УДК 519.25

Г.М. Кошкин, И.Ю. Глухова

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ARX-ПРОЦЕССОВ

Рассматриваются ядерные оценки условного среднего и функции чувствительности нелинейных ARX-процессов. Находятся главные части среднеквадратических ошибок оценок базовых функционалов и их производных.

Ключевые слова: *ядерные оценки, условное среднее, функция чувствительности, нелинейный ARX-процесс.*

Рассматривается скалярная последовательность $(Y_t)_{t=...-1,0,1,...}$, генерируемая нелинейным ARX(m,p,d)-процессом:

$$Y_t = \Psi(Y_{t-i_1},...,Y_{t-i_m}, X^1_{t-j_1},...,X^1_{t-j_r},...,X^p_{t-j_1},...,X^p_{t-j_k}) + \xi_t = \Psi(Y_{t,m}, X_{t,s}) + \xi_t, \quad (1)$$

где $Y_{t,m} = (Y_{t-i_1},...,Y_{t-i_m})$, $X_{t,s} = (X^1_{t-j_1},...,X^1_{t-j_r},...,X^p_{t-j_1},...,X^p_{t-j_k})$ – экзогенные переменные, $d = \max(r,...,k)$, $1 \le i_1 < ... < i_m << n$, $0 \le j_1 < ... < j_r << n,...,0 \le j_1 < ... < j_k << n$ – известные подпоследовательности натурального ряда чисел, $s = r + \ldots + k$, ξ_t – последовательность независимых одинаково распределенных (с положительной на R^1 плотностью распределения) случайных величин с нулевым математическим ожиданием, единичной дисперсией, нулевым третьим и конечным четвёртым моментами, $\Psi(Y_{t,m}, X_{t,s})$ – неизвестная непериодическая ограниченная функция.

В данной работе предполагается, что выполняются условия, при которых процесс $(Y_t)_{t=...-1,0,1,...}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания (с.п.) с коэффициентом с.п. [1,2]

$$\alpha(\tau) \approx e^{-\delta\tau}, \delta > 0, \tau \to \infty . \quad (2)$$

Модели типа (1) находят широкое применение при анализе экономических систем и финансовых временных рядов.

1. Постановка задачи

Пусть $Y_1, Y_2, ...Y_n$ – наблюдения, порожденные процессом (1), $L = \max(m,d)$. В качестве модели структуры Ψ в (1) возьмем условное математическое ожидание

$$R(y,x) = E(Y_t \mid Y_{t,m} = y, X_{t,s} = x) = E(Y_t \mid y,x), \ (y,x) \in R^{m+s} .$$

Пусть $a(y,x) = \int q f(q,y,x) dq$ – базовый функционал, где $f(q,y,x)$ – неизвестная плотность распределения случайного вектора $(Y_t, Y_{t,m}, X_{t,s})$ в стационарном режиме.

В связи с тем, что $\int f(q,y,x)dq = p(y,x)$, где $p(y,x)$ – плотность распределения вектора $(Y_{t,m}, X_{t,s})$, условное математическое ожидание можно представить в виде

$$b(y,x) = \frac{a(y,x)}{p(y,x)} = \int Y_t f(Y_t \mid y,x) dY_t \,, \tag{3}$$

В качестве непараметрической оценки функционала $a(y,x)$ в точке (y, x) возьмём статистику

$$a_n(y,x) = \frac{1}{n-L}\sum_{i=L+1}^{n} Y_i \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} h_j} K_m\left(\frac{y-Y_{i,m}}{h^y}\right) \frac{1}{\prod_{j=1}^{r} h_{1j} \cdots \prod_{j=1}^{k} h_{pj}} K_s\left(\frac{x-X_{i,s}}{h^x}\right), \tag{4}$$

где $h^y = (h_1, h_2, \ldots h_m)$, $h^x = (h_1^x, h_2^x, \ldots h_p^x)$, $h_1^x = (h_{11}, \ldots h_{1r})$ $, \ldots, h_p^x = (h_{p1}, \ldots, h_{pk})$ – соответствующие параметры размытости, положительные числа, а K_m и K_s – m-мерное и s-мерное ядра.

Таким образом, ядерная оценка подстановки условного функционала $b(y,x)$ в точке (y,x), а следовательно, и функции Ψ в (1) задаются отношением вида

$$b_n(y,x) = \Psi_{n,L}(y,x) = \frac{\sum_{i=L+1}^{n} Y_i \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} h_j} K_m\left(\frac{y-Y_{i,m}}{h^y}\right) \frac{1}{\prod_{j=1}^{r} h_{1j} \cdots \prod_{j=1}^{k} h_{pj}} K_s\left(\frac{x-X_{i,s}}{h^x}\right)}{\sum_{i=L+1}^{n} \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} h_j} K_m\left(\frac{y-Y_{i,m}}{h^y}\right) \frac{1}{\prod_{j=1}^{r} h_{1j} \cdots \prod_{j=1}^{k} h_{pj}} K_s\left(\frac{x-X_{i,s}}{h^x}\right)}. \tag{5}$$

На практике часто необходимо исследовать влияние каждого из факторов модели на выходную переменную. Для этого можно использовать функции чувствительности [3]. Введем обозначения $(y,x) = z$,

$$Z_t = (Y_{t,m}, X_{t,s}) = (Y_{t-i_m}, Y_{1,t-i_{m-1}}, \ldots, Y_{t-i_1}, X_{t-j_s}, X_{t-j_{s-1}}, \ldots, X_{t-j_1}) \,; \tag{6}$$

$$h = (h_1, h_2, \ldots h_m, h_{11}, \ldots h_{1r}, \ldots, h_{p1}, \ldots h_{pk}) = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots \tilde{h}_m, \tilde{h}_{11}, \ldots \tilde{h}_{1r}, \ldots, \tilde{h}_{p1}, \ldots \tilde{h}_{pk}) \,. \tag{7}$$

Функция чувствительности по j-му входу имеет вид

$$T_j(z) = \frac{\partial b(z)}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j}\frac{a(z)}{p(z)}, \tag{8}$$

и, следовательно, нам необходимо оценить частные производные

$$a^{(j)}(y,x) = a^{(j)}(z) = \frac{\partial a\ (z)}{\partial z_j}, j = \overline{1, m+s} :$$

$$a^{(j)}{}_n(y,x) = a^{(j)}{}_n(z) = \frac{1}{n-L}\sum_{i=L+1}^{n} \frac{1}{\tilde{h}_j \prod_{k=1}^{m+s} \tilde{h}_k} K_{m+s}{}^{(j)}\left(\frac{z-Z_i}{h}\right). \tag{9}$$

Оценки функции чувствительности и условного функционала принимают вид

$$T_{jn}(z)=\frac{1}{\tilde{h}_j}\left[\frac{\sum_{i=L+1}^{n} Y_i K_{m+s}{}^{(j)}\left(\frac{z-Z_i}{h}\right)}{\sum_{i=L+1}^{n} K_{m+s}\left(\frac{z-Z_i}{h}\right)}-\frac{\sum_{i=L+1}^{n} Y_i K_{m+s}\left(\frac{z-Z_i}{h_n}\right)\sum_{i=L+1}^{n} K_{m+s}{}^{(j)}\left(\frac{z-Z_i}{h}\right)}{\left(\sum_{i=L+1}^{n} K_{m+s}{}^{(j)}\left(\frac{z-Z_i}{h}\right)\right)^2}\right];\qquad(10)$$

$$b_n(z)=\sum_{i=L+1}^{n} Y_i K_{m+s}\left(\frac{z-Z_i}{h}\right)\Bigg/\sum_{i=L+1}^{n} K_{m+s}\left(\frac{z-Z_i}{h}\right).\qquad(11)$$

2. Асимптотические свойства оценок функционалов и их производных

Пусть

$$a_i^+(z)=\int\left|y^i\right|f(y,z)dy\,,\ a^+{}_{1(1+\tau),tk}(z,s)=\int_{R^2}\left|\upsilon^t q^p\right|f_{1(1+\tau)}(\upsilon,z,q,s)d\upsilon dq\,,\qquad(12)$$

где $f_{1(1+\tau)}$ – $2(m+s+1)$-мерная плотность распределения выборочных величин $(Z_1,Z_{1+\tau})$, $\tau\ge 1$. Тот факт, что (Z_j) удовлетворяет условию с.п. с коэффициентом с.п. $\alpha(\tau)$, обозначим через $(Z_j)\in S(\alpha)$.

Определение 1. Функция K(u) принадлежит классу одномерных нормированных ядер $A^{(r)}$, $r=0{,}1$, если $\int\left|K^{(r)}(u)\right|du<\infty$, $\int K(u)du=1$. Функция $K(\cdot)\in A_\nu^{(r)}$, если $K(\cdot)\in A^{(r)}$, и $K(u)$ удовлетворяет условиям $\int\left|u^\nu K(u)\right|du<\infty,$ $T_j=\int u^j K(u)du=0,\ \ j=1,\dots,\nu-1, T_\nu\ne 0,\ K(u)=K(-u).$

Определение 2. Функция $H(\cdot):R^{m+s}\to R^1$ принадлежит классу $N_{\nu,m+s}(z)$ ($H(\cdot)\in N_{\nu,m+s}(z)$), если она и все ее частные производные (до ν-го порядка включительно) непрерывны в точке z. Функция $H(\cdot)\in N_{\nu,m+s}(R)$, если указанные свойства $H(\cdot)$ выполняются для всех $z\in R^{m+s}$.

В дальнейшем для всех факторов будем использовать один и тот же параметр размытости h_n, а в качестве многомерных ядер возьмем произведение одномерных ядер соответствующей размерности.

Лемма 1 (асимптотическая несмещённость $a_n(z)$). Если функция $a(z)$ непрерывна в точке z, $\sup_x a^+(z)=\sup_x\int|y|f(y,z)dy<\infty$, $K(u)\in A$, последовательность чисел $(h_n)\downarrow 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}Ea_n(z)=0\,.$$

Лемма 2 (асимптотическая несмещённость $a^{(j)}{}_n(z)$). Если функция $a^{(j)}{}_n(z)$ абсолютно непрерывна по $z_j, j=\overline{1,m+s}$, на R^1, $\sup_x a^+(z)=\sup_x\int|y|f(y,z)dy<\infty$, $\sup_x\left|a^{(j)}(z)\right|<\infty$, $K(u)\in A^{(r)}, r=\overline{0,1}$, $\lim_{|u|\to\infty}K(u)=0$, последовательность чисел

$(h_n) \downarrow 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} Ea^{(j)}{}_n(z) = 0 .$$

Лемма 3 (ковариация оценок $a_{tn}^{(rj)}(z)$ и $a_{kn}^{(qj)}(z)$). Пусть θ принимает значения t и k, γ принимает значения r и q и выполняются следующие условия:

1) процесс $(Z_t)_{t=\ldots-1,0,1,\ldots}$ удовлетворяет условию с.п. с коэффициентом с.п. $\alpha(\tau)$, $\int\limits_0^\infty [\alpha(\tau)]^\lambda \, d\tau < \infty$ для некоторого λ;

2) $a^+_{\frac{2\theta}{1-\lambda}}(z) \in N_0(z)$, $a_\theta(\cdot) \in N_0(R)$, $a_{t+k}(\cdot) \in N_0(R)$;

3) $\sup\limits_z a^+_{\frac{2\theta}{1-\lambda}}(z) < \infty$, $\sup\limits_z a^+_\theta(\cdot) < \infty$, $\sup\limits_z a^+_{t+k}(\cdot) < \infty$;

4) $K(\cdot) \in \mathrm{A}^{(\gamma)}$, $\sup\limits_{u\in R^1} \left|K^{(\gamma)}(u)\right| < \infty$, $\sup\limits_{u\in R^1} |K(u)| < \infty$;

5) для монотонно невозрастающей последовательности (h_n) имеет место

$$h_n + \left(\frac{1}{nh_n^{(m+s)(\lambda+1)+r+q}}\right) \downarrow 0 . \tag{13}$$

Тогда

$$\left|\mathrm{cov}(a_{tn}^{(rj)}(z), a_{kn}^{(qj)}(z))\right| \le \frac{24}{nh_n^{(m+s)(\lambda+1)+r+q}} \left(a^+_{\frac{2t}{1-\lambda}}(z) a^+_{\frac{2k}{1-\lambda}}(z)\right)^{\frac{1-\lambda}{2}} \times$$

$$\times\left(\int\limits_{R^{m+s}} \left|K^{(r)}_{m+s}(u)\right|^{\frac{2}{1-\lambda}} du \int\limits_{R^{m+s}} \left|K^{(q)}_{m+s}(u)\right|^{\frac{2}{1-\lambda}} du \right)^{\frac{1-\lambda}{2}} \int\limits_0^\infty [\alpha(\tau)]^\lambda \, d\tau + o\left(\frac{1}{(nh_n^{(m+s)(\lambda+1)+r+q}}\right). \tag{14}$$

Если при этом

6) $\lambda < 1/2$;

7) $\sup\limits_{z,s} a^+_{i(i+\tau),tk}(z,s) < C$, $a^+_{\frac{2\theta}{1-\lambda}}(\cdot) \in \mathrm{N}_0(x)$, $a^+_{\frac{2\theta}{1-\lambda}}(z) < \infty$, то при $n \to \infty$

$$\left|\mathrm{cov}(a_{tn}^{(rj)}(z), a_{kn}^{(qj)}(z)) - \frac{a(z)_{t+p}}{nh_n^{m+s+r+q}} \int K^{(r)}(u) K^{(q)}(u) du \left(\int K^2(u) du\right)^{m+s-1}\right| = o\left(\frac{1}{nh_n^{m+s+r+q}}\right).$$

При $t = k$ имеем частный случай:

$$Da_{tn}^{(rj)}(z) \approx \frac{a_{t+p}(z)}{nh_n^{m+s+2r}} a_{2t}(z) \int (K^{(r)}(u))^2 du \left(\int K^2(u) du\right)^{m+s-1} . \tag{15}$$

Теорема 1 (СКО оптимальных оценок функционалов $a_{tn}^{(rj)}(z)$, $r = 0,1$). Если выполнены условия леммы 1, леммы 2, условия 1) – 4) и 6), 7) леммы 3 при $\gamma = r$, $\theta = t = p$ и дополнительно $\omega_{t\nu}^{(r)}(z) \ne 0$, то при $n \to \infty$

$$h_{tn}^{(rj)o} = \arg\min_{h_{tn}^{(rj)}>0} u^2(a_{tn}^{(rj)}(z)) \approx$$

$$\approx \left[\left[\frac{(m+s+2r)a_{2n}(z)}{2\nu(\text{n-L})\left[\omega_{k\nu}^{(rj)}(z)\right]^2}\right]\int\left[K^{(r)}(u)\right]^2 du\left(\int K^2(u)du\right)^{m+s-1}\right]^{\frac{1}{m+s+2(\nu+r)}}; \qquad (16)$$

$$u^2(a_{tn}^{(rj)}(z)\,|_{h_{tn}^{(rj)}=h_{tn}^{(rj)o}}) = u^2(a_{tn}^{(rj)o}(z)) \approx (m+s+2\nu+2r)\times$$

$$\times\left[\frac{a_{2n}(z)}{2\nu(n-L)}\int\left[K^{(r)}(u)\right]^2 du\left(\int K^2(u)du\right)^{m+s-1}\right]^{\frac{2\nu}{m+s+2(\nu+r)}}\left[\frac{\left[\omega_{k\nu}^{(rj)}(z)\right]^2}{m+s+2r}\right]^{\frac{m+s+2r}{m+2(\nu+r)}} =$$

$$= O\left(n^{-\frac{2\nu}{m+s+2(\nu+r)}}\right). \qquad (17)$$

Доказательства лемм и теоремы данного раздела используют ряд моментов книги [4] и ввиду громоздкости не приводятся. Асимптотические свойства ядерных оценок условного среднего и функции чувствительности нелинейных ARX-процессов будут изучены в следующей статье.

3. Моделирование

Для исследования зависимости индекса промышленного производства РФ (Y) от инвестиций в основной капитал (X^1), курса доллара (X^2) и экспорта (X^3) воспользуемся (1) с $p = 3$, $m = 1$, $r = 1$:

$$Y_n = \Psi(Y_{n-1}, X_{n-1}^1, X_n^1, X_n^2, X_n^3) + \xi_n. \qquad (18)$$

Моделирование проводилось по реальным данным за период с сентября 1994 по март 2004 г., доступным на официальном сайте Госкомстата РФ www.gks.ru.

В соответствии с (5) имеем следующую оценку для Y_n:

$$\overline{Y}_n = \sum_{i=2}^{n} Y_i K_5\left(\frac{z-Z_i}{h}\right) \Big/ \sum_{i=2}^{n} K_5\left(\frac{z-Z_i}{h}\right),$$

где $Z_n = (Y_{n-1}, X_{n-1}^1, X_n^1, X_n^2, X_n^3)$, $h = (h_1, h_2, \ldots h_5)$, $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$. Параметр размытости для каждой переменной вычисляется отдельно по формуле

$$h_i = C_o \sigma_i n^{-1/9}, i = \overline{1,5},$$

$$C_o = \arg\min_{0<C<\infty}\left|Y_{n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} Y_i K_5\left(\frac{z-Z_i}{h}\right) \Big/ \sum_{i=2}^{n-1} K_5\left(\frac{z-Z_i}{h}\right)\right|, \qquad (19)$$

где σ_i^2 – выборочная дисперсия i-го фактора.

При решении задачи идентификации получили, что параметр размытости $h_i = 1{,}1\sigma_i n^{-1/9}$, $i = \overline{1,5}$.

Непараметрический алгоритм идентификации сравнивался с параметрическим МНК-алгоритмом с помощью относительной и среднегодовой ошибок:

$$A_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n-1}\left|\frac{Y_i - \overline{Y}_i}{Y_i}\right|, \quad A(t) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}\left|\frac{Y_i - \overline{Y}_i}{Y_i}\right|, \quad t = 1994,\ldots,2004.$$

где Y_i – истинные значения, а $\overline{Y}_i$ – их оценки.

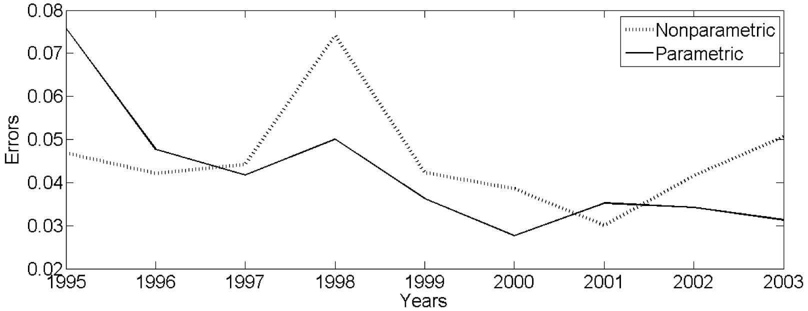

Рис. 1. Среднегодовая ошибка идентификации $A(t)$

Ошибку 1998 года можно объяснить дефолтом экономики РФ, который произошёл в августе 1998 г. При решении задачи прогнозирования ИПП РФ на 1 месяц воспользуемся модификацией (1) вида

$$Y_{n+1} = \Psi(Y_n, X_{1,n-1}, X_{1,n}, X_{2,n}, X_{3,n}) + \xi_n,$$

Как и при решении задачи идентификации, использовались гауссовские ядра. В этом случае параметр размытости равен

$$h_i = 0,9\sigma_i n^{-1/9}, \quad i = \overline{1,5}.$$

Относительные ошибки прогнозирования и идентификации

Вид задачи	Параметрический подход	Непараметрический подход
Идентификация	0,0414	0,0448
Прогнозирование	0,045	0,05

Заключение

Работоспособность предложенных алгоритмов проверена на экспериментальных данных. Показано, что непараметрические алгоритмы идентификации и прогноза практически не проигрывают алгоритмам оценивания по МНК. При этом непараметрический подход обладает адаптивными свойствами и позволяет идентифицировать сложные нелинейные структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Masry E.*, *Tjostheim D.* Nonparametric estimation and identification of nonlinear ARCH time series // Econometric Theory. 1995. V. 11. No. 2. C. 258–289.
2. *Китаева А.В.*, *Кошкин Г.М.* Полурекуррентная непараметрическая идентификация в широком смысле нелинейной гетероскедастической авторегрессии // Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 92–111.

3. *Пащенко Ф.Ф.* Функция чувствительности и ее применение при выборе оптимальной модели // Системы управления. М.: Наука, 1973. С.72–78.
4. *Кошкин Г.М.*, *Пивен И.Г.* Непараметрическая идентификация стохастических систем. Хабаровск: РАН. Дальневосточное отделение, 2009. 336 с.

Кошкин Геннадий Михайлович
Глухова Ирина Юрьевна
Томский государственный университет
E-mail: kgm@mail.tsu.ru; win32_86@mail.ru Поступила в редакцию 14 июня 2012 г.

Koshkin Gennady M., *Glukhova Irina Yu.* (Tomsk State University). **Nonparametric identification of nonlinear ARX – processes.**

Keywords: kernel estimation, conditional mean, sensitivity function, nonlinear ARX-processes.

Kernel estimates of conditional mean and sensitivity function for a nonlinear ARX-processes are considered. The principal parts of mean square errors for the estimators of the basic functionals and their derivatives are found.