УДК 519.21

А.М. Горцев, А.А. Соловьев

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ MAP-ПОТОКА СОБЫТИЙ И УСЛОВИЯ ЕГО РЕКУРРЕНТНОСТИ

Изучается обобщенный синхронный поток событий (далее MAP-поток), являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок (событий), функционирующих в современных информационных сетях интегрального обслуживания (ИСИО). Приводятся явные выражения плотности вероятностей длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей длительности двух соседних интервалов. Формулируются условия рекуррентности потока событий.

Ключевые слова: *MAP-поток событий, плотность вероятностей, совместная плотность вероятностей, рекуррентность потока событий.*

Математические модели теории массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась еще одна важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей, телекоммуникационных сетей и т.п. Усложнение структуры информационно-телекоммуникационных систем, интеграция различных систем связи, разнообразие программного и аппаратного обеспечения, протоколов передачи данных привели в конце 80-х – начале 90-х годов прошлого века к созданию цифровых сетей интегрального обслуживания (Integrated Services Digital Networks – ISDN). Данные сети характеризуются тем, что по единым аппаратным средствам совместно передаются самые разнообразные виды информации – большие массивы данных, речь и видео в цифровой форме, факсимиле и т.д. При этом теория построения математических моделей функционирования информационно-телекоммуникационных систем, существовавшая до середины 80-х годов прошлого века, во многом становится непригодной для анализа информационных процессов, протекающих в ISDN. В связи с этим в это же время была предпринята успешная попытка создания адекватных математических моделей информационных потоков в телекоммуникационных системах так называемых дважды стохастических потоков событий.

На практике параметры, определяющие входной поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что ещё больше ухудшает ситуацию) они изменяются со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий. По-видимому, одна из первых работ в этом направлении была опубликована в [1], где дважды стохастический поток определяется как поток, интенсивность которого есть случайный процесс. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс; ко второму – потоки, интенсивность которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний. Подчеркнем, что потоки второго класса впервые введены в рассмотрение практически одновременно в 1979 г. в [2–4]. В [2, 3] введенные потоки названы MC (Markov chain)-потоками; в [4] – MVP (Markov versatile processes)-потоками. Последние начиная с конца 80-х годов, особенно с появлением статьи [5], носят название MAP (Markovian Arrival Process)-потоков событий. Отметим, что MAP-потоки событий наиболее характерны для реальных телекоммуникационных сетей [6]. В свою очередь, в зависимости от того, каким образом происходит переход из состояния в состояние, MC-потоки можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки событий [7, 8]; 2) асинхронные потоки событий [9, 10]; 3) полусинхронные потоки событий [11]. Здесь указаны ссылки, в которых авторы впервые рассматривали MC-потоки событий в соответствии с приведенной классификацией. Наиболее общая литература по рассматриваемым типам MC-потоков событий приведена в [12]. В [13] введены в рассмотрение MAP-потоки событий первого порядка (собственно MAP-потоки, введенные в [5]) и MAP-потоки событий второго порядка (суперпозиция (простая сумма) двух MAP-потоков первого порядка, отличающихся друг от друга исходными параметрами). В [13] показывается, что синхронный MC-поток является частным случаем MAP-потока первого порядка, асинхронный и полусинхронный MC-потоки являются частным случаем MAP-потока второго порядка.

Режим функционирования системы массового обслуживания непосредственно зависит от параметров MC(MAP)-потока и состояний, в которых находится поток. Если система обслуживания функционирует в условиях полной (все параметры потока априорно неизвестны) либо частичной (часть параметров потока априорно неизвестна) неопределенности, то возникает задача оценки параметров потока по наблюдениям за потоком (по наблюдениям за моментами наступления событий) [8, 14, 15]. Что касается состояний MC(MAP)-потока событий, то даже тогда, когда поток функционирует в условиях отсутствия априорной неопределенности (параметры потока полностью известны), сказать о том, в каком состоянии находится поток в тот или иной момент времени без наблюдений за потоком, возможно только на основании априорных данных. В этом случае возникает задача оценки состояний потока событий (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [7, 9–12, 16, 17].

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока в первую очередь необходимо знание вероятностных свойств потока. В настоящей статье рассматривается MAP-поток событий первого порядка (далее MAP-поток, либо просто поток), находятся явные виды плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов.

1. Постановка задачи

Рассматривается MAP-поток с интенсивностью, представляющей собой кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. В момент окончания i-го состояния процесса $\lambda(t)$ возможны следующие ситуации, каждая из которых протекает мгновенно: 1) процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в i-е и наступает событие потока в i-м состоянии; совместная вероятность этой ситуации $P(\lambda_i \to \lambda_i, 1) = P_1(\lambda_i \mid \lambda_i)$, $i = 1, 2$; 2) процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е и наступает событие потока; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \to \lambda_j, 1) = P_1(\lambda_i \mid \lambda_j)$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$; 3) процесс $\lambda(t)$ переходит из i-го состояния в j-е и событие потока не наступает; совместная вероятность этой ситуации есть $P(\lambda_i \to \lambda_j, 0) = P_0(\lambda_j \mid \lambda_i)$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$. При этом $P_0(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1(\lambda_j \mid \lambda_i) + P_1(\lambda_i \mid \lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$. Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ при этом примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -\lambda_1 & \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) & -\lambda_2 & \lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) \end{array} \right\| = \| D_0 \mid D_1 \| .$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояния без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. Заметим, что в приведенном определении MAP-потока в явном виде не оговаривается, в каком состоянии процесса $\lambda(t)$ наступает событие потока при переходе $\lambda(t)$ из первого (второго) состояния во второе (в первое). В связи с этим, во-первых, отметим, что в реальных потоках событий, моделями которых являются MAP-потоки, событие потока (в момент окончания того или иного состояния процесса $\lambda(t)$) наступает с полной определенностью в первом либо во втором состояниях процесса $\lambda(t)$, т.е. установлена причинно-следственная связь: первично наступление события потока, вторичен переход процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние либо наоборот. Во-вторых, в задачах расчета характеристик потока, например среднего числа событий, наступивших в единицу времени в том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$, в задачах оценки параметров MAP-потока событий данное обстоятельство необходимо учитывать, иначе расчеты во многих случаях будут некорректными. В настоящей статье, при получении аналитических результатов, данное обстоятельство является несущественным, так как наступление события и переход процесса $\lambda(t)$ из i-го состояния в j-е, $i, j = 1,2$; $i \neq j$, происходят мгновенно. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где 1, 2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; t_1, t_2 ,…– моменты наступления событий. Если положить $P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0$, то имеет место синхронный поток событий [15].

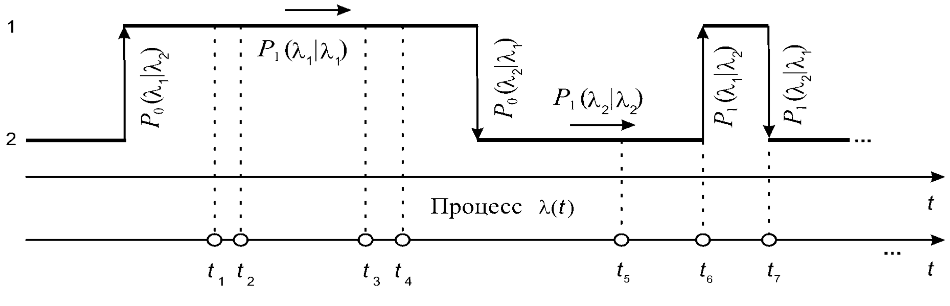

Рис. 1. Формирование MAP-потока событий

Процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока t_1, t_2 ,… . Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий t_1, t_2 ,…, t_k,… образуют вложенную цепь Маркова, т.е. MAP-поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момент наступления события), $k = 1,2,\ldots$. Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1,2,\ldots$, – значение длительности k-го интервала между соседними событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p(\tau_k) = p(\tau), \tau \ge 0,$ для любого k. В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$. Пусть теперь (t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассмотреть соседние интервалы (t_1, t_2), (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \ge 0$, $\tau_2 \ge 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \ge 0$, $\tau_2 \ge 0$.

Задача заключается в нахождении явного вида $p(\tau)$ и явного вида $p(\tau_1, \tau_2)$, а также в установлении условий рекуррентности MAP-потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p(\tau)$

Введем в рассмотрение вероятности $p_{ij}(\tau)$ того, что на интервале $(0,\tau)$ нет событий потока и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$, $i, j = 1, 2$. Тогда для вероятностей $p_{ij}(\tau)$ справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$p'_{11}(\tau) = -\lambda_1 p_{11}(\tau) + \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) p_{12}(\tau),\ p'_{12}(\tau) = \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) p_{11}(\tau) - \lambda_2 p_{12}(\tau);$$

$$p'_{22}(\tau) = -\lambda_2 p_{22}(\tau) + \lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) p_{21}(\tau),\ p'_{21}(\tau) = \lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) p_{22}(\tau) - \lambda_1 p_{21}(\tau),$$

с граничными условиями: $p_{11}(0) = 1$, $p_{12}(0) = 0$; $p_{22}(0) = 1$, $p_{21}(0) = 0$, решая которые находим

$$p_{11}(\tau) = \frac{1}{z_2 - z_1}\left[(\lambda_2 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_2 - z_2)e^{-z_2\tau}\right],\ p_{12}(\tau) = \frac{\lambda_1 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}{z_2 - z_1}\left(e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}\right),$$

$$p_{21}(\tau) = \frac{\lambda_2 P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{z_2 - z_1}\left(e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}\right),\quad p_{22}(\tau) = \frac{1}{z_2 - z_1}\left[(\lambda_1 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_1 - z_2)e^{-z_2\tau}\right],$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[\lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}\right],$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}\right];\ 0 < z_1 < z_2. \qquad (1)$$

В соответствии с определением MAP-потока введем вероятность $p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) + o(\Delta\tau)$ – совместную вероятность того, что без наступлений событий потока процесс $\lambda(\tau)$ перешел на интервале $(0,\tau)$ из первого состояния в первое и на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$ произошло окончание первого состояния процесса $\lambda(\tau)$ и процесс $\lambda(\tau)$ на полуинтервале $[\tau,\tau+\Delta\tau)$ перешел из первого состояния в первое с наступлением события потока. Аналогичные совместные вероятности примут вид

$$p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)+o(\Delta\tau);\ \ p_{12}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)+o(\Delta\tau);$$
$$p_{11}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)+o(\Delta\tau);\ \ p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)+o(\Delta\tau);$$
$$p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)+o(\Delta\tau);\ \ p_{22}(\tau)\lambda_2\Delta\tau P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)+o(\Delta\tau);$$
$$p_{21}(\tau)\lambda_1\Delta\tau P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)+o(\Delta\tau)\,.$$

Соответствующие плотности вероятностей выпишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)p_{11}(\tau);\ \ \tilde{p}_{11}^{(2)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)p_{12}(\tau);$$
$$\tilde{p}_{12}^{(1)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)p_{12}(\tau);\ \ \tilde{p}_{12}^{(2)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)p_{11}(\tau);$$
$$\tilde{p}_{21}^{(1)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)p_{21}(\tau);\ \ \tilde{p}_{21}^{(2)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)p_{22}(\tau);$$
$$\tilde{p}_{22}^{(1)}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)p_{22}(\tau);\ \ \tilde{p}_{22}^{(2)}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)p_{21}(\tau)\,.$$

Тогда плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ того, что без наступления событий потока на интервале $(0,\tau)$ и наступления события в момент времени τ процесс $\lambda(\tau)$ перейдет на этом интервале из состояния i в состояние j $(i,j = 1,2)$, запишутся для разных i и j как

$$\tilde{p}_{11}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)p_{11}(\tau)+\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)p_{12}(\tau);$$
$$\tilde{p}_{12}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)p_{12}(\tau)+\lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)p_{11}(\tau);$$
$$\tilde{p}_{21}(\tau)=\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)p_{21}(\tau)+\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)p_{22}(\tau);$$
$$\tilde{p}_{22}(\tau)=\lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)p_{22}(\tau)+\lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)p_{21}(\tau). \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i,j = 1,2$.

Введем в рассмотрение вероятность $\pi_i(0)$ – условную стационарную вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в i-м состоянии при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, $i = 1,2$ $(\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1)$. Тогда, так как моменты наступления событий образуют вложенную цепь Маркова, справедливы следующие уравнения для вероятностей $\pi_i(0)$:

$$\pi_1(0)=p_{11}\pi_1(0)+p_{21}\pi_2(0),\ \ \pi_2(0)=p_{12}\pi_1(0)+p_{22}\pi_2(0), \qquad (3)$$

где p_{ij} – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau = 0$ до наступления следующего события потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из i-го состояния в j-е $(i = 1,2)$. При этом вероятности p_{ij} определяются в виде

$$p_{11}=\int_0^\infty \tilde{p}_{11}(\tau)d\tau=\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau+\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)\int_0^\infty p_{12}(\tau)d\tau\,;$$

$$p_{12}=\int_0^\infty \tilde{p}_{12}(\tau)d\tau=\lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\int_0^\infty p_{12}(\tau)d\tau+\lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)\int_0^\infty p_{11}(\tau)d\tau\,;$$

$$p_{21}=\int_0^\infty \tilde{p}_{21}(\tau)d\tau=\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau+\lambda_2 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau\,;$$

$$p_{22}=\int_0^\infty \tilde{p}_{22}(\tau)d\tau=\lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)\int_0^\infty p_{22}(\tau)d\tau+\lambda_1 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)\int_0^\infty p_{21}(\tau)d\tau, \qquad (4)$$

где $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ определены в (2), $p_{ij}(\tau)$ – в (1). Подставляя (1) в (4), находим

$$p_{11} = a[P_1(\lambda_1 | \lambda_1) + P_1(\lambda_1 | \lambda_2)P_0(\lambda_2 | \lambda_1)]\,;\ p_{12} = a[P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)P_0(\lambda_2 | \lambda_1)];$$
$$p_{21} = a[P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1)P_0(\lambda_1 | \lambda_2)];\ p_{22} = a[P_1(\lambda_2 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1)P_0(\lambda_1 | \lambda_2)];$$
$$a = 1/[1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)P_0(\lambda_2 | \lambda_1)]. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3), получаем

$$\pi_1(0) = \frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1)P_0(\lambda_1 | \lambda_2)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1)P_0(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)P_0(\lambda_2 | \lambda_1)},$$

$$\pi_2(0) = \frac{P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}{P_1(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1(\lambda_1 | \lambda_1)P_0(\lambda_1 | \lambda_2) + P_1(\lambda_2 | \lambda_2)P_0(\lambda_2 | \lambda_1)}. \tag{6}$$

Плотность вероятностей $p(\tau)$ при этом примет вид

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^{2} \pi_i(0) \sum_{j=1}^{2} \tilde{p}_{ij}(\tau), \tau \ge 0\,. \tag{7}$$

Подставляя в (7) сначала (2), затем (1) и (6) и проделывая при этом необходимые преобразования, получаем явный вид плотности вероятностей $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2\tau}\,,\ \tau \ge 0;$$

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1}\{z_2 - \lambda_1\, \pi_1(0)[1 - P_0(\lambda_2 | \lambda_1)] - \lambda_2\, \pi_2(0)[1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)]\}\,, \tag{8}$$

где z_1, z_2 определены в (1); $\pi_1(0)$, $\pi_2(0)$ – в (6). Положив в (8)

$$P_0(\lambda_2 | \lambda_1) = P_0(\lambda_1 | \lambda_2) = 0\,,\ P_1(\lambda_2 | \lambda_1) = p\,,$$
$$P_1(\lambda_1 | \lambda_1) = 1 - p\,,\ P_1(\lambda_1 | \lambda_2) = q\,,\ P_1(\lambda_2 | \lambda_2) = 1 - q\,,$$

получаем плотность вероятностей $p(\tau)$ для синхронного потока [18].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$

В силу того, что последовательность моментов наступления событий MAP-потока образует вложенную цепь Маркова, совместная плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$p(\tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^{2} \pi_i(0) \sum_{j=1}^{2} \tilde{p}_{ij}(\tau_1) \sum_{k=1}^{2} \tilde{p}_{jk}(\tau_2), \tau_1 \ge 0, \tau_2 \ge 0, \tag{9}$$

где $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau_2)$ определены в (2); при этом в выражениях для $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i = 1,2$, нужно произвести замену τ на τ_1 и τ на τ_2. Тогда подставляя в (9) сначала $\tilde{p}_{ij}(\tau_1)$, $\tilde{p}_{ij}(\tau_2)$, определенные в (2), затем $p_{ij}(\tau_1)$, $p_{ij}(\tau_2)$, определенные в (1) для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, затем $\pi_i(0)$, определенные в (6), $i = 1,2$, и проделывая необходимые преобразования, находим

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \gamma(1-\gamma)\frac{P_1(\lambda_1 | \lambda_1)P_1(\lambda_2 | \lambda_2) - P_1(\lambda_1 | \lambda_2)P_1(\lambda_2 | \lambda_1)}{1 - P_0(\lambda_1 | \lambda_2)P_0(\lambda_2 | \lambda_1)} \times$$
$$\times \left(z_1 e^{-z_1\tau_1} - z_2 e^{-z_2\tau_1}\right)\left(z_1 e^{-z_1\tau_2} - z_2 e^{-z_1\tau_2}\right),\ \tau_1 \ge 0, \tau_2 \ge 0, \tag{10}$$

где $p(\tau_1)$, $p(\tau_2)$, γ определены в (8) для $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$.

Таким образом, в общем случае MAP-поток событий является коррелированным потоком.

Нетрудно получить вероятностные характеристики потока, такие, как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями, дисперсию и ковариацию:

$$M_\tau = \frac{\gamma}{z_1} + \frac{1-\gamma}{z_2}, \; D_\tau = 2\left[\frac{\gamma}{z_1^2} + \frac{1-\gamma}{z_2^2}\right] - \left[\frac{\gamma}{z_1} + \frac{1-\gamma}{z_2}\right]^2,$$

$$\operatorname{cov}(\tau_1, \tau_2) = \gamma(1-\gamma)\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}\frac{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)}{1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}.$$

В рассматриваемом потоке присутствуют события четырех типов: 1) события, наступившие при переходе процесса $\lambda(\tau)$ из первого состояния в первое, 2) события, наступившие при переходе процесса $\lambda(\tau)$ из первого состояния во второе, 3) события, наступившие при переходе процесса $\lambda(\tau)$ из второго состояния в первое, 4) события, наступившие при переходе процесса $\lambda(\tau)$ из второго состояния во второе. Типы событий являются неразличимыми. Обозначим q_j – стационарную вероятность того, что наступившее событие потока есть событие j-го типа, $j = 1, 2, 3, 4$. Тогда, используя вышеприведенные результаты, нетрудно получить явные выражения для q_j:

$$q_1 = bP_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)], \; q_2 = bP_1(\lambda_2 \mid \lambda_1)[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)],$$

$$q_3 = bP_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)], \; q_4 = bP_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)],$$

$$b = [P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) + P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)]^{-1}.$$

Отметим, что

$$\pi_1(0) = q_1 + q_3, \; \pi_2(0) = q_2 + q_4.$$

Полагая в (10)

$$P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1) = P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) = 0, \; P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = p,$$

$$P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) = 1 - p, \; P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) = q, \; P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 1 - q,$$

получаем совместную плотность вероятностей $p(\tau_1, \tau_2)$ для синхронного потока [15].

4. Условия рекуррентности MAP-потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых MAP-поток событий становится рекуррентным потоком.

Используя выражение (8) для γ и выражение (6), можно показать, что

$$\gamma(1-\gamma) = \frac{1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}{(z_2 - z_1)^2} \times$$

$$\times \frac{\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)] - \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]}{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) + P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)} \times$$

$$\times \{\lambda_1\pi_1(0)[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)] - \lambda_2\pi_2(0)[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)]\}. \tag{11}$$

Из (11) вытекает

1) если $\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)] - \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)] = 0$, то совместная плотность (10) факторизуется: $p(\tau_1,\tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$; при этом из (1) следует, что

$z_1 = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)]$ либо $z_1 = \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]$, из (8) следует $\gamma = 1$, и тогда $p(\tau_i) = z_1 e^{-z_1 \tau_i}$, $\tau_i \geq 0$, $i = 1,2$, то есть $p(\tau) = z_1 e^{-z_1 \tau}$, $\tau \geq 0$;

2) если $\lambda_1 \pi_1(0)[1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)] - \lambda_2 \pi_2(0)[1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)] = 0$, то совместная плотность (10) факторизуется: $p(\tau_1,\tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$; при этом из (1) следует, что

$$z_1 = \lambda_1 \frac{P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) + P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)}{1 - P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)}$$

либо
$$z_1 = \lambda_2 \frac{P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) + P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) P_0(\lambda_2 \mid \lambda_1)}{1 - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1)}, \qquad (12)$$

из (8) следует $\gamma = 1$, и тогда

$$p(\tau_i) = z_1 e^{-z_1 \tau_i}, \ \tau_i \geq 0, \ i = 1,2,$$

то есть
$$p(\tau) = z_1 e^{-z_1 \tau}, \ \tau \geq 0;$$

Из (10) следует третье условие факторизации совестной плотности вероятности $p(\tau_1,\tau_2)$: $P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) - P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2) P_1(\lambda_2 \mid \lambda_1) = 0$. Тогда

$$\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1}[z_2 - \lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2)],$$

$$1 - \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1}[\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) + \lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) - z_1]$$

и, следовательно, $p(\tau_i) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau_i} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau_i}$, $\tau_i \geq 0$, $i = 1,2$,

то есть
$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \ \tau \geq 0.$$

Если выполняется одно из вышеприведенных условий, то тогда MAP-поток событий будет рекуррентным потоком. Действительно, пусть $p(\tau_1,\ldots, \tau_k, \tau_{k+1})$ – совместная плотность вероятностей $\tau_1,\ldots, \tau_k, \tau_{k+1}$, где $\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, $k = 1,2,\ldots$. Для $k = 2$ имеет место $p(\tau_1,\tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. Сделаем предположение математической индукции: $p(\tau_1,\ldots, \tau_k) = p(\tau_1)\ldots p(\tau_k)$. Так как моменты наступления событий $t_1, t_2,\ldots, t_k, t_{k+1}$ образуют вложенную цепь Маркова, то MAP-поток событий обладает марковским свойством в моменты наступления событий. Тогда $p(\tau_1,\ldots, \tau_k, \tau_{k+1}) = p(\tau_1,\ldots, \tau_k)\, p(\tau_{k+1} \mid \tau_1,\ldots, \tau_k) = p(\tau_1,\ldots, \tau_k)\, p(\tau_{k+1} \mid \tau_k)$, где $p(\tau_{k+1} \mid \tau_k) = p(\tau_k, \tau_{k+1})/p(\tau_k)$. Так как для двух соседних интервалов (t_{k+1}, t_k), (t_{k+2}, t_{k+1}), $k = 1,2,\ldots$, местоположение которых на временной оси произвольно, справедливо $p(\tau_k, \tau_{k+1}) = p(\tau_k)\, p(\tau_{k+1})$, то получаем $p(\tau_{k+1} \mid \tau_k) = p(\tau_{k+1})$, что доказывает факторизацию совместной плотности вероятности $p(\tau_1,\ldots, \tau_k, \tau_{k+1})$.

При нижеследующем обсуждении условий реккурентности необходимо использование результатов, приведенных в [19].

Для первого условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ (несмотря на то, что поток рекуррентный и плотность $p(\tau)$ экспоненциальная) зависит от предыстории, т.е. зависит от моментов наступлений событий $t_1,\ldots, t_k$. Если здесь ввести дополнительное ограничение: $\lambda_1 P_1(\lambda_1 \mid \lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_2 \mid \lambda_2) = 0$, то вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ не будет зависеть от предыстории, а будет зависеть только от её значения в момент наступления события потока, т.е. от $w(\lambda_1 \mid t_k+0) = P_1(\lambda_1 \mid \lambda_2)/[1 - P_0(\lambda_1 \mid \lambda_2)]$, $k = 1,2,\ldots$; так что при дополнительном ограничении имеется некоторая близость MAP-потока событий к простейшему потоку.

Для второго условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1|\ t)$ также будет зависеть от моментов наступления событий $t_1,\ldots,\ t_k$, несмотря на то, что поток рекуррентный и плотность $p(\tau)$ экспоненциальная. Если ввести два дополнительных условия: 1) $P_1(\lambda_2|\ \lambda_1)[1-P_1(\lambda_2|\ \lambda_2)]-P_1(\lambda_1|\ \lambda_2)[1-P_1(\lambda_1|\ \lambda_1)]=0$, 2) $P_1(\lambda_1|\ \lambda_1)P_1(\lambda_2|\ \lambda_2)-P_1(\lambda_1|\ \lambda_2)P_1(\lambda_2|\ \lambda_1)=0$, то тогда апостериорная вероятность $w(\lambda_1|\ t)=\pi_1$, где $\pi_1=P_1(\lambda_1|\ \lambda_1)/[\ P_1(\lambda_1|\ \lambda_1)+P_1(\lambda_2|\ \lambda_1)]$, π_1 – априорная стационарная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$. То есть для этой ситуации апостериорная вероятность $w(\lambda_1|\ t)$ вообще не зависит от моментов наступления событий, так что здесь имеет место наибольшая близость MAP-потока событий к простейшему потоку. При этом в (12) $z_1=\lambda_1[1-P_0(\lambda_2\,|\,\lambda_1)]$ либо $z_1=\lambda_2[1-P_0(\lambda_1\,|\,\lambda_2)]$.

Для третьего условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1|\ t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от её значения в момент наступления события потока, то есть от $w(\lambda_1|\ t_k+0)=\pi_1(0)=P_1(\lambda_1|\ \lambda_1)/[\ P_1(\lambda_1|\ \lambda_1)\ +\ P_1(\lambda_2|\ \lambda_1)]$, $k=1,2,\ldots$, так что для этой ситуации имеется некоторая близость MAP-потока событий к простейшему потоку.

Заключение

Полученные результаты делают возможным решение задачи оценки неизвестных параметров, задающих MAP-поток событий.

В общем случае коррелированного MAP-потока для оценки неизвестных параметров можно использовать метод моментов; для частных случаев, когда MAP-поток становится рекуррентным, – метод максимального правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kingman J.F.C.* On doubly stochastic Poisson process // Proc. of Cambridge Phylosophical Society. 1964. V. 60. No. 4. P. 923–930.
2. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
3. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
4. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764–779.
5. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
6. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175с.
7. *Нежельская Л.А.* Нелинейная оптимальная фильтрация дважды стахостического потока с инициативными событиями // Тез. докл. научно-технич. конф. «Микросистема – 91». Суздаль. М.: Всесоюзное общество информатики и вычислительной техники, 1991. С. 26–28.
8. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оценка параметров синхронного МС-потока событий // Сети связи и сети ЭВМ: тез. докл. Восьмой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: Изд-во БГУ, 1992. С. 33.
9. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оптимизация параметров адаптера при наблюдении за МС-потоком // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20–32.
10. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. Сер. Системы связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.

11. *Нежельская Л.А.* Алгоритм оценивания состояний полусинхронного потока событий с учетом мертвого времени // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы Четырнадцатой Белорусской зимней школы-семинара по теории массового обслуживания. Минск: Изд-во БГУ, 1998. С. 18–21.
12. *Горцев А.М.*, *Калягин А.А.*, *Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 66–81.
13. *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 1 (14). С. 13–21.
14. *Васильева Л.А.*, *Горцев А.М.* Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69–79.
15. *Бушланов И.В..*, *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.* Оценка параметров синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 76–93.
16. *Горцев А.М.*, *Шмырин И.С.* Оптимальная оценка состояний дважды стохастического потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 52–66.
17. *Бушланов И.В.*, *Горцев А.М.* Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 40–51.
18. *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.* Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник ТГУ. Приложение. 2002. № 1(I). С. 24–29.
19. *Горцев А.М.*, *Нежельская Л.А.*, *Соловьев А.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного синхронного потока // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: тез. докл. Восьмой Российской конференции с международным участием. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. С. 31.

Горцев Александр Михайлович
Соловьев Александр Александрович
Томский государственный университет
E-mail: amg@fpmk.tsu.ru; sisal@mail.ru

Поступила в редакцию 23 апреля 2012 г.

Gortzev Alexander M., *Soloviev Alexander A.* (Tomsk state University). **The joint density of probability intervals MAP of the flow of events and conditions of its recurrence.**

Keywords: MAP-flow of events, the density of probabilities, the joint density of probabilities, recurrence flow of events.

There is considered a MAP-flow of events with the intensity, which is a piecewise-constant stationary random process $\lambda(t)$ with two states $\lambda(t) = \lambda_1$ or λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). The duration of stay of the process of $\lambda(t)$ in the i-th state is distributed according to the exponential law with parameters λ_i, $i = 1,2$. At the end of the i-th state of the process $\lambda(t)$ one of the following situation is possible: 1) the process $\lambda(t)$ moves from i-th state to j-th and the event of the flow arrives; the joint probability of this situation – $P_1(\lambda_i| \lambda_j)$, $i, j = 1,2$; 2) the process $\lambda(t)$ moves from the i-th state to the j-th and event MAP-flow does not occur; the joint probability of this situation is $P_0(\lambda_i | \lambda_j)$, ($i, j = 1,2$; $i \neq j$). Since the occurrence and transition of the process $\lambda(t)$ from state to state takes place instantly, to obtain the analytical results of the article it is irrelevant in which state an event occurs .

There is solved the problem of finding of explicit form of the density of probability $p(\tau)$ of interval between two events in MAP-flow and an explicit form of p (τ_1,τ_2) – joint probability density of the duration of two adjacent intervals.

The conditions of recurrence of MAP flow of events are obtained.