# УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.865.5

**В.В. Домбровский, Т.Ю. Объедко**

## УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ СИСТЕМАМИ С МАРКОВСКИМИ СКАЧКАМИ ПО КРИТЕРИЮ «MEAN-VARIANCE» ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Рассматривается задача управления с прогнозирующей моделью по критерию «mean-variance» для дискретных систем с мультипликативными шумами и скачкообразно меняющимися параметрами. Параметры уравнений меняются в соответствии с эволюцией однородной марковской цепи с конечным пространством состояний и известной матрицей переходных вероятностей. Определена стратегия управления с учетом явных ограничений на управляющие переменные.

**Ключевые слова:** *управление с прогнозирующей моделью, «mean-variance»-критерий, марковские скачки, ограничения.*

Моделями с марковскими скачкообразными параметрами описывается широкий класс реальных систем [1]. В этих моделях предполагается, что смена структуры системы осуществляется в соответствии с эволюцией наблюдаемой или скрытой марковской цепи с конечным пространством состояний.

Решению различных задач управления и оценивания для таких систем посвящено значительное количество работ [2–12].

В работах нобелевского лауреата по экономике Г. Марковица [13] при решении однопериодной (статической) задачи оптимизации инвестиционного портфеля (ИП) был предложен критерий «mean-variance» («среднее – вариация»). Этот критерий представляет собой соотношение (trade-off) между вариацией и математическим ожиданием выхода системы. В динамической постановке задача управления по критерию «mean – variance» в непрерывном и дискретном времени на примере оптимизации ИП рассматривалась в [14–16]. С учетом марковских скачков параметров уравнений данная задача решена в работах [11, 12]. В этих работах задача минимизации критерия решается в конечной точке горизонта управления. При этом не контролируются значения вариации и математического ожидания выхода системы в промежуточных точках траектории. В работах [6, 7] сформулирована и решена задача управления системами с марковскими скачками и мультипликативными шумами на конечном горизонте с учетом значений дисперсии и математического ожидания выхода вдоль всей траектории управления. В упомянутых выше работах [6, 7, 11, 12, 14–16] не учитываются ограничения на переменные управления. Однако во многих практических задачах, в том числе при оптимизации ИП, необходимо учитывать жесткие ограничения на управляющие воздействия.

Эффективным подходом к синтезу систем управления с ограничениями, получившим широкое признание и применение в практике управления сложными технологическими процессами, является метод управления с прогнозирующей моделью (управление со скользящим горизонтом) [17]. Применению данного метода к управлению дискретными системами с марковскими скачками посвящены работы [3, 5]. В [5] предлагается метод синтеза стратегий управления при «мягких» вероятностных ограничениях. В работе [3] рассматривается задача управления по квадратичному критерию при «жестких» ограничениях на управляющие переменные.

В настоящей работе рассматривается задача синтеза стратегий управления с прогнозированием для систем с марковскими скачками и мультипликативными шумами по критерию «mean-variance». Получены уравнения синтеза оптимальных стратегий управления с учетом «жестких» ограничений на управляющие переменные.

## 1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + \left[ B_0[\alpha(k+1), k+1] + \sum_{j=1}^{n} B_j[\alpha(k+1), k+1] w_j(k+1) \right] u(k), \quad (1)$$

где $x(k)$ – $n_x$-мерный вектор состояния, $u(k)$ – $n_u$-мерный вектор управления, $w_j(k)$, $j = 1,2,...,n$, – независимые между собой дискретные белые шумы с нулевым средним и единичной дисперсией, $\alpha(k)$, $k = 0,1,2\ldots$, – однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,\nu\}$, известной матрицей переходных вероятностей

$$P = \left[ P_{ij} \right],\ i,j \in \{1,2,...,\nu\},\ P_{ji} = P\left\{ \alpha(k+1) = \alpha_j \,|\alpha(k) = \alpha_i \right\},\ \sum_{j=1}^{\nu} P_{ji} = 1,$$

и известным начальным распределением

$$p_i = P\{\alpha(0) = i\},\ i = 1,2,...,\nu;\ \sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1.$$

Предполагается, что состояние марковской цепи $\alpha(k)$ в момент времени $k$ доступно наблюдению. Последовательности $w_j(k)$ и $\alpha(k)$ независимы. $A$, $B_j[\alpha(k),k]$, $j = 0,\ldots,n$, – матрицы соответствующих размерностей.

Пусть скалярный выход системы (1)

$$y(k) = L(k)x(k), \quad (2)$$

где $L(k)$ – вектор-строка соответствующей размерности.

На управляющие воздействия накладываются ограничения

$$u_{\min}(k) \le S(k)u(k) \le u_{\max}(k), \quad (3)$$

где $S(k)$ – матрица соответствующей размерности.

Для управления системой (1) при ограничениях (3) синтезируем стратегии с прогнозирующей моделью по следующему правилу. На каждом шаге $k$ минимизируем «mean-variance»-критерий со скользящим горизонтом управления:

$$J(k+m/k) = \sum_{i=1}^{m} \rho_1(k,i) M\left\{ \left( y(k+i) - M\{ y(k+i)/x(k), \alpha(k) \} \right)^2 / x(k), \alpha(k) \right\} -$$
$$-\rho_2(k,i) M\{ y(k+i)/x(k), \alpha(k) \} +$$
$$+M\left\{ u^T(k+i-1/k) R(k,i-1) u(k+i-1/k) / x(k), \alpha(k) \right\}, \quad (4)$$

на траекториях системы (1) по последовательности прогнозирующих управлений $u(k/k),\dots,u(k+m-1/k)$, зависящих от состояния системы в момент времени $k$, при ограничениях (3), $\rho_1(k,i) \ge 0$, $\rho_2(k,i) \ge 0$ – весовые коэффициенты, $R(k,i) > 0$ – весовая матрица соответствующей размерности, $m$ – горизонт прогноза, $k$ – текущий момент времени. В качестве управления в момент времени $k$ берем $u(k) = u(k/k)$. Чтобы получить управление $u(k+1)$ на следующем шаге, процедура повторяется для следующего момента $k+1$ и т.д.

Весовые коэффициенты $\rho_1(k,i)\ge 0$, $\rho_2(k,i)\ge 0$ можно рассматривать как коэффициенты склонности к риску, задающие соотношение между ожидаемым выходом системы и соответствующим риском (вариацией) в момент времени $k$.

**Замечание 1.** В критерии (4) присутствуют слагаемые, содержащие квадратичные формы от управлений. В общем случае наличие этих слагаемых гарантирует существование решения задачи управления.

## 2. Синтез стратегий управления с прогнозированием

Цепь Маркова с дискретным временем допускает следующее представление в пространстве состояний [9]:

$$\theta(k+1) = P\theta(k) + \upsilon(k+1), \tag{5}$$

где $\theta(k) = [\delta(\alpha(k),1),\dots,\delta(\alpha(k),\nu)]^{\mathrm{T}}$, $\delta(\alpha(k),j)$ – функция Кронекера, $j = 1,2,\dots,\nu$; $\upsilon(k)$ – мартингал разность с характеристиками

$$M\{\upsilon(k+1)/\theta(k)\} = 0\,; \tag{6}$$

$$C(k+1) = M\{\upsilon(k+1)\upsilon^T(k+1)/\theta(k)\} = \mathrm{diag}\{P\theta(k)\} - P\,\mathrm{diag}\{\theta(k)\}P^T. \tag{7}$$

С учетом (5) систему (1) можно представить в следующем виде:

$$x(k+1) = Ax(k) + \left[B_0[\theta(k+1),k+1] + \sum_{j=1}^{n} B_j[\theta(k+1),k+1]w_j(k+1)\right]u(k), \tag{8}$$

где
$$B_j[\theta(k),k] = \sum_{i=1}^{\nu}\theta_i(k)B_j^{(i)}(k), (j=\overline{0,n})\,. \tag{9}$$

Здесь $\theta_i(k)$, $i = 1,2,\dots,\nu$, – компоненты вектора $\theta(k)$, $\{B_j^{(i)}\}$, $j = 0,\dots,n$, $i = 1,\dots,\nu$, – множество значений матрицы $B_j[\theta(k),k]$.

Критерий (4) будет иметь вид

$$J(k+m/k) = \sum_{i=1}^{m}\rho_1(k,i)M\left\{\left(y(k+i) - M\{y(k+i)/x(k),\theta(k)\}\right)^2/x(k),\theta(k)\right\} - \tag{10}$$

$$-\rho_2(k,i)M\{y(k+i)/x(k),\theta(k)\} + M\left\{u^T(k+i-1/k)R(k,i-1)u(k+i-1/k)/x(k),\theta(k)\right\},$$

**Теорема.** Вектор прогнозирующих управлений $U(k) = [u^T(k/k),\dots,u^T(k+m-1/k)]^T$, минимизирующий критерий (4) при ограничениях вида (3), на каждом шаге $k$ определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида

$$Y(k+m/k) = U^T(k)H(k)U(k) - F(k)U(k) \tag{11}$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \le \overline{S}(k)U(k) \le U_{\max}(k), \tag{12}$$

где
$$\overline{S}(k)=\mathrm{diag}(S(k),...,S(k+m-1)),$$
$$U_{\min}(k)=[u_{\min}^T(k),...,u_{\min}^T(k+m-1)]^T,$$
$$U_{\max}(k)=[u_{\max}^T(k),...,u_{\max}^T(k+m-1)]^T,$$

$H(k)$, $F(k)$ – блочные матрицы вида
$$H(k)=\begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) & \cdots & H_{1m}(k) \\ H_{21}(k) & H_{22}(k) & \cdots & H_{2m}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{m1}(k) & H_{m2}(k) & \cdots & H_{mm}(k) \end{bmatrix}; \tag{13}$$
$$F(k)=\begin{bmatrix} F_1(k) & F_2(k) & \cdots & F_m(k) \end{bmatrix}, \tag{14}$$
блоки которых равны
$$H_{tt}(k)=R(k,t-1)+$$
$$+\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}\left(B_0^{(q)}(k+t)\right)^T E_r\left[\mathrm{diag}\left\{P^t\theta(k)\right\}-P^t\,\mathrm{diag}\{\theta(k)\}(P^t)^T\right]E_q^T Q_1(m-t)B_0^{(r)}(k+t)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{\nu}\left(B_j^{(q)}(k+t)\right)^T\left[E_q\,\mathrm{diag}\left\{P^t\theta(k)\right\}E_q^T\right]Q_1(m-t)B_j^{(q)}(k+t); \tag{15}$$
$$H_{tf}(k)=\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{\nu}\left(B_0^{(q)}(k+t)\right)^T E_r\left[P^{f-t}\,\mathrm{diag}\left\{P^t\theta(k)\right\}-\right.$$
$$\left.-P^f\,\mathrm{diag}\{\theta(k)\}\left(P^t\right)^T\right]E_q^T\left(A^T\right)^{f-t}Q_1(m-f)B_0^{(r)}(k+f),\ f>t; \tag{16}$$
$$H_{tf}(k)=H_{ft}^{\ T}(k), t>f; \tag{17}$$
$$F_t(k)=Q_2(m-t)\sum_{q=1}^{\nu}E_q P^t\theta(k)B_0^{(q)}(k+t); \tag{18}$$
$$Q_1(t)=A^T Q_1(t-1)A+L^T(k+m-t)\rho_1(k,m-t)L(k+m-t),(t=\overline{1,m}); \tag{19}$$
$$Q_1(0)=L^T(k+m)\rho_1(k,m)L(k+m); \tag{20}$$
$$Q_2(t)=Q_2(t-1)A+L(k+m-t)\rho_2(k,m-t),(t=\overline{1,m}); \tag{21}$$
$$Q_2(0)=L(k+m)\rho_2(k,m); \tag{22}$$
$$E_q=[0,...,0,1,0,...,0], q=\overline{1,\nu}.$$

Оптимальное управление
$$u(k)=\begin{bmatrix} I_{n_u} & 0_{n_u} & \cdots & 0_{n_u} \end{bmatrix}U(k), \tag{23}$$
где $I_{n_u}$ – единичная матрица размерности $n_u$, $0_{n_u}$ – квадратная нулевая матрица размерности $n_u$.

**Замечание 2.** Заметим, что условие $R(k,i)>0$ гарантирует, что матрица $H(k)$ будет положительно определенная и, следовательно, решение задачи квадратичного программирования с критерием (4) существует и единственное.

***Доказательство.*** Введем обозначение

$$J_{k+s}=M\left\{\left[\rho_1(k,1)[y(k+1)-M\{y(k+1)/x(k),\theta(k)\}]^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\rho_2(k,1)y(k+1)+u^T(k/k)R(k,0)u(k/k)\right]/x(k),\theta(k)\right\}+$$
$$+M\left\{\left[\rho_1(k,2)[y(k+2)-M\{y(k+2)/x(k),\theta(k)\}]^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\rho_2(k,2)y(k+2)+u^T(k+1/k)R(k,1)u(k+1/k)\right]/x(k),\theta(k)\right\}+\ldots+$$
$$+M\left\{\left[\rho_1(k,s)[y(k+s)-M\{y(k+s)/x(k),\theta(k)\}]^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\rho_2(k,s)y(k+s)+u^T(k+s-1/k)R(k,s-1)u(k+s-1/k)\right]/x(k),\theta(k)\right\}.$$

Очевидно, что

$$J_{k+s+1}=M\left\{\left[\rho_1(k+s+1)[y(k+s+1)-M\{y(k+s+1)/x(k),\theta(k)\}]^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\rho_2(k,s+1)y(k+s+1)+u^T(k+s/k)R(k,s)u(k+s/k)\right]/x(k),\theta(k)\right\}+J_{k+s} \qquad (24)$$

и

$$J(k+m/k)=J_{k+m}. \qquad (25)$$

Рассмотрим

$$J_{k+1}=M\left\{\left[\rho_1(k,1)[y(k+1)-M\{y(k+1)/x(k),\theta(k)\}]^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\rho_2(k,1)y(k+1)+u^T(k/k)R(k,0)u(k/k)\right]/x(k),\theta(k)\right\}. \qquad (26)$$

Подставив в (26) вместо $y(k+1)$ его выражение через $x(k)$ из (2) и (8), вместо $\theta(k+1)$ его выражение через $\theta(k)$ из (5) и взяв условное математическое ожидание, будем иметь

$$J_{k+1}=u^T(k/k)\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}(B_0^{(r)}(k+1))^T[E_gC(k+1)E_r^T]L^T(k+1)\rho_1(k,1)\times$$
$$\times L(k+1)B_0^{(g)}(k+1)u(k/k)+u^T(k/k)\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}(B_s^{(r)}(k+1))^T E_g[P\theta(k)\theta^T(k)P^T+$$
$$+C(k+1)]E_r^TL^T(k+1)\rho_1(k,1)L(k+1)B_s^{(g)}(k+1)u(k/k)-$$
$$-\rho_2(k,1)L(k+1)Ax(k)-\rho_2(k,1)L(k+1)\sum_{r=1}^{\nu}[E_rP\theta(k)]B_0^{(r)}(k+1)u(k/k)+$$
$$+u^T(k/k)R(k,0)u(k/k),$$

где $C(k+1)=M\{\upsilon(k+1)\upsilon^T(k+1)/\theta(k)\}$.

Предположим далее, что для некоторого $q$ верно

$$J_{k+q}=\sum_{i=1}^{q}u^T(k+i-1/k)\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T[E_g\sum_{l=1}^{i}P^{l-i}C(k+l)(P^{l-i})^TE_r^T]\times$$
$$\times\sum_{t=i}^{q}(A^{t-i})^TL^T(k+t)\rho_1(k,t)L(k+t)A^{t-i}B_0^{(g)}(k+i)u(k+i-1/k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{q}u^T(k+i-1/k)\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_s^{(r)}(k+i)\right)^T E_g[P^i\theta(k)\theta^T(k)(P^i)^T+$$
$$+\sum_{l=1}^{i}P^{i-l}C(k+l)(P^{i-l})^T]E_r^T\times \qquad (27)$$

$$\times\sum_{t=i}^{q}(A^{t-i})^T L^T(k+t)\rho_1(k,t)L(k+t)A^{t-i}B_s^{(g)}(k+i)+R(k,i)\}u(k+i-1/k)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{q-1}\sum_{j=i+1}^{q}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T[E_g\sum_{l=1}^{i}P^{j-l}C(k+l)(P^{i-l})^T E_r^T]\times\right.$$

$$\left.\times(A^{j-i})^T\sum_{t=j}^{q}(A^{t-j})^T L^T(k+t)\rho_1(k,t)L(k+t)A^{t-j}B_0^{(g)}(k+j)\right\}u(k+j-1/k)-$$

$$-\left[\sum_{t=1}^{q}\rho_2(k,t)L(k+t)A^{t-1}\right]Ax(k)-\sum_{i=1}^{q}\sum_{t=i}^{q}\rho_2(k,t)L(k+t)A^{t-i}\sum_{r=1}^{\nu}E_rP^i\theta(k)B_0^{(r)}(k+i)u(k+i-1/k),$$

где $C(k+l)=M\{\upsilon(k+l)\upsilon^T(k+l)/\theta(k)\}$.

Покажем, что данная формула верна и для $q+1$. Действительно, из (24) следует, что

$$J_{k+q+1}=M\{[\rho_1(k,q+1)[y(k+q+1)-M\{y(k+q+1)/x(k),\theta(k)\}]^2- \tag{28}$$

$$-\rho_2(k,q+1)y(k+q+1)+u^T(k+q/k)R(k,q)u(k+q/k)\Big]/x(k),\theta(k)\Big\}+J_{k+q}.$$

Подставим в (28) вместо $y(k+q+1)$ его рекуррентное выражение через $x(k)$ из (8) и (2), вместо $J_{k+q}$ его выражение из (27), взяв условное математическое ожидание и преобразовав выражение, получим

$$J_{k+q}=\sum_{i=1}^{q+1}u^T(k+i-1/k)\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T[E_g\sum_{l=1}^{i}P^{i-l}C(k+l)(P^{i-l})^TE_r^T]\times$$

$$\times\sum_{t=i}^{q+1}(A^{t-i})^TL^T(k+t)\rho_1(k,t)L(k+t)A^{t-i}B_0^{(g)}(k+i)u(k+i-1/k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{q+1}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_s^{(r)}(k+i)\right)^TE_g[P^i\theta(k)\theta^T(k)(P^i)^T+\sum_{l=1}^{i}P^{i-l}C(k+l)(P^{i-l})^T]E_r^T\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{t=i}^{q+1}(A^{t-i})^TL^T(k+t)\rho_1(k,t)L(k+t)A^{t-i}B_s^{(g)}(k+i)+R(k,i)\right\}u(k+i-1/k)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=i+1}^{q+1}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T[E_g\sum_{l=1}^{i}P^{j-l}C(k+l)(P^{i-l})^TE_r^T]\times\right.$$

$$\left.\times(A^{j-i})^T\sum_{t=j}^{q+1}(A^{t-j})^TL^T(k+t)\rho_1(k,t)L(k+t)A^{t-j}B_0^{(g)}(k+j)\right\}u(k+j-1/k)- \tag{29}$$

$$-\left[\sum_{t=1}^{q+1}\rho_2(k,t)L(k+t)A^{t-1}\right]Ax(k)-\sum_{i=1}^{q+1}\sum_{t=i}^{q+1}\rho_2(k,t)L(k+t)A^{t-i}\sum_{r=1}^{\nu}E_rP^i\theta(k)B_0^{(r)}(k+i)u(k+i-1/k).$$

Формула (29) совпадает с (27), если в (27) $q$ заменить на $q+1$, а значит, согласно принципу математической индукции, формула (27) верна для всех $q=1,2,\ldots,m$.

Вводя рекуррентные соотношения (19) – (21), из (25) и (27) следует, что

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}u^T(k+i-1/k)\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T\times$$

$$\times[E_g\sum_{l=1}^{i}P^{i-l}C(k+l)(P^{i-l})^TE_r^T]Q_1(m-i)B_0^{(g)}(k+i)u(k+i-1/k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_s^{(r)}(k+i)\right)^T E_g[P^i\theta(k)\theta^T(k)(P^i)^T+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{i}P^{i-l}C(k+l)(P^{i-l})^T]E_r^T Q_1(m-i)B_s^{(g)}(k+i)+R(k,i)\right\}u(k+i-1/k)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T[E_g\sum_{l=1}^{i}P^{j-l}C(k+l)(P^{i-l})^T E_r^T]\times\right.$$

$$\left.\times(A^{j-i})^T Q_1(m-j)B_0^{(g)}(k+j)\right\}u(k+j-1/k)-Q_2(m-1)Ax(k)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}Q_2(m-i)\sum_{r=1}^{\nu}E_r P^i\theta(k)B_0^{(r)}(k+i)u(k+i-1/k). \qquad (30)$$

Из определения $\theta(k)$ следует, что

$$\theta(k+t)\theta^T(k+t)=\mathrm{diag}\{\theta(k+t)\}. \qquad (31)$$

Для вычисления матрицы $C(k+t)=M\{\upsilon(k+t)\upsilon^T(k+t)/\theta(k)\}$, используя уравнения (6), (7) и (31), нетрудно показать, что

$$C(k+t)=M\left\{\upsilon(k+t)\upsilon^T(k+t)/\theta(k)\right\}=$$

$$=\mathrm{diag}\left\{P^t\theta(k)\right\}-P\,\mathrm{diag}\left\{P^{t-1}\theta(k)\right\}P^T,\ (t=\overline{1,m}). \qquad (32)$$

Рассмотрим подробнее выражения, входящие в критерий (30). Используя (31), (32), получим

$$P^i\theta(k)\theta^T(k)(P^i)^T+\sum_{l=1}^{i}P^{i-l}C(k+l)(P^{i-l})^T=\mathrm{diag}\{P^i\theta(k)\}; \qquad (33)$$

$$\sum_{l=1}^{i}\left[P^{i-l}C(k+l)(P^{i-l})^T\right]=\mathrm{diag}\{P^i\theta(k)\}-P^i\,\mathrm{diag}\{\theta(k)\}(P^i)^T; \qquad (34)$$

$$\sum_{l=1}^{i}\left[P^{j-l}C(k+l)(P^{i-l})^T\right]=P^{j-i}\,\mathrm{diag}\{P^i\theta(k)\}-P^j\,\mathrm{diag}\{\theta(k)\}(P^i)^T. \qquad (35)$$

С учетом (33) – (35) выражение (30) примет вид

$$J(k+m/k)=\sum_{i=1}^{m}u^T(k+i-1/k)\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T\times$$

$$\times E_g[\mathrm{diag}\{P^i\theta(k)\}-P^i\,\mathrm{diag}\{\theta(k)\}(P^i)^T]E_r^T Q_1(m-i)B_0^{(g)}(k+i)u(k+i-1/k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{\nu}\left(B_s^{(r)}(k+i)\right)^T E_r\,\mathrm{diag}\{P^i\theta(k)\right\}E_r^T Q_1(m-i)B_s^{(r)}(k+i)+$$

$$+R(k,i)\}u(k+i-1/k)+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}u^T(k+i-1/k)\left\{\sum_{r=1}^{\nu}\sum_{g=1}^{\nu}\left(B_0^{(r)}(k+i)\right)^T\times\right.$$

$$\times E_g[P^{j-i}\,\mathrm{diag}\{P^i\theta(k)\}-P^j\,\mathrm{diag}\{\theta(k)\right\}(P^i)^T]E_r^T(A^{j-i})^T Q_1(m-j)B_0^{(g)}(k+j)\}\times$$

$$\times u(k+j-1/k)-Q_2(m-1)Ax(k)-\sum_{i=1}^{m}Q_2(m-i)\sum_{r=1}^{\nu}E_r P^i\theta(k)B_0^{(r)}(k+i)u(k+i-1/k). \qquad (36)$$

Выражение (36) можно записать в матричном виде:

$$J(k+m/k) = U^T(k)H(k)U(k) - Q_2(m-1)Ax(k) - F(k)U(k), \tag{37}$$

где матрицы $H(k)$, $F(k)$ имеют вид (13) – (18). Таким образом, имеем задачу минимизации критерия (37) при ограничениях (3), которая эквивалентна задаче квадратичного программирования с критерием (11) при ограничениях (12). *Теорема доказана.*

## Заключение

В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по критерию «mean-variance» для дискретных систем с мультипликативными шумами и скачкообразно меняющимися параметрами. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии включает решение последовательности задач квадратичного программирования. Синтезированы стратегии управления с учетом явных ограничений на управляющие воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пакшин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М: Физматлит, 1994.
2. *Пакшин П.В.*, *Ретинский Д.М.* Робастная стабилизация систем случайной структуры с переключаемой статической обратной связью по выходу // Автоматика и телемеханика. 2005. № 7. С. 135–147.
3. *Домбровский В.В.*, *Объедко Т.Ю.* Управление с прогнозированием системами с марковскими скачками при ограничениях и применение к оптимизации инвестиционного портфеля // Автоматика и телемеханика. 2011. № 5. С. 96–112.
4. *Смагин В.И.*, *Поползухина Е.В.* Синтез следящих систем управления для объектов со случайными скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 271. С. 171–175.
5. *Blackmore L.*, *Bektassov A.*, *Ono M.*, *Williams B.C.* Robust optimal predictive control of jump Markov linear systems using particles // Hybrid Systems: Comput. and Control / A. Bemporad, A. Bicchi, G. Buttazzo, eds. New York: Springer-Verlag, 2007. V. 4416. Lecture Notes in Computer Science. P. 104–117.
6. *Costa O.L.V.*, *Okimura R.T.* Discrete-time mean-variance optimal control of linear systems with Markovian jumps and multiplicative noise // Intern. J. Control. 2009. V. 82. No. 2. P. 256–267.
7. *Costa O.L.V.*, *Oliveira A.* Optimal mean-variance control for discrete-time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises // Automatica. 2012. V. 48. No. 2. P. 304–315.
8. *Dragan V., Morozan T.* The linear quadratic optimization problems for a class of linear stochastic systems with multiplicative white noise and Markovian jumping // IEEE Transactions Automatic Control. 2004. V. 49. No. 5. P. 665–675.
9. *Elliott R.J.*, *Aggoun L.*, *Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
10. *Li X.*, *Zhou X.Y.* Indefinite stochastic LQ control with Markovian jumps in a finite time horizon // Communications in Information and Systems. 2002. No. 2. P. 265–282.
11. *Yin G.*, *Zhou X.Y.* Markowitz mean-variance portfolio selection with regime switching: from discrete-time models to their continuous-time limits // IEEE Transactions Automat. Control. March 2004. V. 39. No. 3. P. 349–360.
12. *Zhou X.Y.*, *Yin G.* Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime-switching: a continuous-time model // SIAM Journal on Control and Optimization. 2003. V. 42. No. 4. P. 1466–1482.

13. *Marcowitz H.M.* Portfolio selection // J. Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
14. *Bajeux-Besnainou I.*, *Portait R.* Dynamic asset allocation in a mean-variance framework // Management Science. 1998. V. 44. No. 11. Part 2. P. S79–S95.
15. *Li D.*, *Ng W.-L.* Optimal dynamic portfolio selection: multi-period mean-variance formulation // Mathematical Finance. 2000. No. 10. P. 387–406.
16. *Zhou X.Y.*, *Li D.* Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework // Applied Mathematics & Optimization. 2000. No. 42. P. 19–33.
17. *Rawlings J. Tutorial:* Model predictive control technology // Proc. Amer. Control Conf. San Diego. California. June 1999. P. 662–676.

*Домбровский Владимир Валентинович*
*Объедко Татьяна Юрьевна*
Томский государственный университет
E-mail: dombrovs@ef.tsu.ru; tani4kin@mail.ru Поступила в редакцию 17 сентября 2012 г.

*Dombrovskii Vladimir V.*, *Obyedko Tatyana Y.* (Tomsk State University). **Mean-variance MPC for linear systems with Markovian jumps under constraints.**

Keywords: model predictive control, «mean-variance» criterion, Markovian jumps, constrains.

We consider the following Markov jump linear system with multiplicative noise

$$x(k+1) = Ax(k) + \left[ B_0[\alpha(k+1),k+1] + \sum_{j=1}^{n} B_j[\alpha(k+1),k+1]\mathrm{w}_j(k+1) \right] u(k), \qquad (1)$$

where $x(k)$ is the $n_x$ – dimensional vector of state, $u(k)$ is the $n_u$ – dimensional vector of control; $\alpha(k)$, $k = 0,1,2\ldots$, denotes a time-invariant Markov chain taking values in a finite set of observable states $\{1,2,\ldots,\nu\}$ with transition probability matrix

$$P = \left[ P_{ij} \right],\ i,j \in \{1,2,...,\nu\},\ P_{ij} = P\left\{\alpha(k+1) = \alpha_j \left| \alpha(k) = \alpha_i \right.\right\}, \sum_{j=1}^{\nu} P_{ij} = 1,$$

and initial distribution $p_i = P\{\alpha(0) = i\}, i = 1,2,...,\nu; \sum_{i=1}^{\nu} p_i = 1;$ $\omega_j(k)$ are independent zero-mean random variables with unit variance and independent of the Markov chain $\alpha(k)$, $k = 0,1,2\ldots$; $A$, $B_j[\alpha(k),k]$, $j = 1,\ldots,n$, – the matrixes of corresponding dimensions, $B_j[\alpha(k),k] \in \{B_j^{(i)}\}$, $j = 0,\ldots,n$, $i = 1,\ldots,\nu$. Let $y(k) = L(k)x(k)$ be the scalar output of the system (1), where $L(k)$ is the vector of corresponding dimension.

The following constraints are imposed on control actions

$$u_{\min}(k) \le S(k)u(k) \le u_{\max}(k), \qquad (2)$$

where $S(k)$ is the matrix of corresponding dimension.

For control of system (1) we synthesize the strategies with a predictive control model. At each step $k$ we minimize the «mean-variance» criterion with a noving control horizon

$$J(k+m/k) = \sum_{i=1}^{m} \rho_1(k,i) M\left\{ \left( y(k+i) - M\{ y(k+i)/x(k),\alpha(k) \} \right)^2 / x(k),\alpha(k) \right\} -$$

$$-\rho_2(k,i) M\{ y(k+i)/x(k),\alpha(k) \} + M\left\{ u^T(k+i-1/k) R(k,i-1) u(k+i-1/k)/x(k),\alpha(k) \right\},$$

on trajectories of system (1) over the sequence of predictive controls $u(k/k),\ldots, u(k+m-1/k)$, which depend on system's state at moment $k$, under constraints (2), $R(k,i)>0$ is the weigh matrix of corresponding dimension, $\rho_1(k,i)\ge 0$, $\rho_2(k,i) \ge 0$ are weigh coefficients, $m$ is the prediction horizon, $k$ is the current moment. The synthesis of predictive control strategies is reduced to the solving of a sequence of quadratic programming tasks.