

УДК 519.8

В.В. Поддубный, О.В. Романович**КОМБИНАТОРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД МАКСИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКОЙ ТОЧНОЙ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ МНОЖЕСТВА ВОГНУТЫХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА**

Рассматриваются системы, функционирующие по непрерывно-дискретному максиминному критерию. Предлагается комбинаторно-аналитический метод максимизации негладкой точной нижней границы конечного набора вогнутых гладких функций, зависящих от параметра. Метод основан на использовании необходимых условий максимумов и условий пересечения функций набора. Построен комбинаторный алгоритм отыскания решения соответствующей негладкой максиминной задачи. Приведён пример решения задачи нахождения супремума точной нижней границы набора квадратичных вогнутых функций.

Ключевые слова: максиминный критерий, вогнутые функции, точная нижняя граница, негладкая оптимизация, комбинаторный алгоритм.

Задача максимизации точной нижней границы множества гладких функций является частным случаем максиминной задачи, в которой максимизация идёт по непрерывной переменной, а минимизация – по дискретной. Такие непрерывно-дискретные максиминные задачи возникают в теории игр (нижняя цена «игры с природой» [1]), в исследовании операций и теории принятия решений (осторожный критерий Вальда [2]), в математической экономике [3–5], в том числе в математических моделях рынка [6, 7]), и вообще в теории любых динамических систем, функционирующих по непрерывно-дискретному максиминному критерию (технических, экономических, биологических и др.).

Во всех приложениях, где целевая функция задачи максимизации является точечной точной нижней гранью множества функций, приходится иметь дело с недифференцируемой (негладкой) оптимизацией, так как такая целевая функция даже при гладких функциях множества оказывается не гладкой, а кусочно-гладкой, кусочно-дифференцируемой. Для численного решения задач выпуклой негладкой (недифференцируемой) оптимизации в настоящее время разработан мощный математический аппарат субдифференциалов и субградиентов [8–10], на основе которого построены эффективные итерационные вычислительные алгоритмы оптимизации [11, 12]. Эти алгоритмы применимы и к решению задач численной максимизации точной нижней грани множества вогнутых функций, в том числе зависящих от параметра.

Однако задачи максимизации точной нижней грани конечного множества вогнутых функций могут быть решены более простым методом. Метод состоит в приведении исходной негладкой максиминной задачи к эквивалентному набору задач гладкой максимизации, обеспечивающих получение точек максимумов всех функций, и задач отыскания всех точек пересечения этих гладких функций с последующим сравнением значений функций в точках максимумов и в точках пересечений и с комбинаторным отбором точного решения. В ряде случаев (например,

при параболических функциях) эти задачи допускают точное аналитическое решение. Использование такого комбинаторно-аналитического метода предпочтительно при построении и исследовании алгоритмов решения максиминных задач, зависящих от параметров.

1. Математические модели систем, функционирующих по максиминному критерию

Рассмотрим простейшую математическую модель динамической системы, функционирующей по максиминному критерию (см., например, [7]):

$$x(t+1) = \arg \sup_{\xi \in X} \inf_{1 \leq i \leq m} \{f_i(\xi, u(t), x(t))\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где вещественные функции $f_i(\xi, u(t), x(t))$, $i = \overline{1, m}$, непрерывны, дифференцируемы и вогнуты по скалярным аргументам ξ , $x(t) \in X = [x_{\min}, x_{\max}]$ и непрерывны и монотонны по скалярному аргументу $u(t) \in U = [u_{\min}, u_{\max}]$, а $t = 0, 1, 2, \dots$ – дискретное время. Переменная $x(t)$ описывает состояние системы в момент времени t , переменная $u(t)$ – параметр системы или управляющая переменная.

Поскольку интервал X – непустое компактное и выпуклое множество, то в случае непрерывности отображения (1) в соответствии с теоремой Брауэра (см., например, [13]) это отображение имеет неподвижную точку (точку равновесия) $\bar{x}(u)$, к которой стремится состояние $x(t)$ динамической системы (1) при $t \rightarrow \infty$.

Опуская индекс t , получаем статическую модель, действующую на каждом шаге дискретного времени:

$$x^* = \arg \sup_{x \in X} \inf_i \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\}. \quad (2)$$

2. Задача максимизации точной нижней границы конечного набора вогнутых гладких функций

Задача (2) есть задача максимизации точной нижней границы конечного множества

$$M = \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\}$$

вогнутых гладких функций. Обозначив поточечную точную нижнюю грань этих функций через

$$f(x, u) = \inf_i \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\},$$

представим задачу (2) как задачу максимизации функции $f(x, u)$ по переменной x при фиксированном значении параметра u :

$$J(u) = \sup_{x \in X} f(x, u).$$

Нетрудно показать (см., например, [13]), что функция $f(x, u)$ непрерывна и вогнута по x . Однако, в отличие от исходных функций набора, эта функция в общем случае не является гладкой.

Теорема 1. Поточечная точная нижняя грань $f(x, u)$ конечного множества M вогнутых дифференцируемых функций переменной x непрерывна, вогнута и име-

ет не более $m(m-1)$ точек разрыва производной первого рода при любом конечном значении параметра u , то есть является непрерывной кусочно-дифференцируемой (кусочно-гладкой) функцией аргумента x .

Доказательство. Непрерывность и вогнутость функции (4) известна [13]. Точками разрыва производной функции $f(x, u)$, очевидно, могут быть только точки пересечения функций множества M . Каждая из вогнутых функций $f_i(x, u)$ может либо не иметь общих точек с любой другой вогнутой функцией $f_j(x, u)$, либо иметь одну точку пересечения (или касания), либо иметь две точки пересечения. Так, число пересечений первой функции с остальными $m-1$ функциями не превышает $2(m-1)$. Число пересечений второй функции с оставшимися $m-2$ функциями не превышает $2(m-2)$, третьей функции с оставшимися $m-3$ функциями не превышает $2(m-3)$, и т.д. Число пересечений предпоследней функции с единственной оставшейся (последней) функцией не превышает 2. Следовательно, максимальное число возможных точек пересечения m вогнутых функций есть удвоенное число членов арифметической прогрессии $\sum_{i=1}^{m-1} i = m(m-1)/2$, то есть $m(m-1)$. В каждой из точек пересечения скачок производной функции $f(x, u)$ конечен, так как он равен разности производных пересекающихся функций, которая всегда ограничена вследствие дифференцируемости функций множества M . Теорема доказана.

Таким образом, поточечная точная нижняя грань $f(x, u)$ конечного множества M дифференцируемых вогнутых функций является непрерывной вогнутой кусочно-дифференцируемой функцией с не более чем $m(m-1)$ точек изломов (скачков производной). Поэтому оптимизационная задача (5) есть задача максимизации непрерывной вогнутой кусочно-дифференцируемой функции.

3. Комбинаторно-аналитический алгоритм решения задачи максимизации вогнутой кусочно-дифференцируемой функции

Предположим, что часть N_1 , $0 \leq N_1 \leq m$, вогнутых дифференцируемых функций множества M унимодальна, то есть на множестве вещественных чисел R имеется N_1 точек $\{x_i^*(u), i \in \overline{1, m}\}$, в которых выполняются необходимые и достаточные условия максимума:

$$\frac{\partial f_i(x_i^*(u), u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_i(x_i^*(u), u)}{\partial x^2} < 0 \quad i \in \overline{1, m}. \quad (6)$$

Если унимодальные функции отсутствуют ($N_1 = 0$), условия (6) отсутствуют. Обозначим через X_1^* множество вещественных точек максимумов функций. Очевидно, это множество есть вещественное подмножество потенциально возможных точек максимумов: $X_1^* \subseteq \{x_i^*(u), i \in \overline{1, m}\}$.

В соответствии с теоремой 1 на множестве R будет также N_2 , $0 \leq N_2 \leq m(m-1)$, точек пересечения функций множества M из потенциально возможного набора точек пересечения $\{x_{ij}^{*(1,2)}(u), i \in \overline{1, m-1}, j \in \overline{i+1, m}\}$ этих функций, определяемых уравнениями

$$f_i(x_{ij}^{*(1,2)}(u), u) = f_j(x_{ij}^{*(1,2)}(u), u), \quad i \in \overline{1, m-1}, j \in \overline{i+1, m}. \quad (7)$$

Обозначим через X_2^* множество действительных точек пересечения функций набора M . Очевидно, это множество есть вещественное подмножество потенциально возможных точек пересечений: $X_2^* \subseteq \{x_{ij}^{*(1,2)}(u), i = \overline{1, m-1}, j = \overline{i+1, m}\}$.

Решение $x^*(u)$ задачи максимизации (5) может принадлежать только непустому объединению $X^* = X_1^* \cup X_2^*$ конечных множеств X_1^* и X_2^* . Если $X^* = \emptyset$, задача (5) на всей вещественной оси R не имеет решения (вырождена). Действительно, в этом случае во множестве M нет унимодальных функций, все вогнутые функции множества M не пересекаются, так что поточечная точная нижняя грань $f(x, u)$ множества M совпадает с минимальной неунимодальной вогнутой функцией $f_{\min}(x, u)$ множества M , не имеющей максимума.

Однако при наличии ограничений на интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$ возможных (допустимых) значений переменной x решение $x^*(u)$ задачи (5) существует всегда, и в случае пустого множества X^* его следует искать на границах интервала $[x_{\min}, x_{\max}]$, выбирая в качестве решения $x^*(u)$ точку наибольшего значения минимальной функции $f_{\min}(x, u)$ множества M на концах интервала: $x^*(u) = \arg \sup \{f_{\min}(x_{\min}, u), f_{\min}(x_{\max}, u)\}$.

Включим теперь граничные точки интервала $[x_{\min}, x_{\max}]$ во множество X^* и определим его как объединение множеств X_1^* , X_2^* и $\{x_{\min}, x_{\max}\}$: $X^* = X_1^* \cup X_2^* \cup \{x_{\min}, x_{\max}\}$. Для каждого фиксированного значения параметра u найдём интервал $X(u)$ как верхнее лебеговское множество, содержащее все точки X_1^* максимумов функций множества M , все точки X_2^* пересечения этих функций, а также точки $\{x_{\min}, x_{\max}\}$:

$$X(u) = \{x \in R \mid f(x, u) \geq c(u)\}, \quad (8)$$

$$c(u) \leq \min \left\{ f(x_i^*(u)), i = \overline{1, m}, x_i^*(u) \in X_1^*; f(x_{ij}^{*(1,2)}(u)), i = \overline{1, m-1}, \right. \\ \left. j = \overline{i+1, m}, x_{ij}^{*(1,2)}(u) \in X_2^*; f(x_{\min}, u), f(x_{\max}, u) \right\}, \quad (9)$$

так что $X(u) \supset X^*$. Упорядочим в порядке возрастания все элементы множества X^* , оставляя в возможных связках (множествах совпадающих элементов) только по одному (например, первому или последнему) элементу. Тогда

$$X^* = \{x_{(k)}^*(u), k = \overline{1, N}\}, \quad (10)$$

где k – ранг элемента множества X^* , $N \leq N_1 + N_2 + 2 \leq m + m(m-1) + 2 = m^2 + 2$ – мощность (число элементов) множества X^* .

Теперь легко построить комбинаторный алгоритм решения оптимизационной задачи (5) с учётом ограничений $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$.

Шаг 1. Решаем аналитически или численно с помощью известных алгоритмов гладкой оптимизации системы уравнений (6) и (7) без учёта ограничений $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$. Для нахождения точек максимумов функций множества M (численного решения системы независимых уравнений (6)) можно использовать любой градиентный метод (например, метод Ньютона или квазиньютоновские методы). Для численного решения системы независимых уравнений (7) можно также использовать градиентные методы или, например, метод Нелдера – Мида, вычис-

ляя предварительно начальные приближения $\{x_{ij}^{(1,2)}(u), i = \overline{1, m-1}, j = \overline{i+1, m}\}$ точек $\{x_{ij}^{*(1,2)}(u), i = \overline{1, m-1}, j = \overline{i+1, m}\}$ как точки пересечения квадратичных аппроксимаций функций множества M :

$$\begin{aligned} & f_i(x_i^*(u), u) + \frac{\partial f_i(x_i^*(u), u)}{\partial x} (x_{ij}^{(1,2)}(u) - x_i^*(u)) = \\ & = f_j(x_j^*(u), u) + \frac{\partial f_j(x_j^*(u), u)}{\partial x} (x_{ij}^{(1,2)}(u) - x_j^*(u)). \end{aligned} \quad (11)$$

В результате находим все точки максимумов и точки пересечений функций множества M .

Добавив к этим точкам граничные точки $x_{\min}, x_{\max}$ интервала поиска решения задачи (2), получаем все элементы множества X^* претендентов на решение максимальной задачи (2).

Шаг 2. Упорядочиваем в порядке возрастания элементы множества X^* , представляя его в виде (10). Находим ранги (индексы) k_1 и k_2 элементов $x_{\min}$ и $x_{\max}$ соответственно. Полагаем $k = k_1$.

Заметим, что этот шаг можно пропустить, если следующий шаг выполнять последовательно для всех элементов неупорядоченного множества X^* , начиная с $k_1 = 1$ и заканчивая при $k_2 = N$, а точку максимума функции $f(x, u)$ находить сравнением её значений во всех точках множества X^* .

Шаг 3. Вычисляем все функции множества M последовательно в точках $\{x_{(k)}^*(u), k = \overline{k_1, k_2}\}$, начиная с $k = k_1$. На каждом шаге k этого процесса находим значение точной нижней грани множества функций M :

$$f(x_{(k)}^*(u), u) = \inf_{1 \leq i \leq m} \{f_i(x_{(k)}^*(u), u)\}. \quad (12)$$

Шаг 4. При $k > k_1$ сравниваем значение (12) точной нижней грани множества функций M в точке $x_{(k)}^*(u)$ с предыдущим значением (в точке $x_{(k-1)}^*(u)$). Поскольку $f(x, u)$ вогнута по x , принимаем следующие решения:

- если $f(x_{(k)}^*(u), u) < f(x_{(k-1)}^*(u), u)$ и $k \leq k_2$, прекращаем процесс вычисления значений функции f , полагаем $x^*(u) = x_{(k-1)}^*(u)$ и переходим на следующий шаг 5;
- если $f(x_{(k)}^*(u), u) > f(x_{(k-1)}^*(u), u)$ и $k = k_2$, прекращаем процесс вычисления значений функции f , полагаем $x^*(u) = x_{(k)}^*(u)$ и переходим на следующий шаг 5;
- в противном случае увеличиваем k на 1 и возвращаемся на шаг 3 (возможностью совпадения значений функции f в соседних точках упорядоченного множества X^* пренебрегаем, так как такое совпадение возможно лишь в том случае, если во множестве функций M имеется функция-константа, не зависящая от x).

Шаг 5. Конец.

4. Пример: задача максимизации точной нижней границы вогнутых квадратичных функций

4.1. Компьютерное моделирование задачи

В качестве примера решения задачи максимизации точной нижней границы набора вогнутых гладких функций рассмотрим максиминную задачу для двух и трёх вогнутых квадратичных функций, зависящих от параметра u :

$$\begin{aligned} f_1(x, u) &= -a_1(x - x_1)^2 - u, \quad f_2(x, u) = -a_2(x - x_2)^2 + u, \\ f_3(x, u) &= -a_3(x - x_3)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Эти функции непрерывны и дифференцируемы по своим аргументам, вогнуты (выпуклы вверх) по x и монотонны по u . Задача (2) максимизации точной нижней границы этих функций на заданном интервале $X = [x_{\min}, x_{\max}]$ принимает вид

$$x^* = \arg \sup_{x \in X} \inf_i \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\}, \quad m = 2, 3. \quad (14)$$

Приведём сначала результаты компьютерного моделирования задачи (14) при следующих параметрах:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 1,5, \quad a_3 = 1, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 15, \quad (15)$$

так что $a_1 > a_2 > a_3$, $x_1 < x_2 < x_3$. Протабулируем функцию

$$f(x, u) = \inf_i \{f_i(x, u), i = \overline{1, m}\}$$

на интервалах $x \in [-40, 20]$ с шагом 0,1 и $u \in [-150, 250]$ с шагом 1.

На рис. 1, 2 представлены контурные карты поверхности $f(x, u)$ соответственно при множествах M двух и трёх функций (13). Тонкие линии разделяют области, в которых нижняя граница $f(x, u)$ множества функций M совпадает с $f_1(x, u)$ (верхняя область на рис. 1, 2), с $f_2(x, u)$ (нижняя область на рис. 1, 2), с $f_3(x, u)$ (центральная область на рис. 2). Это линии недифференцируемости, разрыва производных функции $f(x, u)$ по переменной x . Полуужирные линии изображают геометрическое место точек максимальных по x значений функции $f(x, u)$ при различных значениях параметра u . Кружочками на этих линиях отмечены точки с координатами (x^*, u^*) , где максиминный критерий $J(u)$ принимает наибольшее по параметру u значение J^* (точка глобального максимума).

На рис. 1, 2 видно, что область значений параметра u распадается на части с разным числом точек пересечения функций множества M . Так, в области «больших» значений параметра может не быть точек пересечения функций, но могут присутствовать точки максимума одной из функций (в нашем примере это точки максимума $f_1(x, u)$ на полужирной линии).

В области «средних» значений параметра могут присутствовать все или часть точек пересечения функций и точки максимумов части функций, а также точка глобального максимума. В области «малых» значений параметра могут присутствовать точки пересечения каких-то функций и точки максимума одной из них (в нашем примере это точки максимума $f_2(x, u)$ на полужирной линии).

На рис. 3, 4 представлен ход зависимости максиминного критерия J от параметра u также при двух и трёх функциях множества M соответственно. Это ход максиминного критерия вдоль полужирных линий, представляющих на рис. 1, 2 решения задачи максимизации нижней границы множества функций при различных значениях параметра u .

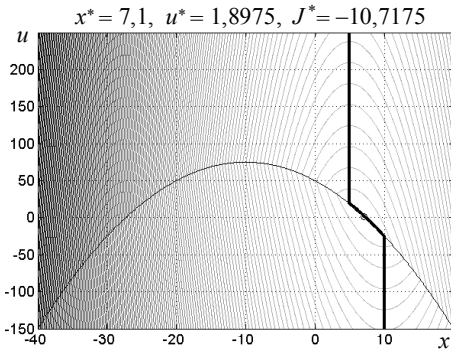


Рис. 1. Контурная карта $f(x, u)$ при $t = 2$.
Вверху $f(x, u) = f_1(x, u)$, внизу $f(x, u) = f_2(x, u)$

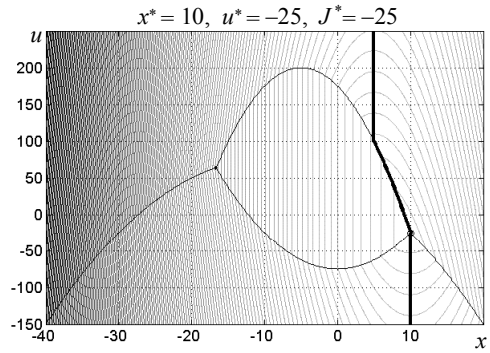


Рис. 2. Контурная карта $f(x, u)$ при $t = 3$.
Вверху $f(x, u) = f_1(x, u)$, внизу $f(x, u) = f_2(x, u)$, в центре $f(x, u) = f_3(x, u)$.

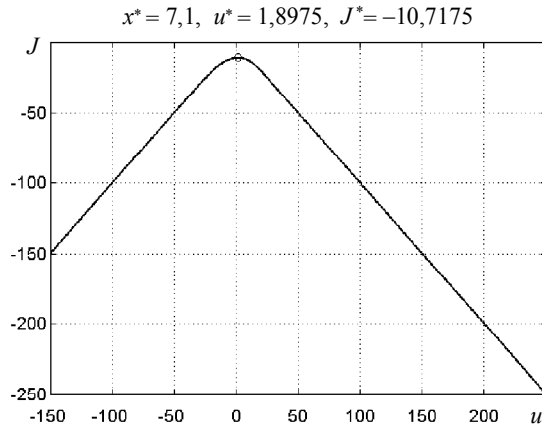


Рис. 3. Зависимость критерия J от параметра u при $t = 2$

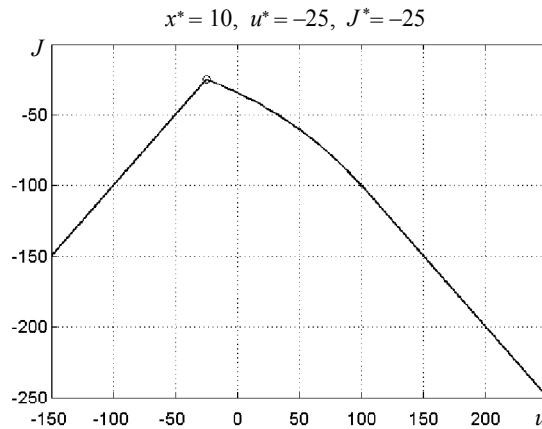


Рис. 4. Зависимость критерия J от параметра u при $t = 3$

Обратим внимание, что в точке глобального максимума, лежащей на линиях пересечений функций, критерий $J(u)$ может быть как дифференцируемым (рис. 3), так и недифференцируемым (рис. 4).

4.2. Аналитическое решение при $m = 2$

Решим задачу (14) аналитически в простейшем случае $m = 2$. Положим для простоты $X = R$ (поскольку функции параболические, максимум всегда существует на R).

Выпишем систему уравнений (6) для нашего примера при $m = 2$ и решим её аналитически:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(x_1^*(u), u)}{\partial x} = -2a_1(x_1^*(u) - x_1) = 0, \quad x_1^*(u) = x_1, \quad \frac{\partial^2 f_1(x_1^*(u), u)}{\partial x^2} = -2a_1 < 0; \\ \frac{\partial f_2(x_2^*(u), u)}{\partial x} = -2a_2(x_2^*(u) - x_2) = 0, \quad x_2^*(u) = x_2, \quad \frac{\partial^2 f_2(x_2^*(u), u)}{\partial x^2} = -2a_2 < 0. \end{aligned}$$

Выпишем уравнение (7) для этого примера и решим его аналитически:

$$\begin{aligned} f_1(x_{12}^{*(1,2)}(u), u) = f_2(x_{12}^{*(1,2)}(u), u) : -a_1(x_{12}^{*(1,2)}(u) - x_1)^2 - u = -a_2(x_{12}^{*(1,2)}(u) - x_2)^2 + u, \\ x_{12}^{*(1,2)}(u) = \frac{a_1x_1 - a_2x_2 \pm \sqrt{\Delta(u)}}{a_1 - a_2}, \quad \Delta(u) = a_1a_2(x_1 - x_2)^2 - 2(a_1 - a_2)u. \end{aligned}$$

Получили потенциальные множества точек максимумов и точек пересечения функций:

$$X_1^* \subseteq \{x_i^*(u), i = 1, 2\} = \{x_1, x_2\}, \quad (16)$$

$$X_2^* \subseteq \{x_{12}^{*(1,2)}(u)\} = \left\{ \frac{a_1x_1 - a_2x_2 - \sqrt{\Delta(u)}}{a_1 - a_2}, \frac{a_1x_1 - a_2x_2 + \sqrt{\Delta(u)}}{a_1 - a_2} \right\}. \quad (17)$$

Исследуем поведение зависящих от параметра u корней (17) уравнения для точек пересечения функций.

При $\Delta(u) > 0$ корни

$$x_{12}^{*(1)}(u) = \frac{a_1x_1 - a_2x_2 - \sqrt{\Delta(u)}}{a_1 - a_2}, \quad x_{12}^{*(2)}(u) = \frac{a_1x_1 - a_2x_2 + \sqrt{\Delta(u)}}{a_1 - a_2} \quad (18)$$

действительные разные, и мы имеем две точки пересечения парабол. Эта ситуация реализуется в области U_1 «малых» значений параметра u :

$$U_1 : u < \frac{a_1a_2}{2(a_1 - a_2)}(x_1 - x_2)^2 = u_0. \quad (19)$$

В этой области для всех $x \in R$ имеем

$$f(x, u) = \begin{cases} f_1(x, u), & \text{если } x \leq x_{12}^{*(1)}(u), \\ f_2(x, u), & \text{если } x_{12}^{*(1)}(u) \leq x \leq x_{12}^{*(2)}(u), \\ f_1(x, u), & \text{если } x \geq x_{12}^{*(2)}(u). \end{cases} \quad (20)$$

При этом область U_1 распадается на три подобласти U_{10} , U_{11} и U_{12} :

$$U_{10}: u_1 = \frac{a_2}{2}(x_2 - x_1)^2 < u < u_0, \quad (21)$$

в которой $x_{12}^{*(2)}(u) < x_1$ и супремум функции $f(x, u)$ достигается в точке максимума функции $f_1(x, u)$: $x^* = x_1$;

$$U_{11}: u_2 = -\frac{a_1}{2}(x_2 - x_1)^2 \leq u \leq u_1, \quad (22)$$

в которой $x_1 \leq x_{12}^{*(2)}(u) \leq x_2$ и супремум функции $f(x, u)$ достигается в точке пересечения $x_{12}^{*(2)}(u)$: $x^* = x_{12}^{*(2)}(u)$;

$$U_{12}: u < u_2, \quad (23)$$

в которой $x_{12}^{*(2)}(u) > x_2$ и супремум функции $f(x, u)$ достигается в точке максимума функции $f_2(x, u)$: $x^* = x_2$.

При $\Delta(u) < 0$ корни комплексно-сопряжённые, так что точек пересечения парабол нет (параболы нигде не пересекаются). Эта ситуация реализуется в области U_2 «больших» значений параметра u :

$$U_2: u > \frac{a_1 a_2}{2(a_1 - a_2)}(x_1 - x_2)^2 = u_0. \quad (24)$$

В этой области для всех $x \in R$ имеем $f(x, u) = f_1(x, u)$ и супремум функции $f(x, u)$ достигается в точке максимума функции $f_1(x, u)$: $x^* = x_1$.

При $\Delta(u) = 0$ корни вещественные кратные и имеется только одна точка пересечения парабол (точка касания). Эта ситуация реализуется в области U_3 , состоящей из единственной точки u_0 , разделяющей области U_1 и U_2 значений параметра u :

$$U_3: u = \frac{a_1 a_2}{2(a_1 - a_2)}(x_1 - x_2)^2 = u_0. \quad (25)$$

В этой области для всех $x \in R$ также имеем: $f(x, u_0) = f_1(x, u_0)$. Поскольку

$$x_{12}^{*(1)}(u_0) = x_{12}^{*(2)}(u_0) = x_{12}^*(u_0) = \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2}{a_1 - a_2} < x_1, \quad (26)$$

супремум функции $f(x, u_0)$ достигается в точке максимума функции $f_1(x, u_0)$: $x^* = x_1$.

4.3. Численное решение

Продemonстрируем теперь численное решение задачи максимизации (14) на примере максимизации нижней границы двух вогнутых функций отдельно по областям U_1 , U_2 и U_3 значений параметра u .

Воспользуемся алгоритмом п. 3.

Шаг 1. Используя аналитически найденные элементы множества X^* претендентов на решение задачи (формулы (16), (17)), составим множества X^* по областям, вычислив предварительно по формулам (19), (21), (22) величины $u_0 = 75$, $u_1 = 18,75$, $u_2 = -25$. Область $U_1: u < u_0 = 75$ распадается на три подобласти: U_{10} , U_{11} , U_{12} .

В подобласти U_{10} : $u_1 = 18,75 < u < u_0 = 75$ выберем, например, $u = 50$. Найдём $\Delta = 25$ и вычислим элементы множества X^* . Результат поместим в таблицу 1.

В подобласти U_{11} : $u_2 = -25 < u < u_1 = 18,75 < u_0 = 75$ выберем, например, $u = 0$. Найдём $\Delta = 75$ и вычислим элементы множества X^* . Результат поместим в соответствующую строку таблицы.

В подобласти U_{12} : $u < u_2 = -25 < u_1 = 18,75 < u_0 = 75$ выберем, например, $u = -100$. Найдём $\Delta = 175$ и вычислим элементы множества X^* . Результат также поместим в соответствующую строку таблицы.

В области U_2 : $u > u_0 = 75$ выберем, например, $u = 100 > u_0 = 75$. В этом случае нет точек пересечения функций. Найдём элементы множества X^* и поместим их в соответствующую строку таблицы.

В области U_3 : $u = u_0 = 75$ имеем кратные корни уравнения, определяющего точку пересечения функций. Найдём элементы множества X^* и поместим их в соответствующую строку таблицы.

Результаты численных расчётов

	x_1^*	x_2^*	$x_{12}^{*(1)}$	$x_{12}^{*(2)}$	$J = \max f$	x^*	(x^*, u)
$u = 50 \in U_{10}, \Delta = 25$							
X^*	5	10	-20	0	-50	5	(5, 50)
$f_1(X^*, u)$	-50	-100	-1300	-100			
$f_2(X^*, u)$	12,5	50	-1300	-100			
$f(X^*, u)$	-50	-100	-1300	-100			
$u = 0 \in U_{11}, \Delta = 75$							
X^*	5	10	-27,3205	7,3205	-10,8	7,3205	(7,3205, 0)
$f_1(X^*, u)$	0	-50	-2089,2	-10,8			
$f_2(X^*, u)$	-37,5	0	-2089,2	-10,8			
$f(X^*, u)$	-37,5	-50	-2089,2	-10,8			
$u = -100 \in U_{12}, \Delta = 175$							
X^*	5	10	-36,4575	16,4575	-100	10	(10, -100)
$f_1(X^*, u)$	100	50	-3337,5	-162,5			
$f_2(X^*, u)$	-137,5	-100	-3337,5	-162,5			
$f(X^*, u)$	-137,5	-100	-3337,5	-162,5			
$u = 100 \in U_2, \Delta = -25 < 0$							
X^*	5	10	-	-	-100	5	(5, 100)
$f_1(X^*, u)$	-100	-150	-	-			
$f_2(X^*, u)$	62,5	100	-	-			
$f(X^*, u)$	-100	-150	-	-			
$u = 75 \in U_3, \Delta = 0$							
X^*	5	10	-10	-10	-75	5	(5, 75)
$f_1(X^*, u)$	-75	-125	-525	-525			
$f_2(X^*, u)$	37,5	75	-525	-525			
$f(X^*, u)$	-75	-125	-525	-525			

Шаг 2 ранжирования элементов множеств X^* опускаем и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вычисляем множества значений функций (13) во всех точках множеств X^* по областям. Результаты помещаем в соответствующие строки таблицы 1.

Шаг 4. Сравниваем значения функций $f_1(x, u)$ и $f_2(x, u)$ в точках множества X^* , представленных в таблице при каждом фиксированном значении u , и получаем значения $f(x, u) = \min \{f_1(x, u), f_2(x, u)\}$ в точках множества X^* . Записываем их так-

же в соответствующую строку таблицы. Определяем индекс максимального значения этой функции и считываем значение соответствующего этому индексу элемента множества X^* , получая в результате точку x^* (решение максиминной задачи (14)) и величину J максимального значения функции $f(x, u)$ для каждого фиксированного значения параметра u . Эти результаты помещаем в соответствующие столбцы в правой части таблицы.

Шаг 5. Заканчиваем вычисления.

Сравнивая результаты с табулированными значениями максиминного критерия (14), представленными на рис. 1 и 3, убеждаемся в правильности работы алгоритма.

Заключение

Предложенный в данной работе комбинаторно-аналитический метод решения непрерывно-дискретной максиминной задачи оптимизации (2) позволяет свести задачу недифференцируемой максимизации нижней границы конечного множества дифференцируемых вогнутых функций к конечному набору задач дифференцируемой оптимизации с последующим решением задачи отыскания нижней цены некоторой матричной игры. Действительно, набор функций M задачи (2) конечен (m), множество X^* претендентов на решение задачи, полученное аналитически или путём решения задач дифференцируемой оптимизации, конечно (N не более, чем $m^2 + 2$), так что при каждом фиксированном значении параметра u , как видно из таблицы 1, мы имеем матричную игру $m \times N$, где m – число стратегий «природы», а N – число стратегий «игрока», функционирующего по максиминному критерию. Заметим, что в общем случае такая игра не имеет седловой точки (решения в чистых стратегиях), так как нижняя и верхняя цены игры не всегда совпадают. Например, при $u = 0$ верхняя цена игры, равная 0, не совпадает с нижней ценой, равной $-10,8$, тогда как при других значениях u , представленных в таблице, нижние и верхние цены игр совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Льюис Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Введение и критический обзор. М.: ИЛ, 1961. 644 с.
2. Блекуэлл Д., Гиршик М.А. Теория игр и статистических решений. М.: ИЛ, 1958. 374 с.
3. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 708 с.
4. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985. 200 с.
5. Kelly A. Decision Making Using Game Theory: An Introduction for Managers. New York: Cambridge University Press, 2003. 204 p.
6. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень: Учебник. М.: ИНФРА-М, 2008. 844 с.
7. Поддубный В.В., Романович О.В. Математическое моделирование оптимального рынка конкурирующих товаров в условиях лага поставок // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4. № 2. С. 431–450.
8. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
10. Шор Н.З. Методы оптимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наукова думка, 1979. 200 с.
11. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наукова думка, 1989. 208 с.

12. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации. М.: МЦНМО, 2010. 281 с.
13. Бусыгин В.П., Желободько В.Е., Цыплаков А.А. Микроэкономика – третий уровень: учебник. Новосибирск, НГУ, 2003. 702 с.

Поддубный Василий Васильевич

Романович Ольга Владимировна

Томский государственный университет,

E-mail: vvpoddubny@gmail.com; hjkm@ngs.ru

Поступила в редакцию 8 июня 2012 г.

Poddubny Vasilii V., Romanovich Olga V. (Tomsk State University). Combinatorial-analytical method for maximizing of nonsmooth greatest lower boundary of the set of smooth concave functions depending on the parameter.

Keywords: maximin criterion, concave functions, greatest lower bound, nonsmooth optimization, combinatorial algorithm.

We consider systems that operate according a continuous-discrete maximin criterion. The combinatorial-analytic method of maximizing of nonsmooth greatest lower boundary of the finite set of concave smooth functions, depending on the parameter, is proposed. The method is based on necessary conditions for both maxima and intersections of the set of functions. It produces a set of points-applicants that may become the solution of the nonsmooth maximin problem. A combinatorial algorithm for finding solution is constructed.

The proposed combinatorial-analytic method for solving discrete-continuous maximin optimization problem reduces the problem of maximizing nondifferentiable lower boundary of a finite set of differentiable concave functions to a finite set of differentiable optimization problems with subsequent solution of the problem of finding lower price of some matrix game. In general, this game has no saddle point (solution in pure strategies), because the lower and upper values of the game do not always coincide.

The use of the combinatorial-analytic method is more preferable in comparison with subgradient optimization methods by construction and study of algorithms for solving the maximin problems depending on parameters. An example of solving of the problem of finding of the supremum of the greatest lower boundary of the set of quadratic concave functions is shown.