

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 62.52; 532.546; 519.9

Н.Д. Демиденко

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ТРУБЧАТЫХ ПЕЧАХ

В статье предлагаются математические модели для стационарных и динамических режимов технологических печей как объектов с распределенными параметрами. Сформулированы и решены соответствующие краевые задачи. Для стационарных режимов получена система уравнений, связывающая концентрацию горючего вещества и скорость дымовых газов. Проанализированы потери на излучение при горении капель топлива различного диаметра. Проведены расчеты для промышленных объектов.

**Ключевые слова:** *математическое моделирование, краевые задачи, стационарные и динамические режимы трубчатых печей, численные методы.*

Использование органического жидкого топлива является основным источником энергии большого числа различных теплотехнических процессов.

В качестве объекта исследования выбрана трубчатая печь, широко распространенная в нефтехимических производствах [1]. Трубчатая печь является аппаратом, предназначенным для передачи нагреваемому продукту тепла, выделяющегося при сжигании топлива непосредственно в этом же аппарате [2]. Она имеет камеры радиации и конвекции. В камере радиации (топочная камера), где сжигается топливо, размещена радиантная поверхность (экран), поглощающая тепло в основном за счет радиации. В камере конвекции расположены трубы, воспринимающие тепло главным образом путем конвекции при соприкосновении дымовых газов с поверхностью нагрева. Сырье проходит последовательно через конвекционные трубы и поглощает тепло. Обычно радиантная поверхность воспринимает большую часть тепла, выделяемого при сгорании дымовых газов до 1000–2000 К. Конвекционная поверхность использует тепло дымовых газов и обеспечивает их охлаждение до температуры, при которой величина коэффициента полезного действия аппарата будет экономически оправданной.

Рассмотрим механизм процесса передачи тепла, протекающего в печи, состоящей из двух камер с настильным пламенем. В топочную камеру этой печи при помощи форсунки вводится распыленное топливо, а также необходимый для горения нагретый или холодный воздух. Высокая степень дисперсности топлива обеспечивает его интенсивное перемешивание с воздухом и более эффективное горение. Соприкосновение факела с поверхностью стены обуславливает повышение ее температуры; излучение происходит не только от факела, но и от раскаленной стены. Тепло, выделенное при сгорании топлива, расходуется на повышение температуры дымовых газов и частиц горящего топлива; последние раскаляются и образуют светящийся факел.

Имеются некоторые расхождения в математических методах анализа, используемых разными авторами, но для стационарного сферического горения используется единый подход. В целях упрощения анализ проводится при следующих предположениях [3]:

1. Жидкая капля имеет сферическую форму.
2. Влиянием конвекции пренебрегают, пламя рассматривают как сферическую поверхность, concentрическую с каплей.
3. Пламя считают разновидностью диффузионного пламени, которое образуется в результате реакции между парами горючего и воздухом, которые реагируют в стехиометрическом соотношении.
4. Рассматривают стационарное состояние при постоянном диаметре капли, хотя реально диаметр жидкой капли уменьшается по мере горения, однако это изменение происходит медленно по сравнению с изменением скорости диффузии и прочими факторами.
5. Температура капли одинакова по всему объему.
6. Давление в течение всего процесса горения считается постоянным.
7. Влияние излучения рассматривают отдельно.

### 1. Уравнения нестационарного горения

При исследовании процесса горения каплей жидкого топлива в воздухе в основном представляет интерес распределение концентраций компонентов в камере печи при статических и динамических режимах работы. Исходя из одномерности движения потоков, математическая модель нестационарного горения может быть представлена следующими уравнениями [3]:

1. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$  – массовая плотность смеси;  $u$  – скорость движения.

Для покомпонентной модели процесса горения уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho x u)}{\partial l} = -\frac{\rho x}{\tau}. \quad (2)$$

Здесь  $l$  – линейный размер;  $x$  – концентрация горючего вещества в смеси ( $0 \leq x \leq 1$ );  $\tau$  – время сгорания.

2. Уравнение движения в виде

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial l} \right) + \frac{\partial P}{\partial l} = 0. \quad (3)$$

3. Уравнение сохранения энергии

$$\rho T_n \left( \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial l} \right) = \frac{\rho x}{\tau} q - Q(T_n) + K_1(T_c - T_n), \quad (4)$$

где  $q$  – теплота сгорания топлива;  $Q(T_n)$  – потери на излучение;  $S$  – энтропия, причем  $S = C_v \ln(P/\rho^\gamma)$  ( $\gamma = 1,0-1,4$ , так как для жидкостей различие между  $C_v$  и  $C_p$  незначительно);  $T_c$  – температура сырья (нефтепродукта в радиантных тру-

бопроводах печи);  $K_1$  – коэффициент теплопередачи для рабочего потока;  $T_{\Pi}$  – температура продуктов сгорания.

4. Уравнение теплообмена между нагреваемым сырьем и нагревательным газом

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} - w \frac{\partial T_c}{\partial l} = K_2 (T_{\Pi} - T_c) - Q(T_{\Pi}), \quad (5)$$

где  $K_2$  – коэффициент теплопередачи для стенки печи.

Уравнения (1) – (5) представляют собой математическую модель теплового процесса печи.

Дополним систему (1) – (5) уравнением состояния

$$\frac{P}{\rho} = RT_{\Pi}, \quad (6)$$

где  $R$  – газовая постоянная.

## 2. Стационарная модель процесса горения

В этом случае уравнения (1) – (5) могут быть значительно упрощены. При этом  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  (первое слагаемое в левых частях уравнений (1) – (4)) и  $\frac{\partial}{\partial l} \rightarrow \frac{d}{dl}$ , так как остается лишь одна независимая переменная. Уравнение (1) может быть проинтегрировано, что приводит к простой форме уравнения неразрывности:

$$\rho u = M - \text{const}, \quad \frac{d}{dl}(\rho u x) = -\frac{\rho x}{\tau}.$$

Уравнение сохранения количества движения может быть преобразовано в интегральную форму для случая плоского установившегося одномерного течения:

$$\rho u \frac{du}{dl} + \frac{dP}{dl} = 0,$$

которое имеет интеграл  $\rho u^2 + P = \Pi$ , где  $\Pi = \text{const}$ .

Тогда уравнение сохранения энергии представим в виде (без учета теплопередачи с сырьем)

$$C_v T_{\Pi} u \frac{d \ln \frac{P}{\rho^\gamma}}{dl} = \frac{\rho x}{\tau} q - Q(T_{\Pi}).$$

Перепишем систему, полученную с учетом первого уравнения этой системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= -\frac{x}{u\tau}, \quad Mu + P = \Pi, \\ \frac{d}{dl} \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma u P}{M(\gamma - 1)} \right] &= \frac{R}{C_v(\gamma - 1)\tau} \frac{x}{u} q - \frac{RQ(T_{\Pi})}{C_v M(\gamma - 1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7), состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений, теперь может быть разрешена относительно скорости движения смеси и концентрации горючего вещества в смеси по длине камеры сгорания. Это решение может быть использовано для получения других параметров печи, которые зависят от  $x$  и  $u$ .

### 3. Пример решения стационарной задачи

Для определения  $x$  и  $u$  как функций длины в камере сгорания можно сформулировать задачу Коши, задавая значения  $x$  и  $u$  на входе в камеру сгорания:

$$\frac{dx}{dl} = -\frac{x}{u\tau},$$

$$\frac{du}{dl} = \frac{R}{C_v} \left[ \frac{Mqx - \tau u Q(T)}{u\tau(\gamma P - Mu)} \right], \quad 0 \leq l \leq L;$$

$$x(0) = \alpha_1, \quad u(0) = \alpha_2.$$

Для решения системы дифференциальных уравнений применим программу пошагового интегрирования, выполненного методом Кутты – Мерсона.

Проведены расчеты горения капель различного диаметра для задачи Коши с начальными условиями

$$x(0) = 0,346, \quad u(0) = 1,0 \text{ м/с}.$$

Капли диаметром 0,01 мм имеют время сгорания  $\tau = 0,00011$  с и потери на излучение  $Q = 0,00001498$  Дж/с; диаметром 0,1 мм –  $\tau = 0,011$  с и  $Q = 0,001498$  Дж/с; диаметром 1 мм –  $\tau = 0,07$  с и соответственно потери на излучение  $Q = 0,1498$  Дж/с; диаметром 2 мм – время сгорания  $\tau = 2,3$  с и  $Q = 0,27818$  Дж/с. В задаче использовались и постоянные величины: давление –  $P = 101000$  Па, теплота сгорания –  $q = 26000000$  Дж/кг (с учетом диссоциации продуктов сгорания), массовый расход –  $M = 114$  кг,  $\gamma = C_p / C_v = 1,1$ . На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов.

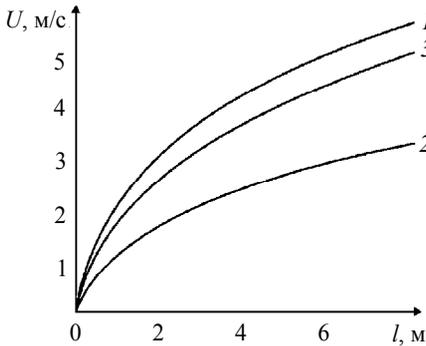


Рис. 1. Изменение скорости горения смеси по длине печи: 1 – диаметр капли 1 мм, 2 – 2 мм, 3 – меньше 1 мм

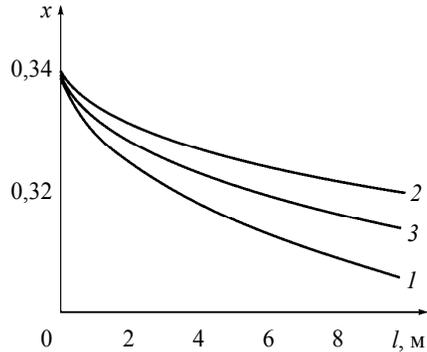


Рис. 2. Изменение концентрации горючего вещества по длине печи: 1 – горение капель диаметром 1 мм, 2 – 2 мм, 3 – горение капель диаметром менее 1 мм

Результаты проведенных расчетов показывают, что скорость горения и концентрации горючего вещества по длине печи, как и потери тепла на излучение, существенно зависят от размеров капель топлива. Наилучшие параметры горения имеют капли диаметром 1 мм, причем по скорости горения для этих капель наблюдается локальный максимум.

#### 4. Расчет потерь на излучение при горении капель топлива различного диаметра

Для теплового расчета трубчатых печей с чисто факельным сжиганием топлива широко применяется метод А.В. Белокопя [1], дающий наилучшую сходимость с экспериментальными данными. За последнее время с целью интенсификации в трубчатых печах теплоотдачи излучением созданы новые типы печей с вторичными излучателями в виде стен из беспламенных панельных горелок и излучающих стен с настильным пламенем. В этих печах теплоотдача экранным поверхностям от вторичных излучателей весьма значительна и соизмерима с теплоотдачей излучением от факела и газовой среды.

Для рассматриваемой модели необходимо учитывать потери на излучение. Величина  $Q(T_n)$  определяется следующим образом (обратным излучением с поверхности капли из-за низкой температуры поверхности пренебрегают):

$$Q(T_n) = 4\varepsilon_{пр} \sigma T_2^4 \pi r_k^2,$$

где  $\varepsilon_{пр}$  – приведенная степень частоты;  $\sigma$  – коэффициент излучения (постоянная Стефана – Больцмана) равный  $5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ ;  $T_2$  – изменение температуры в зоне горения;  $r_k = \frac{\delta}{2}$  – радиус капли.

При  $Q(T_n) \neq 0$  считается, что величина радиуса зоны горения  $r_2$  не изменяется. Причем для чисел Нуссельта  $Nu > 2$   $\left( Nu = \frac{\alpha \delta}{\lambda} \right)$  можно записать  $r_2 = \frac{r_k Nu}{Nu - 2}$ , где  $\alpha = \text{const}$ ;  $\lambda$  – теплопроводность парогазовой смеси.

С учетом излучения это условие должно выполняться строже, так как в результате увеличения тепловыделения в зоне горения в окружающую среду будет отводиться больше тепла излучением и теплопроводностью. Здесь не будем учитывать изменение температуры  $T_2$  в зоне горения из-за влияния излучения. Такой подход допустим, когда эта температура фактически определяется условиями разложения продуктов сгорания.

Лучистый теплообмен для рассматриваемого случая можно определить по формуле

$$\varepsilon_{пр} = \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \left( \frac{r_k}{r_2} \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_k} \right]^{-1},$$

где  $\varepsilon_2$  – степень черноты зоны горения;  $\varepsilon_k$  – степень черноты поверхности капли.

Для капель диаметром 0,01; 0,1; 1 и 2 мм были проведены расчеты, результаты которых сведены в таблицу:

$\delta, \text{м}$	$r_k, \text{м}$	$r_k^2, \text{м}^2$	$Nu$	$\varepsilon_{пр}$	$Q(T), \text{Дж/с}$
$0,01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-11}$	2,0	0,95	$14,98 \cdot 10^{-6}$
$0,1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-9}$	2,0	0,95	$14,98 \cdot 10^{-4}$
$10^{-3}$		$2,5 \cdot 10^{-7}$	2,9	0,01	$13,8 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^{-3}$		$10^{-6}$			$27,82 \cdot 10^{-2}$

Количество тепла, необходимого для горения (испарения капли), подводится к капле посредством теплопередачи.  $T_2 = 2500 \text{ К}$  (с учетом диссоциации  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$ );  $\lambda = 8,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ;  $\varepsilon_k = 0,95$  (для углеводородных топлив);  $\varepsilon_2 = 0,001$  (оценочно для зоны горения паров углеводородных топлив при рассматриваемых условиях).

### 5. Анализ режима работы печи без потерь на излучение

Рассмотрим модель без учета потерь на излучение, т.е.  $Q(T_{\text{п}}) = 0$ , и оценим влияние концентрации смеси  $x$  на скорость ее горения:

$$\frac{dx}{dl} = -\frac{x}{u\tau}, \quad \frac{d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma Pu}{(\gamma-1)M}\right)}{dl} = \frac{R}{C_v(\gamma-1)} \frac{x}{u\tau} q. \quad (8)$$

Подставив первое уравнение из (8) во второе получим

$$\frac{d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma Pu}{(\gamma-1)M}\right)}{dl} = -\frac{R}{C_v(\gamma-1)} q \frac{dx}{dl}.$$

Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, найдем

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma Pu}{(\gamma-1)M} = -\frac{R}{C_v(\gamma-1)} qx. \quad (9)$$

Преобразуем выражение (9), получим

$$C_v(\gamma-1)Mu^2 + 2C_v\gamma Pu + 2RMqx = 0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения

$$D = C_v^2\gamma^2 P^2 - 2C_v(\gamma-1)M^2 Rqx,$$

если  $D < 0$ , то решений уравнения нет (два мнимых корня); если  $D = 0$ , то существует одно решение (два совпадающих корня); если  $D > 0$ , имеем два решения (два действительных корня).

Таким образом,

$$u_{1,2} = \frac{-C_v\gamma P \pm \sqrt{D}}{C_v M(\gamma-1)}.$$

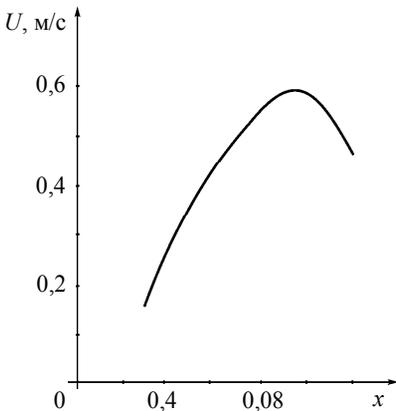


Рис. 3. Влияние концентрации капель жидкого горючего на скорость распространения пламени на начальной стадии процесса

На рис. 3 показано влияние концентрации капель жидкого горючего на скорость распространения пламени на начальной стадии процесса. Видим, что по мере увеличения  $x$  скорость распространения пламени уменьшается при  $x > 9\%$  и убывает при более низких  $x$ . При очень малых и очень больших концентрациях горючего влияние размеров капель по существу отсутствует. При увеличении количества сконденсированного горючего полная концентрация, при которой достигается максимальная скорость распространения пламени, сдвигается в стороны

больших значений концентрации горючего, а значение максимальной скорости распространения пламени уменьшается. Влияние концентрации жидких капель на скорость горения идентично влиянию концентрации жидких капель на скорость распространения пламени, причем этот эффект выражен тем сильнее, чем выше скорость распространения пламени. Это, в свою очередь, показывает, что в случае высокой скорости распространения пламени жидкие капли размером 1 мкм не успевают полностью испариться перед фронтом пламени.

### 6. Расчет динамических режимов трубчатых печей

Рассмотрим следующую тепломассообменную задачу для процессов в трубчатой печи. Для этого приведем систему (1) – (6) к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \frac{\partial \rho}{\partial l} - \rho \frac{\partial u}{\partial l}, \\ \frac{\partial x}{\partial t} = -u \frac{\partial x}{\partial l} - \frac{x}{\tau}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial l} - R \frac{\partial T_n}{\partial l} - \frac{RT_n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l}, \\ \frac{\partial T_n}{\partial t} = (1-\gamma)T_n \frac{\partial u}{\partial l} - u \frac{\partial T_n}{\partial l} + \frac{xq}{C_v \tau} - \frac{Q(T_n)}{C_v \rho} + K_1(T_c - T_n), \\ \frac{\partial T_c}{\partial t} = -w \frac{\partial T_c}{\partial l} + K_2(T_n - T_c) - Q(T_n). \end{cases} \quad (10)$$

Дополним систему (10) начальными и граничными условиями

Нач. усл.	Гран. усл.	
$\rho(l, 0) = \varphi_1(l),$	$\rho(0, t) = \psi_1(t),$	
$x(l, 0) = \varphi_2(l),$	$x(0, t) = \psi_2(t),$	
$u(l, 0) = \varphi_3(l),$	$u(0, t) = \psi_3(t),$	
$T_n(l, 0) = \varphi_4(l),$	$T_n(0, t) = \psi_4(t),$	
$T_c(l, 0) = \varphi_5(l),$	$T_c(0, t) = \psi_5(t).$	(11)

Здесь температура сырья задается в точке  $l = L$ , так как сырье подается сверху в печь, и таким образом имеем противоточный технологический процесс.

На рис. 4–7 приведены результаты расчетов динамических характеристик технологических процессов в трубчатой печи. При этом использована программа COMSOL Multiphysics, предназначенная для решения широкого круга задач, формулируемых системами дифференциальных уравнений с частными производными.

Кривые разгона на выходе печи получены при возмущении на  $\pm 20\%$  с шагом 5% на входе печи по температуре сырья (рис. 5, 6) и по температуре дымовых газов (рис. 4, 7).

Начальные значения температуры сырья 270 °С и температуры дымовых газов – 530 °С. Кривые разгона для плотности, скорости, температуры потока дымовых газов и температуры сырья используются при решении задач локальной автоматизации промышленных установок [1].

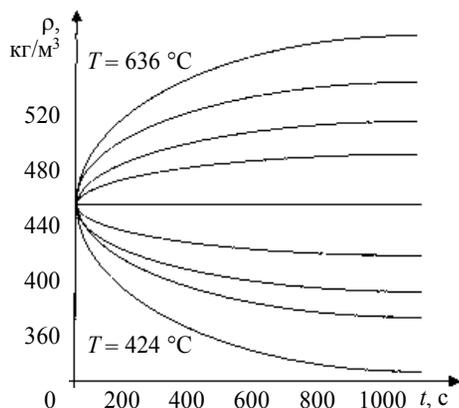


Рис. 4. Кривые разгона по плотности потока в зависимости от температуры потока (от 424 до 636 °С)

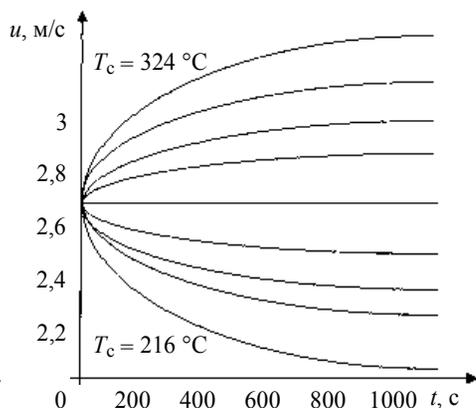


Рис. 5. Кривые разгона по скорости потока дымовых газов в зависимости от температуры сырья (от 216 до 324 °С)

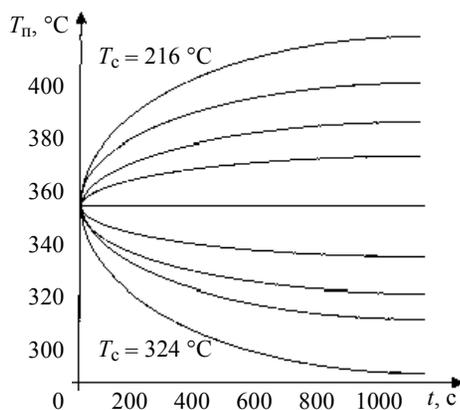


Рис. 6. Кривые разгона по температуре дымовых газов в зависимости от температуры сырья (от 216 до 324 °С)

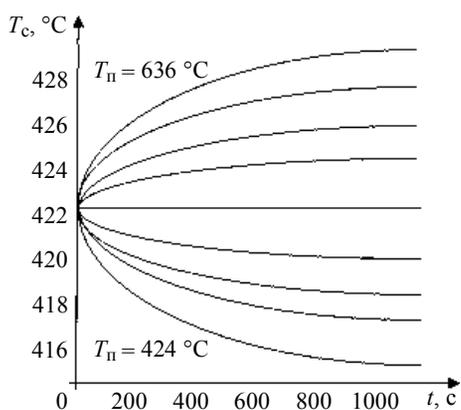


Рис. 7. Кривые разгона по температуре сырья в зависимости от температуры потока газов (от 424 до 636 °С)

### Заключение

Приведенная математическая модель процесса горения в технологических печах является основной для проектирования оптимальных режимов промышленных установок. Расчет статических и динамических характеристик управляемого процесса позволяет определить основные параметры оптимальных процессов управления. Без знания динамических характеристик невозможно управление технологическими процессами в реальных условиях. Возможность получения параметров нестационарных режимов позволяет в режиме реального времени с высокой степенью эффективности избавиться от вредного влияния возмущений. Эффективность данного подхода проиллюстрирована на процессах теплообмена в промышленных объектах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Скобло А.И., Трегубова И.А., Молоканов Ю.К. Процессы и аппараты нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности. М.: Химия, 1982. 584 с.
2. Демиденко Н.Д., Потапов В.И., Шокин Ю.И. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 2006. 551 с.
3. Варшавский Г.А. Горение капли жидкого топлива (диффузионная теория) // Бюро новой техники НКАП. М.: Гостехиздат, 1945. № 6. С. 87–106.

*Демиденко Николай Данилович*

Специальное конструкторско-технологическое бюро

«Наука» СО РАН, Красноярск

E-mail: trya74@mail.ru

Поступила в редакцию 4 апреля 2012 г.

*Demidenko Nikolay D.* (Special Designing and Technological Bureau «Nauka» KSC SB RAS, Krasnoyarsk). **Modeling of static and dynamic regimes in tube furnaces.**

Keywords: mathematical modeling, boundary value problems, stationary and dynamic regimes of tube furnaces, numerical methods.

There are suggested mathematical models for steady-state and dynamic modes of process furnaces as the objects with distributed parameters. The corresponding boundary value problems are formulated and solved. For stationary modes, it is suggested the system of equations describing the concentration of combustible material and the rate of furnace gases. The radiation losses by burning fuel droplets of different diameters are analyzed. The calculations for industrial facilities are performed.