция $B(\tau)$ в этом случае является монотонно возрастающей функцией от 0 до $1/V$ при увеличении τ от 0 до ∞ . $B(\infty) = 1/V$. Поскольку $B(\tau)$ – монотонная функция, определяющая дюрацию процентной ставки, ее значения и в этом случае могут быть использованы в качестве значений аргумента для кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ вместо срока до погашения τ , так чтобы $y(\tau, r) \leftrightarrow Y(B, r)$, $f(\tau, r) \leftrightarrow F(B, r)$. Аналитические выражения для функций $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ имеют вид [4, с. 116]

$$Y(B, r) = \frac{k\theta}{V} + \varepsilon \frac{rB - k\theta \ln(1 + \nu B)/\nu V}{\ln(1 + \nu B) - \ln(1 - VB)}, \quad F(B, r) = r + [k\theta - (V - \nu)r]B - \nu V r B^2.$$

Как видно, выражения для функций $y(\tau, r)$ и $f(\tau, r)$, а следовательно, и для $Y(B, r)$ и $F(B, r)$ рассматриваемой модели Кокса – Ингерсолла – Росса (модели CIR) существенно отличаются по внешнему виду от соответствующих выражений в модели Васичека [1, с. 4]. В связи с этим интересно сравнить поведение этих функций для согласованных процессов безрисковой процентной ставки (1), которые как в модели Васичека, так и в модели CIR задаются тремя параметрами: k , θ и σ . В обоих процессах параметр θ – стационарное математическое ожидание процесса, а параметр k определяет функцию корреляции процесса $\rho(\tau) = \exp\{-k|\tau|\}$. Волатильностью σ определяется стационарная дисперсия D процессов по следующим формулам: для модели Васичека $D = \sigma^2/2k$, для модели CIR $D = \sigma^2\theta/2k$. Согласованными процессами безрисковой процентной ставки будем называть такие, у которых стационарные математические ожидания θ , стационарные дисперсии D , а также функции корреляции $\rho(\tau)$ одинаковы. Чтобы сами модели были согласованы, добавим к этому требование, чтобы значения функции рыночной ценой риска $\lambda(r)$ для обеих моделей были одинаковы при $r = \theta$.

Можно сразу указать на следующее очевидное различие в моделях Васичека и CIR. Предельные ставки доходности $y(\infty)$ в рассматриваемых моделях различные: для модели Васичека $y(\infty) = \theta - \sigma\lambda/k - \sigma^2/2k^2$, а для модели CIR $y(\infty) = 2k\theta/(\varepsilon + \sigma\lambda + k)$. Поскольку по определению $\varepsilon > 0$, предельная доходность в модели CIR всегда положительна, в то время как при достаточно большой волатильности $\sigma > k(\sqrt{\lambda^2 + 2\theta} - \lambda)$ предельная доходность в модели Васичека становится отрицательной, что противоречит экономическому смыслу доходности. На рис. 1 это иллюстрируется численными расчетами.

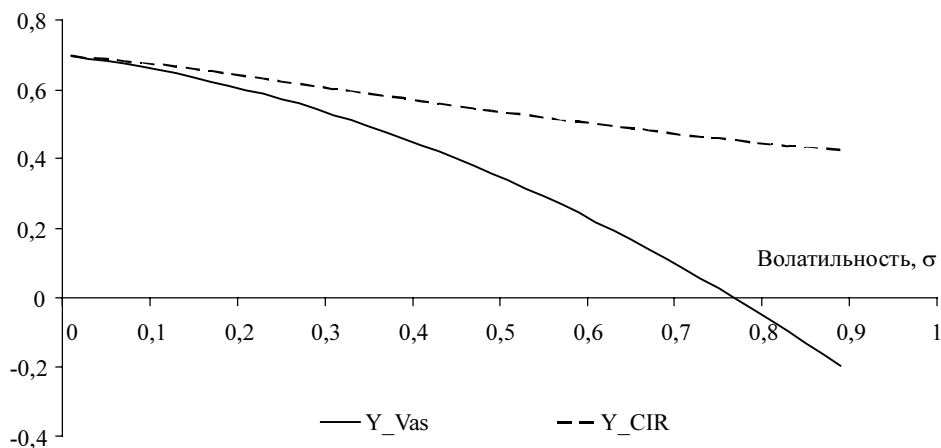


Рис. 1. Поведение предельной доходности в зависимости от волатильности для моделей Васичека и CIR при $\theta = 0,7$; $k = 0,8$; $\lambda = 0,25$

На рис. 2 для сравнения представлены два способа изображения кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой: как функций $f(\tau, r)$ и $y(\tau, r)$ от срока до погашения τ (рис. 2, а) и как функций $F(B, r)$ и $Y(B, r)$ от дюрации $B(\tau)$ процентной ставки r (рис. 2, б). Из рисунков видно, что первый способ позволяет изображать функции только для ограниченного интервала времени (на рисунке до 10 лет), в

то время как второй способ показывает зависимости для всего интервала сроков до погашения от 0 до ∞ . Для выбранных параметров на рисунках кривые, соответствующие модели CIR, располагаются выше, чем соответствующие кривые модели Васичека.

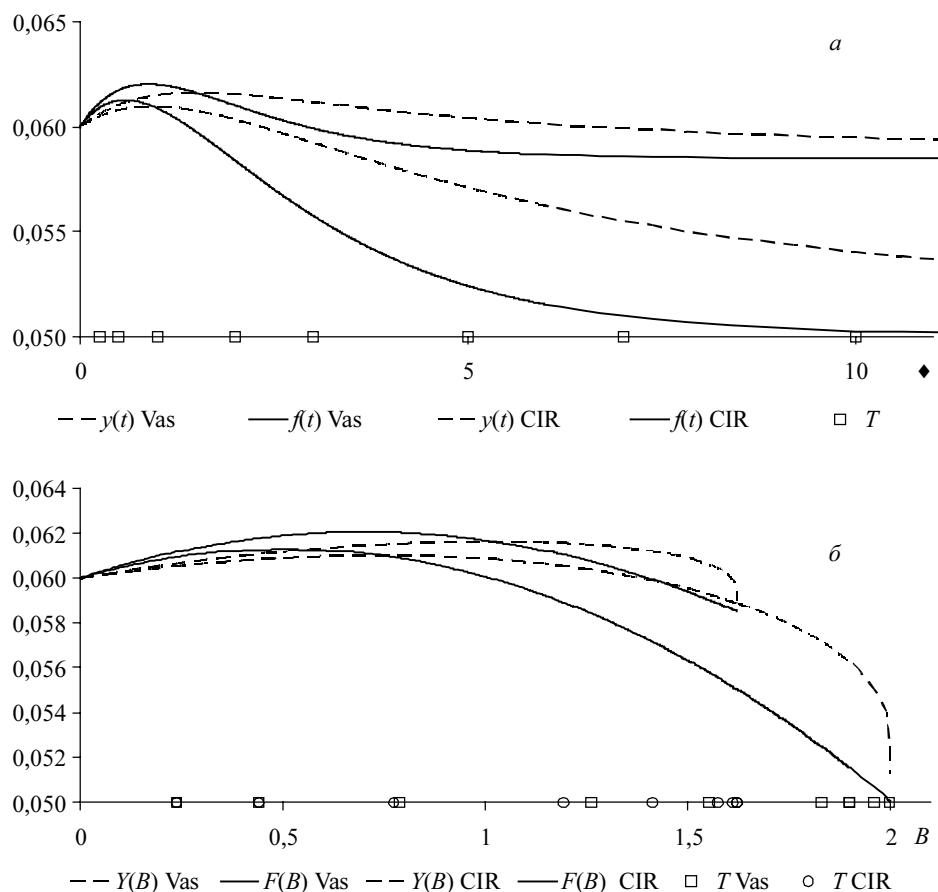


Рис. 2. Графики функций $f(t, r)$ и $y(t, r)$ – а и $F(B, r)$ и $Y(B, r)$ – б в случае однофакторных моделей Васичека и CIR для согласованных процессов безрисковой ставки

При построении графиков на рис. 2, а и б были выбраны следующие значения параметров: $k = 0,5$; $\sigma_{\text{Васичек}} = 0,1$; $\sigma_{\text{CIR}} = 0,3724$; $\lambda = 0,01$; $\theta = 0,0721$; $r = 0,06$. Маркерами на горизонтальной оси рисунков отмечены обычно используемые сроки до погашения бескупонных облигаций: 0,25, 0,5, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20 и 30 лет (на рис. 2, б квадратные метки соответствуют модели Васичека, а круглые – модели CIR). На рис. 2, а по горизонтальной оси показаны сроки до погашения τ в годах; на рис. 2, б по горизонтальной оси отложена дюрация $B(\tau)$. Заметим, что предельные значения дюраций безрисковой процентной ставки $B(\tau)$ для различных моделей различаются. В частности, из выражения (2) следует, что для модели CIR при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B(\tau) \rightarrow B(\infty) = 1/V$, в то время как для модели Васичека при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B(\tau) \rightarrow B(\infty) = 1/k$. Если $\sigma_{\text{CIR}} + k\lambda > 0$, то $V > k$ и интервал измене-

ния дюрации безрисковой процентной ставки для модели CIR будет короче, чем у модели Васичека. Для выбранных параметров на рисунках $B_{CIR}(\infty) = 1,623$, в то время как $B_{Васичек}(\infty) = 2$.

2. Обобщение модели CIR на многофакторный случай

В многофакторном случае при $m = n$ (размерность вектора винеровских процессов m совпадает с размерностью вектора состояния n) уравнение для состояния рынка приобретает вид

$$dX(t) = K(\theta - X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t).$$

Здесь предполагается, что $K - (n \times n)$ -матрица, $\theta - n$ -вектор, матрица волатильности $\sigma(x) = \sigma \langle \sqrt{x} \rangle$, $\sigma - (n \times n)$ -матрица, а вектор рыночных цен риска тоже зависит от состояния рынка $\lambda(x) = \langle \sqrt{x} \rangle \lambda$; $\langle \sqrt{x} \rangle -$ диагональная $(n \times n)$ -матрица, по диагонали которой стоят квадратные корни компонент вектора x . Таким образом,

$$\sigma(x)\sigma(x)^T = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i x_i.$$

Дифференциальные уравнения для функции $A(\tau)$ и компонент вектора $B(\tau)$ будут иметь вид

$$A'(\tau) = -(K\theta)^T B(\tau), \quad A(0) = 0, \quad (4)$$

$$B_i'(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T(\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0; \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5)$$

В системе уравнений (5) символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$, а элементы вектора η_i и матрицы β_i определяются выражениями

$$(\beta_i)_{kj} = \sigma_{ki}\sigma_{ji}, \quad 1 \leq k, j \leq n; \quad (\eta_i)_k = \sigma_{ki}\lambda_i, \quad 1 \leq k \leq n; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Функция $A(\tau)$ достаточно просто определяется из уравнения (4), если вектор $B(\tau)$ известен. Однако решение системы уравнений (5) для $B(\tau)$ в аналитическом виде получить не удастся, и $B(\tau)$ определяется только численно. Рассмотрим эту проблему для частного случая $n = 2$ в предположении, что состояние рынка описывается не только краткосрочной ставкой, но также экспоненциально сглаженным ее средним значением [3, с. 398]. Состояние рынка $X(t)$ в этом случае характеризуется двумя компонентами, одной из которых $r(t)$ является наблюдаемая краткосрочная ставка, а другой $s(t)$ – экспоненциально сглаженное ее среднее значение. Уравнения состояния рынка приобретают вид

$$dr(t) = k_1(\theta - r(t))dt + \sigma_1 \sqrt{r(t)} dW_1(t),$$

$$ds(t) = k_2(r(t) - s(t))dt + \sigma_2 \sqrt{s(t)} dW_2(t).$$

Параметры модели в этом случае задаются соотношениями

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Винеровские процессы $W_1(t)$ и $W_2(t)$ предполагаются независимыми. Уравнения (4) и (5) для функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ получаются такими:

$$A'(\tau) = -k_1\theta B_1(\tau), \quad A(0) = 0; \quad (6)$$

$$B_1'(\tau) = \phi_1 - (\sigma_1\lambda_1 + k_1)B_1(\tau) + k_2B_2(\tau) - \sigma_1^2 B_1^2(\tau)/2, \quad B_1(0) = 0; \quad (7)$$

$$B_2'(\tau) = \phi_2 - (\sigma_2\lambda_2 + k_2)B_2(\tau) - \sigma_2^2 B_2^2(\tau)/2, \quad B_2(0) = 0. \quad (8)$$

Решение этой системы следует реализовывать в следующей последовательности. Сначала решается уравнение Риккати (8), его решение можно представить в явной форме, подобной (2):

$$B_2(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_2}{e^{\varepsilon_2 \tau} - 1} + V_2 \right)^{-1},$$

где для краткости обозначено

$$\varepsilon_2 = \sqrt{(k_2 + \sigma_2 \lambda_2)^2 + 2\phi_2 \sigma_2^2}, \quad V_2 = (\varepsilon_2 + \sigma_2 \lambda_2 + k_2)/2.$$

Затем следует решать уравнение Риккати (7) относительно дюрации $B_1(\tau)$, которое отличается от уравнения (8) тем, что не все его параметры являются константами, а это не позволяет представить решение в явном виде. Однако для вычисления $B_1(\tau)$ может быть использована следующая приближенная формула:

$$\tilde{B}_1(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_1(\tau)}{e^{\varepsilon_1(\tau)} - 1} + V_1(\tau) \right)^{-1}, \quad (9)$$

где использованы обозначения

$$\varepsilon_1(\tau) = \sqrt{(k_1 + \sigma_1 \lambda_1)^2 + 2(\phi_1 + k_2 B_2(\tau))\sigma_1^2}, \quad V_1(\tau) = (\varepsilon_1(\tau) + \sigma_1 \lambda_1 + k_1)/2.$$

Определим точность $\delta(\tau)$ аппроксимации функции $B_1(\tau)$ по формуле (9) разностью $\delta(\tau) = \tilde{B}_1(\tau) - B_1(\tau)$. На рис. 3 представлен пример точности $\delta(\tau)$, вычисленной для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} \phi_1 = 0,5; \phi_2 = 0,5; k_1 = 0,5; k_2 = 0,4; \lambda_1 = 0,02; \lambda_2 = 0,01; \\ \theta = 0,0721; \sigma_1 = 0,3724; \sigma_2 = 0,0372. \end{aligned}$$

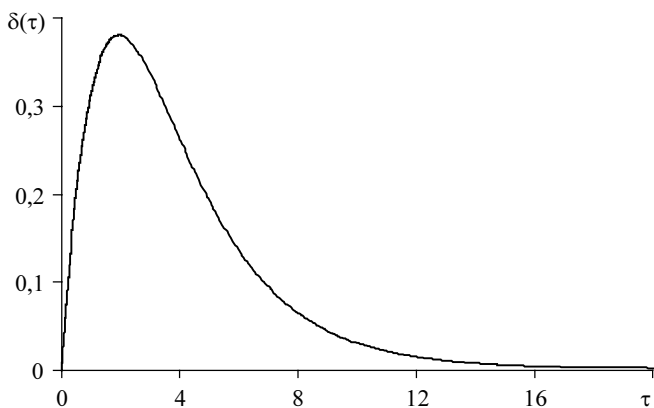


Рис. 3. Точность $\delta(\tau)$ аппроксимации функции $B_1(\tau)$

При известной функции $B_1(\tau)$ третье уравнение (6) может быть проинтегрировано.

Получив таким образом функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$, для определения кривой доходности $y(\tau, r)$ и форвардной кривой $f(\tau, r)$ можно использовать формулы [1, с. 3]

$$y(\tau, x) = \frac{x^T B(\tau) - A(\tau)}{\tau}, \quad f(\tau, x) = x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau}.$$

Затем переходя к новой временной переменной $B_1(\tau)$, получаем функции $F(B_1, r, s)$ и $Y(B_1, r, s)$.

На рис. 4 представлены графики этих функции для двухфакторных моделей Васичека и CIR.

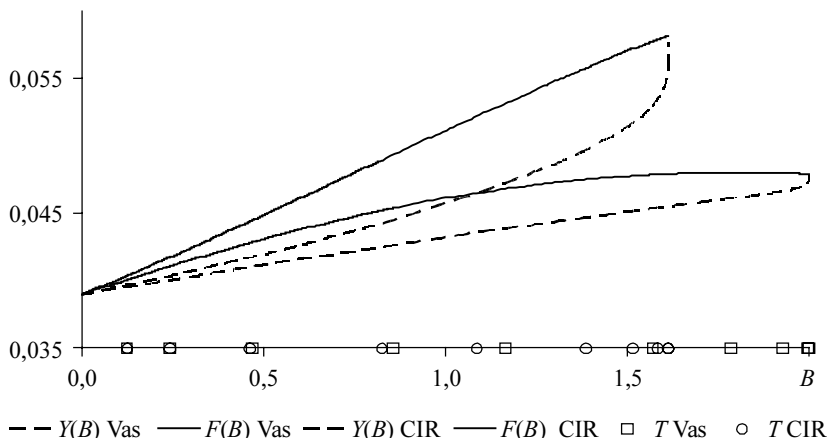


Рис. 4. Графики функций $F(B, r, s)$ и $Y(B, r, s)$ в случае двухфакторных моделей Васичека и CIR для согласованных процессов безрисковой ставки, $r < \theta$

При построении графиков на рис. 4 выбирались следующие значения параметров: $\phi_1 = 0,5$; $\phi_2 = 0,5$; $k_1 = 0,5$; $k_2 = 0,4$; $\lambda_1 = 0,02$; $\lambda_2 = 0,01$; $\theta = 0,0721$; $r = 0,02$; $s = 0,058$; из условия согласования процессов безрисковой ставки для модели Васичека: $\sigma_1 = 0,1$; $\sigma_2 = 0,01$; для модели CIR: $\sigma_1 = 0,3724$; $\sigma_2 = 0,0372$. По горизонтальной оси отложена дюрация $B_1(\tau)$. Маркерами на горизонтальной оси отмечены обычно используемые сроки до погашения бескупонных облигаций (квадратные метки соответствуют модели Васичека, а круглые – модели CIR). Видно, что предельные значения дюраций безрисковой процентной ставки $B_1(\tau)$ для различных моделей различаются. В частности, для модели Васичека при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B_1(\tau) \rightarrow B_1(\infty) = 1/k_1$. Однако для модели CIR предельное значение при $\tau \rightarrow \infty$ дюрация $B_1(\tau)$ стремится к значению $B_1(\infty)$, которое выражается через параметры довольно громоздко:

$$B_1(\infty) = [\sqrt{(\sigma_1 \lambda_1 + k_1)^2 + 2(\phi_1 + k_2 B_2(\infty))\sigma_1^2} - \sigma_1 \lambda_1 - k_1] / \sigma_1^2,$$

где в свою очередь $B_2(\infty)$ определяется формулой

$$B_2(\infty) = [\sqrt{(\sigma_2 \lambda_2 + k_2)^2 + 2\phi_2 \sigma_2^2} - \sigma_2 \lambda_2 - k_2] / \sigma_2^2.$$

Для выбранных параметров рис. 3 дюрация $B_{1CIR}(\infty) = 1,6123$, в то время как $B_{1Васичек}(\infty) = 2$.

На рис. 5 представлены графики функций $F(B, r, s)$ и $Y(B, r, s)$ для таких же значений параметров, что и в случае рис. 4, за одним исключением: значение безрисковой процентной ставки в дату определения цены бескупонной облигации $r = 0,12$ больше среднего значения безрисковой процентной ставки $\theta = 0,0721$ (для рис. 3 эта ставка $r = 0,02$). Как видно, изменение процентной ставки r может существенным образом изменять картину поведения кривой доходности и фowardной кривой.

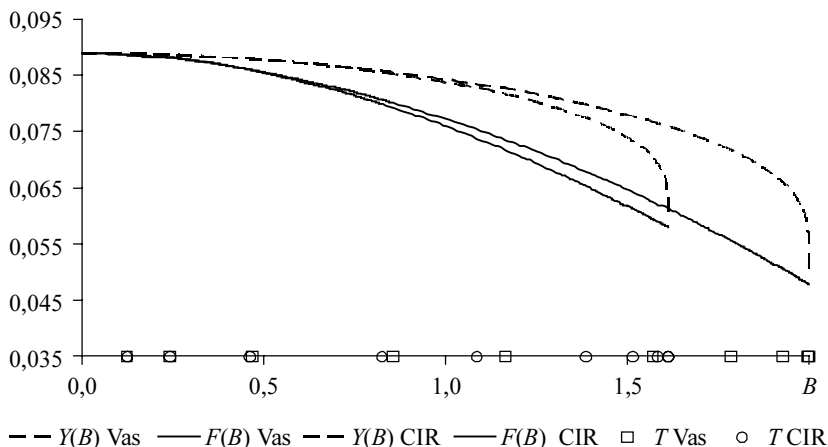


Рис. 5. Графики функций $F(B, r, s)$ и $Y(B, r, s)$ в случае двухфакторных моделей Васичека и CIR для согласованных процессов безрисковой ставки, $r > \theta$

Не анализируя подробно полученные с помощью численных расчетов графики функций $F(B)$ и $Y(B)$, отметим их следующие особенности. Кривая доходности $Y(B)$ в окрестности предельной доходности при $B_1(\infty)$ имеет неограниченную по абсолютной величине производную. Для использованных значений параметров модели можно отметить следующее. При малых значениях безрисковой процентной ставки в момент определения цены бескупонной облигации, $r < \theta$, форвардная ставка $F(B)$ больше ставки доходности до погашения $Y(B)$ для любых значениях дюрации безрисковой ставки B_1 . При больших значениях безрисковой процентной ставки в момент определения цены бескупонной облигации, $r > \theta$, форвардная ставка $F(B)$ наоборот меньше ставки доходности до погашения $Y(B)$ также для любых значениях дюрации безрисковой ставки B_1 . Кроме того, в первом случае ($r < \theta$) доходности для модели CIR больше соответствующих доходностей модели Васичека, а во втором случае ($r > \theta$), наоборот, доходности для модели Васичека больше соответствующих доходностей модели CIR. Эти особенности функций $F(B)$ и $Y(B)$ можно уточнить аналитически, но из-за ограничения объема статьи мы оставляем это для будущего.

Заметим, что используя систему уравнений (4), (5) форвардную кривую для модели CIR можно записать в векторной форме

$$\begin{aligned} f(\tau, x) &= x^T \frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = \\ &= x^T \phi - B(\tau)^T [\sigma(x)\lambda(x) - K(\theta - x)] - B(\tau)^T \sigma(x)\sigma(x)^T B(\tau)/2 \equiv F(B, x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что вторая производная форвардной кривой $F(B, x)$ по составляющим вектора B дюраций компонент состояния финансового рынка является отрицательно определенной матрицей (вектор состояний здесь рассматривается как вектор параметров)

$$\frac{d^2 F(B, x)}{dB^2} = -\sigma(x)\sigma(x)^T.$$

Это, в частности, означает, что форвардные кривые в моделях CIR всегда являются вогнутыми функциями.

Заключение

В известной литературе по моделям временной структуры доходности обычно констатируется, что кривая доходности и форвардная кривая расходятся с увеличением времени до погашения. Однако это имеет место только для области малых сроков до погашения. В предыдущей [1] и настоящей статьях показано, что для больших сроков до погашения эти кривые стремятся к одному общему предельному значению. Это предельное значение определено в явной аналитической форме.

Как следует из аналитического вида кривой доходности и форвардной кривой, эти кривые при $\tau = 0$ стартуют из точки, определяемой состоянием рынка в момент определения цены бескупонной облигации. Для однофакторных моделей – это значение безрисковой процентной ставки, для многофакторных моделей – это взвешенная сумма компонент вектора состояния. В свою очередь, предельное значение этих кривых при $\tau \rightarrow \infty$ совершенно не зависит от состояния рынка в момент определения цены бескупонной облигации, а зависит только от параметров модели и, в первую очередь, от математических ожиданий компонент вектора состояния. Поэтому можно было бы ожидать, что на доходность долгосрочных облигаций состояние рынка в момент определения цены бескупонной облигации практически не влияет. Однако это не так. Как показали численные результаты, проведенные для моделей Васичека и Кокса – Ингерсолла – Росса, состояние рынка в момент определения цены бескупонной облигации может существенным образом изменить картину поведения этих кривых даже в области продолжительных сроков до погашения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1(18). С. 102–111.
2. Duffie D., Kan R. A Yield-factor model of interest rates // Mathematical Finance. 1996. V. 6. P. 379–406.
3. Cox J., Ingersoll J., Ross S. A Theory of the term structure of interest rate // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 385–407.
4. Медведев, Г.А. Стохастические процессы финансовой математики. Минск: БГУ. 2005. 243 с.

Медведев Геннадий Алексеевич

Белорусский государственный университет

E-mail: MedvedevGA@cosmostv.by

Поступила в редакцию 20 января 2012 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University). On term structure of yield rates. 2. The Cox – Ingersoll – Ross model.

Keywords: yield interest rates, affine model, yield curve, forward curve, Vasiček model, Cox-Ingersoll-Ross model.

Historically the first popular model of dynamics of the interest rate is the Vasiček model that was proposed in 1977. It had been considered in previous paper [1]. In this model the interest rate has the normal distribution that obviously is economically inconsistent because in terms of the interest rate cannot take negative values. At the same time this model was often used for the reason that in many cases the relation between the expectations and the variances of real interest rates is that the probability of occurrence of their negative values is very small. However the analysis of the Vasiček model and the prices of the assets, based on it, is very simple, as leads to

linear problems. Later in 1985 Cox, Ingersoll and Ross had offered other model named else «model with a square root» in which the interest rate takes only nonnegative values and has the gamma distribution. The analysis of interest rates and the prices of the assets based on this model, also supposes analytical results, but they are essentially more complicated, as assume a solution of nonlinear problems. A possibility of deriving of analytical results is principal advantage of affine models. Analytical results are important, because otherwise yield should be calculated either by methods of Monte Karlo, or by methods of solution of the equations with partial derivatives. Both these approach are in the computing ratio labour-intensive, especially when the model parameters need to be estimated, using the sample data of bond yields. Therefore the literature by definition of the prices of bonds, starting papers of Vasiček and Cox, Ingersoll and Ross, concentrated attention on solutions in the closed form. From the practical point of view it is interesting to consider a problem, how much can differ the results obtained by means of these models. Main objective of the present paper is deriving the analytical solutions by the analysis of term structure of interest rates of yield of zero-coupon bonds, using the Cox- Ingersoll-Ross model in one-factor and multifactor versions. Also comparison of the yield curves and the forward curves implying from mentioned above models of behavior of the short-term interest rate is represented.