ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.21

А.М. Горцев, М.А. Леонова, Л.А. Нежельская

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛОВ ОБОБЩЕННОГО АСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Изучается обобщенный асинхронный поток событий, являющийся одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок в цифровых сетях интегрального обслуживания (ЦСИО). Поток функционирует в условиях непродлевающегося мертвого времени. Приводятся явные выражения плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени. Формулируются условия рекуррентности наблюдаемого потока событий.

Ключевые слова: *обобщенный асинхронный поток событий*, *непродлевающееся мертвое время*, *плотность вероятностей*, *совместная плотность вероятностей*, *рекуррентность потока событий.*

В настоящей работе проводится дальнейшее исследование обобщенного асинхронного потока событий, начатое в статьях [1–3]. Обобщенный асинхронный поток событий (далее – поток) относится к классу дважды стохастических потоков и является одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в ЦСИО [4]. В реальных ситуациях параметры, задающие входящий поток событий, известны либо частично, либо вообще неизвестны, либо (что ещё более ухудшает ситуацию) изменяются со временем. Вследствие этого возникают задачи: 1) оценки состояний потока (задача фильтрации интенсивности потока) по наблюдениям за моментами наступления событий [2, 3]; 2) оценки параметров потока по наблюдениям за моментами наступления событий [5].

Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [6], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время (непродлевающееся мертвое время). В качестве примера приведем протокол CSMA/CD – протокол случайного множественного доступа с обнаружением конфликта, широко используемого в компьютерных сетях. В момент регистрации (обнаружения) конфликта на входе некоторого узла сети по сети рассылается сигнал «заглушки» («пробки»); в течение времени рассылки сигнала «заглушки» заявки, поступившие в данный узел сети, получают отказ в обслуживании и направляются в источник повторных вызовов. Здесь время, в течение которого узел сети закрыт для обслуживания заявок, поступающих в него после обнаружения конфликта, можно трактовать как мертвое время прибора, регистрирующего конфликт в узле сети.

Для решения задачи оценивания (тем или иным статистическим методом) параметров потока в первую очередь необходимо знание вероятностных свойств потока. В настоящей работе находятся явные виды плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока и совместной плотности вероятностей значений длительности двух соседних интервалов, учитывающие эффект непродлевающегося мертвого времени.

1. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный асинхронный дважды стохастический поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1,2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии распределена по экспоненцильному закону с параметром α_i, $i = 1,2$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе инициируется с вероятностью p ($0\le p \le 1$) дополнительное событие во втором состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). Наоборот, при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью q ($0\le q \le 1$) дополнительное событие в первом состоянии. При этом блочная матрица инфинитезимальных коэффициентов примет вид

$$D = \left\| \begin{array}{cc|cc} -(\lambda_1+\alpha_1) & (1-p)\alpha_1 & \lambda_1 & p\alpha_1 \\ (1-q)\alpha_2 & -(\lambda_2+\alpha_2) & q\alpha_2 & \lambda_2 \end{array} \right\| = \| D_0 | D_1 \|.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – марковский процесс. После каждого зарегистрированного в момент времени t_i события наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени T и т.д. Вариант возникающей ситуации показан на рис. 1, где 1,2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в момент перехода процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние, помечены буквами p либо q; штриховка – периоды мертвого времени длительности T; $t_1, t_2,\dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

Процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий $t_1, t_2,\dots$ наблюдаемого потока. Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ образует вложенную цепь Маркова, т.е. наблюдаемый поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k (момента наступления события), $k = 1,2,\ldots$. Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1,2,\ldots$, – значение длительности k-го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент t_k без потери общности можно положить равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события наблюдаемого потока есть $\tau = 0$. Пусть теперь (t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала с соответствующими значениями длительностей: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$; их расположение на временной оси, в силу стационарности потока, произвольно. Тогда можно положить $k = 1$ и рассматривать соседние интервалы (t_1, t_2), (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей: $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события наблюдаемого потока; $\tau_2 = 0$ – моменту t_2 наступления следующего события наблюдаемого потока. Соответствующая совместная плотность вероятностей при этом есть $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Задача заключается в нахождении явного вида $p_T(\tau)$ и явного вида $p_T(\tau_1, \tau_2)$, а также в установлении условий рекуррентности наблюдаемого потока событий и при $T = 0$ условий рекуррентности обобщенного асинхронного потока событий.

2. Вывод плотности вероятностей $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал времени $(0, \tau)$ между соседними событиями в наблюдаемом потоке. С другой стороны, значение длительности этого интервала есть $\tau = T + t$, где t – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока ($t \geq 0$). Пусть $p_{jk}(t)$ – условная вероятность того, что на интервале $(0,t)$ нет событий наблюдаемого потока и $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что в момент $t = 0$ имеет место $\lambda(0) = \lambda_j$, $j,k = 1,2$. Соответствующую этой вероятности плотность вероятностей обозначим $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j,k = 1,2$. Введем переходную вероятность $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i (момент времени $\tau = 0$) в состояние j (момент времени $\tau = T$), $i,j = 1,2$, и вероятность $\pi_i(0|T)$ – условная (финальная) вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i ($i = 1, 2$) при условии, что в этот момент времени наступило событие наблюдаемого потока и наступило мертвое время длительности T. Тогда искомую плотность вероятностей $p_T(\tau)$ можно записать в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \le \tau < T, \\ \sum_{i=1}^{2} \pi_i(0 \mid T) \sum_{j=1}^{2} q_{ij}(T) \sum_{k=1}^{2} \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \ge T. \end{cases} \quad (1)$$

Найдем явные выражения для $\tilde{p}_{jk}(\tau - T),\, q_{ij}(T), \pi_i(0 \mid T),\, i, j, k = 1,2$.

В соответствии с определением обобщенного асинхронного потока введем вероятность $p_{11}(t)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)$ – совместную вероятность того, что без наступления событий наблюдаемого потока процесс $\lambda(t)$ перешел на интервале $(0, t)$, $t = \tau - T$, из первого состояния в первое и на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ произошло событие пуассоновского потока интенсивности λ_1. Аналогичные совместные вероятности для различных j и k ($j, k = 1, 2$) примут вид

$$p_{11}(t)p\alpha_1\Delta t + o(\Delta t);\quad p_{12}(t)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t);\quad p_{12}(t)q\alpha_2\Delta t + o(\Delta t);\quad p_{21}(t)\lambda_1\Delta t + o(\Delta t);$$
$$p_{21}(t)p\alpha_1\Delta t + o(\Delta t);\quad p_{22}(t)\lambda_2\Delta t + o(\Delta t);\quad p_{22}(t)q\alpha_2\Delta t + o(\Delta t).$$

Соответствующие плотности вероятностей запишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(t) = \lambda_1 p_{11}(t);\quad \tilde{p}_{11}^{(2)}(t) = q\alpha_2 p_{12}(t);\quad \tilde{p}_{12}^{(1)}(t) = p\alpha_1 p_{11}(t);\quad \tilde{p}_{12}^{(2)}(t) = \lambda_2 p_{12}(t);$$
$$\tilde{p}_{21}^{(1)}(t) = \lambda_1 p_{21}(t);\quad \tilde{p}_{21}^{(2)}(t) = q\alpha_2 p_{22}(t);\quad \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) = p\alpha_1 p_{21}(t);\quad \tilde{p}_{22}^{(2)}(t) = \lambda_2 p_{22}(t).$$

Тогда плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$ того, что без наступления событий наблюдаемого потока на интервале $(0, t)$ и наступления события наблюдаемого потока в момент времени t процесс $\lambda(t)$ перейдет на этом интервале из состояния j в состояние k ($j, k = 1, 2$), запишутся для разных j и k как

$$\tilde{p}_{11}(t) = \lambda_1 p_{11}(t) + q\alpha_2 p_{12}(t);\quad \tilde{p}_{12}(t) = p\alpha_1 p_{11}(t) + \lambda_2 p_{12}(t);$$
$$\tilde{p}_{21}(t) = \lambda_1 p_{21}(t) + q\alpha_2 p_{22}(t);\quad \tilde{p}_{22}(t) = p\alpha_1 p_{21}(t) + \lambda_2 p_{22}(t). \quad (2)$$

Для вероятностей $p_{jk}(t)$ справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$p'_{11}(t) = -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{11}(t) + (1-q)\alpha_2 p_{12}(t),\quad p'_{12}(t) = -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{12}(t) + (1-p)\alpha_1 p_{11}(t);$$
$$p'_{22}(t) = -(\lambda_2 + \alpha_2)p_{22}(t) + (1-p)\alpha_1 p_{21}(t),\quad p'_{21}(t) = -(\lambda_1 + \alpha_1)p_{21}(t) + (1-q)\alpha_2 p_{22}(t),$$

с граничными условиями: $p_{11}(0) = p_{22}(0) = 1$, $p_{12}(0) = p_{21}(0) = 0$, решая которые находим

$$p_{11}(t) = -\frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_1 t} + \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_2 t},\quad p_{12}(t) = \frac{\alpha_1(1-p)}{z_2 - z_1}\left(e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t}\right),$$
$$p_{21}(t) = \frac{\alpha_2(1-q)}{z_2 - z_1}\left(e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t}\right),\quad p_{22}(t) = \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_1 t} - \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_2 t},$$
$$z_1 = \frac{1}{2}\left\{\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 - \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right\},$$
$$z_2 = \frac{1}{2}\left\{\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2(1-p)(1-q)}\right\},\ 0 < z_1 < z_2. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$, j, $k = 1, 2$.

Для вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $0 \le \tau \le T$, справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$q'_{11}(\tau) = -\alpha_1 q_{11}(\tau) + \alpha_2 q_{12}(\tau), \quad q'_{12}(\tau) = \alpha_1 q_{11}(\tau) - \alpha_2 q_{12}(\tau);$$
$$q'_{21}(\tau) = -\alpha_1 q_{21}(\tau) + \alpha_2 q_{22}(\tau), \quad q'_{22}(\tau) = \alpha_1 q_{21}(\tau) - \alpha_2 q_{22}(\tau),$$

с граничными условиями: $q_{11}(0) = q_{22}(0) = 1$, $q_{12}(0) = q_{21}(0) = 0$, решая которые находим (для $\tau = T$)

$$q_{11}(T) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}, \quad q_{12}(T) = \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},$$
$$q_{21}(T) = \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}, \quad q_{22}(T) = \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},$$
$$\pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2), \quad \pi_2 = \alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2). \tag{4}$$

Перейдем к нахождению вероятностей $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$. Так как моменты наступления событий наблюдаемого потока образуют вложеную цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0|T)$ справедливы следующие уравнения:

$$\pi_1(0\,|\,T) = \pi_1(0\,|\,T)\pi_{11} + \pi_2(0\,|\,T)\pi_{21};$$
$$\pi_2(0\,|\,T) = \pi_1(0\,|\,T)\pi_{12} + \pi_2(0\,|\,T)\pi_{22}, \quad \pi_1(0\,|\,T) + \pi_2(0\,|\,T) = 1, \tag{5}$$

где π_{ij} – переходная вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени $\tau = 0$ до наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из i-го состояния в j-е ($i, j = 1, 2$).

Введем в рассмотрение вероятность p_{ij} – переходную вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени $t = 0$ (момента окончания мертвого времени) до наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из i-го состояния в j-е ($i, j = 1, 2$). При этом вероятности p_{ij} определятся в виде

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{11}(t)dt = \lambda_1 \int_0^\infty p_{11}(t)dt + q\alpha_2 \int_0^\infty p_{12}(t)dt,\\
p_{12} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{12}(t)dt = p\alpha_1 \int_0^\infty p_{11}(t)dt + \lambda_2 \int_0^\infty p_{12}(t)dt,\\
p_{21} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{21}(t)dt = \lambda_1 \int_0^\infty p_{21}(t)dt + q\alpha_2 \int_0^\infty p_{22}(t)dt,\\
p_{22} &= \int_0^\infty \tilde{p}_{22}(t)dt = p\alpha_1 \int_0^\infty p_{21}(t)dt + \lambda_2 \int_0^\infty p_{22}(t)dt,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\tilde{p}_{ij}(t)$ определены в (2), $p_{ij}(t)$ – в (3). Подставляя (3) в (6), находим

$$p_{11} = \frac{\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2) + q(1-p)\alpha_1\alpha_2}{z_1 z_2}; \quad p_{12} = \frac{\alpha_1(\lambda_2 + p\alpha_2)}{z_1 z_2};$$
$$p_{21} = \frac{\alpha_2(\lambda_1 + q\alpha_1)}{z_1 z_2}; \quad p_{22} = \frac{\lambda_2(\lambda_1+\alpha_1) + p(1-q)\alpha_1\alpha_2}{z_1 z_2},$$
$$z_1 z_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1 + (p+q-pq)\alpha_1\alpha_2. \tag{7}$$

В силу марковости процесса $\lambda(t)$ полученные переходные вероятности $q_{ij}(T)$ и p_{ij}, $i, j = 1, 2$ позволяют выписать выражения для переходных вероятностей π_{ij}:

$$\begin{aligned} &\pi_{11} = q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}; \quad \pi_{12} = q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}; \\ &\pi_{21} = q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}; \quad \pi_{22} = q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя в (8) сначала (4), затем (7), получаем

$$\pi_{11} = p_{11} - \pi_2\delta\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]; \quad \pi_{12} = p_{12} + \pi_2\delta\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right];$$
$$\pi_{21} = p_{21} + \pi_1\delta\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]; \quad \pi_{22} = p_{22} - \pi_1\delta\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right],$$
$$\delta = (\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)/z_1z_2. \tag{9}$$

Наконец, подставляя (9) в (5), находим

$$\pi_1(0\,|\,T) = \frac{p_{21} + \delta\pi_1\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{1 - \delta e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}, \quad \pi_2(0\,|\,T) = \frac{p_{12} + \delta\pi_2\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{1 - \delta e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}, \tag{10}$$

где π_1, π_2 определены в (4); p_{12}, p_{21} – в (7); δ – в (9).

Подставляя в (1) сначала (2), затем (3), (4) и (10), проделывая при этом необходимые преобразования и учитывая, что $t = \tau - T$, получаем

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \le \tau < T; \\ \gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)} + [1-\gamma(T)]z_2e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \ge T, \end{cases}$$
$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1}[z_2 - (\lambda_1 + p\alpha_1)\pi_1(T) - (\lambda_2 + q\alpha_2)\pi_2(T)],$$

$$\begin{aligned} &\pi_1(T) = \pi_1 + [\pi_2 - \pi_2(0\,|\,T)]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}, \\ &\pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0\,|\,T)]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}, \end{aligned} \tag{11}$$

где z_i определены в (3); π_i – в (4); $\pi_i(0|T)$ – в (10), $i = 1, 2$.

В частности, положив в (11) $T = 0$, получаем формулу для $p(\tau)$, приведенную в [1].

3. Вывод совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть $\tau_1 = T + t_1$, $\tau_2 = T + t_2$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления последовательных событий наблюдаемого потока. $\tau_1 = 0$ – момент наступления первого события, $\tau_2 = 0$ – момент наступления второго события. В силу того, что последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока образует вложенную цепь Маркова, то в обозначениях разд. 2 совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \tau_2)$ примет вид

$$p_T(\tau_1,\tau_2) = \begin{cases} 0; \quad 0 \le \tau_1 < T,\ 0 \le \tau_2 < T; \\ \sum_{i=1}^{2}\pi_i(0\,|\,T)\sum_{j=1}^{2}q_{ij}(T)\sum_{k=1}^{2}\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T)\sum_{s=1}^{2}q_{ks}(T)\sum_{n=1}^{2}\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), \\ \tau_1 \ge T,\ \tau_2 \ge T, \end{cases} \tag{12}$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) = \tilde{p}_{jk}(t_1)$, $\tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T) = \tilde{p}_{sn}(t_2)$ определены в (2), при этом в выражениях для $\tilde{p}_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, нужно произвести замену t на t_1 либо на t_2. Тогда подставляя в (12) сначала $\tilde{p}_{jk}(t_1)$, $\tilde{p}_{sn}(t_2)$, затем $p_{jk}(t_1)$, $p_{sn}(t_2)$, определенные в

(3) для $t = t_1$ и $t = t_2$, затем $q_{ij}(T)$, $q_{ks}(T)$, определенные в (4), и, наконец, $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, определенные в (10), и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, находим

$$\begin{gathered}
p_T(\tau_1,\tau_2) = 0; \quad 0 \le \tau_1 < T, \quad 0 \le \tau_1 < T, \\
p_T(\tau_1,\tau_2) = p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\frac{\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2}{z_1 z_2}\gamma(T)[1-\gamma(T)]\times \\
\times\left[z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)}\right]\left[z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}\right], \\
\tau_1 \ge T, \quad \tau_2 \ge T,
\end{gathered} \tag{13}$$

где $\gamma(T)$, $p_T(\tau_k)$ определены в (11) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Из (13) следует, что обощенный асинхронный поток, функционирующий в условиях мертвого времени, в общем случае является коррелированным потоком. Положив в (13) $T = 0$, получаем формулу для $p(\tau_1, \tau_2)$, приведенную в [1].

Нетрудно получить вероятностные характеристики наблюдаемого потока, такие, как математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями, дисперсию и ковариацию:

$$M_\tau = T + \frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1-\gamma(T)}{z_2}, \quad D_\tau = 2\left[\frac{\gamma(T)}{z_1^2} + \frac{1-\gamma(T)}{z_2^2}\right] - \left[\frac{\gamma(T)}{z_1} + \frac{1-\gamma(T)}{z_2}\right]^2,$$

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2) = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\gamma(T)[1-\gamma(T)](\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)\frac{(z_2-z_1)^2}{(z_1 z_2)^3}.$$

4. Условия рекуррентности наблюдаемого потока событий

Рассмотрим частные случаи, при которых обобщенный асинхронный поток, функционирующий в условиях мертвого времени, становится рекуррентным потоком. Используя выражение (11) для $\gamma(T)$, $\pi_1(T)$, $\pi_2(T)$ и выражение (10) для $\pi_1(0|T)$, $\pi_2(0|T)$, можно показать, что

$$\gamma(T)[1-\gamma(T)] = \frac{\alpha_1\alpha_2 z_1 z_2(\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 + q\alpha_1 - p\alpha_2)}{\left[(\alpha_1+\alpha_2)(z_2-z_1)(z_1 z_2 - (\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T})\right]^2}\times \tag{14}$$

$$\times\left\{z_1 z_2 - [2z_1 z_2 - (\alpha_1+\alpha_2)(z_1+z_2)]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T} + [z_1 z_2 - (\lambda_1+\lambda_2)(\alpha_1+\alpha_2)]e^{-2(\alpha_1+\alpha_2)T}\right\}.$$

Предварительно отметим, что выражение в фигурных скобках формулы (14), обозначим его $f(T)$, после преобразования примет вид

$$\begin{gathered}
f(T) = z_1 z_2\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]^2 + (\lambda_1+\lambda_2)(\alpha_1+\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right] + \\
+ (\alpha_1+\alpha_2)^2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},
\end{gathered}$$

так что для любых $T \ge 0$ имеем $f(T) > 0$.

Из (14) вытекает:

1) если $\lambda_1 - \lambda_2 + p\alpha_1 - q\alpha_2 = 0$, то совместная плотность (13) факторизуется: $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1)\, p_T(\tau_2)$; при этом из (3) следует, что $z_1 = \lambda_1 + p\alpha_1$, $z_2 = \lambda_1 + \alpha_1 + (1-q)\alpha_2$, из (11) следует $\gamma(T) = 1$, и тогда $p_T(\tau_k) = z_1 e^{-z_1(\tau_k - T)}$, $\tau_k \ge T$, $k = 1, 2$, то есть $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau - T)}$, $\tau \ge T$,

2) если $\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2=0$, то совместная плотность (13) факторизуется, при этом из (3) следует, что $z_1=\lambda_1+q\alpha_1$, $z_2=\lambda_1+\alpha_1+(1-p)\alpha_2$, из (11) следует $\gamma(T)=1$, и тогда $p_T(\tau_k)=z_1e^{-z_1(\tau_k-T)}$, $\tau_k\geq T$, $k=1,\ 2$, то есть $p_T(\tau)=z_1e^{-z_1(\tau-T)}$, $\tau\geq 0$.

Из (13) следует третье условие факторизации совместной плотности вероятностей $p_T(\tau_1,\tau_2)$: $\lambda_1\lambda_2-pq\alpha_1\alpha_2=0$. Тогда $p_T(\tau)$ определяется формулой (11), в которой

$$\pi_1(T)=\pi_1\left[1+\alpha_1\frac{\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right],$$

$$\pi_2(T)=\pi_2\left[1-\alpha_2\frac{\lambda_1-\lambda_2+q\alpha_1-p\alpha_2}{\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right],$$

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2)\mp\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_1+\alpha_2)^2-4[\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1+(p+q)\alpha_1\alpha_2]}\right\}.$$

Так как последовательность моментов наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2,\ldots, t_k, \ldots$ есть вложенная цепь Маркова, то при выполнении одного из вышеприведенных условий факторизации (либо их комбинаций) нетрудно показать, что факторизуется и совместная плотность вероятностей $p_T(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ для любого k. Последнее означает, что для этих ситуаций наблюдаемый поток является рекуррентным потоком.

Отметим, что условия факторизации для случая $T=0$ [1] и $T\neq 0$ идентичны.

При нижеследующем обсуждении условий рекуррентности необходимо использование результатов, приведенных в [2, 7].

Для первого условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1\mid t)$ первого состояния процесса $\lambda(t)$ (несмотря на то, что поток рекуррентный и плотность $p(\tau)$ экспоненциальная) зависит от предыстории, т.е. зависит от моментов наступления событий $t_1, \ldots, t_k$ наблюдаемого потока. Если здесь: 1) ввести два дополнительных ограничения: $\lambda_1=q\alpha_2$, $\lambda_2=p\alpha_1$, то вероятность $w(\lambda_1\mid t)$ не будет зависеть от предыстории, а будет зависеть только от ее значения в момент наступления события наблюдаемого потока, т.е. от $w(\lambda_1\mid t_k+0)=q\alpha_2/(p\alpha_1+q\alpha_2)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$; так что при дополнительных ограничениях имеется некоторая близость наблюдаемого потока к простейшему потоку; 2) ввести одно дополнительное ограничение: если $p=q$, то $w(\lambda_1\mid t)=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$ для $t\geq 0$, т.е. апостериорная вероятность $w(\lambda_1\mid t)$ вообще не зависит от моментов наступления событий наблюдаемого потока, так что здесь имеет место наибольшая близость к простейшему потоку.

Для второго условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1\mid t)=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$ для $t\geq 0$. Здесь также нет зависимости апостериорной вероятности $w(\lambda_1\mid t)$ от моментов наступления событий наблюдаемого потока и поэтому имеет место его наибольшая близость к простейшему потоку.

Для третьего условия факторизации апостериорная вероятность $w(\lambda_1\mid t_k+0)=\lambda_1/(\lambda_1+p\alpha_1)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, т.е. $w(\lambda_1\mid t)$ не зависит от предыстории, а зависит от ее значения $w(\lambda_1\mid t_k+0)$ в момент наступления события наблюдаемого потока. В этом случае близость наблюдаемого потока к простейшему потоку реализуется для следующих вариантов:

1) $\lambda_1 = q\alpha_2, \lambda_2 = 0, p = 0$; тогда $p_T(\tau) = q\alpha_2 e^{-q\alpha_2(\tau-T)}, \tau \geq T$; при этом $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и $w(\lambda_1 \mid t)$ не зависит от предыстории, а зависит от ее значения $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ в момент наступления события наблюдаемого потока (имеет место некоторая близость к простейшему потоку);

2) $\lambda_1 = q\alpha_2, \lambda_2 = p\alpha_1$; тогда $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}, \tau \geq T, z_1 = p\alpha_1 + q\alpha_2$; при этом $w(\lambda_1 \mid t_k + 0) = q\alpha_2 / (p\alpha_1 + q\alpha_2)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $w(\lambda_1 \mid t)$ не зависит от предыстории, а зависит от ее значения $w(\lambda_1 \mid t_k + 0)$ в момент наступления события наблюдаемого потока (имеет место некоторая близость к простейшему потоку);

3) $\lambda_1 = p\alpha_2, \lambda_2 = 0, q = 0$; тогда $p_T(\tau) = p\alpha_2 e^{-p\alpha_2(\tau-T)}, \tau \geq T$; при этом $w(\lambda_1 \mid t) = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2), t \geq 0$, т.е. апостериорная вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ вообще не зависит от моментов наступления событий наблюдаемого потока (имеет место наибольшая близость к простейшему потоку); 4) $\lambda_1 = p\alpha_2, \lambda_2 = q\alpha_1$; тогда $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau-T)}, \tau \geq T, z_1 = q\alpha_1 + p\alpha_2$; при этом $w(\lambda_1 \mid t) = \alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2), t \geq 0$ (имеет место наибольшая близость к простейшему потоку).

5. Особые случаи

Рассмотрим особые случаи, когда в выражении (11) для $\gamma(T)$ реализуется деление на ноль ($z_1 = z_2$). Последнее возможно в трех вариантах: 1) $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$, $p = 1$; 2) $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2, q = 1$; 3) $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2, p = q = 1$.

Для первого варианта можно показать (проделывая выкладки, аналогичные выкладкам разд. 3 и 4), что

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0; \quad 0 \leq \tau < T; \\ \{\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2(1-q)[1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)]\pi_2(T)\} e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-T)}, \quad \tau \geq T; \end{cases}$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad 0 \leq \tau_2 < T,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}(1-q)^2(\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2) \times$$
$$\times \left\{ \frac{\alpha_1\alpha_2[\lambda_1 + \alpha_1 - (\lambda_1 - \alpha_2)]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{(\alpha_1+\alpha_2)\left[(\lambda_1+\alpha_1)^2 - (\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]} \right\}^2 \times$$
$$\times [1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_1 - T)][1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau_2 - T)] e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau_1+\tau_2-2T)},$$
$$\tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T;$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0 \mid T)]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}, \quad \pi_2(0 \mid T) = \frac{p_{12} + \delta\pi_2\left[1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{1 - \delta e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}},$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}, \quad p_{12} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1+\alpha_1}, \quad \delta = \frac{\lambda_1\lambda_2 - q\alpha_1\alpha_2}{(\lambda_1+\alpha_1)^2}. \tag{15}$$

В частности, положив в (15) $T=0$, получаем для этого варианта формулу $p(\tau_1,\tau_2)$, приведенную в [1].

Из (15) следует, что при $q=1$ (первое условие факторизации) наблюдаемый поток становится рекуррентным. Тогда $p_T(\tau)=(\lambda_1+\alpha_1)e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-T)}$, $\tau \geq T$; при этом [2,7] апостериорная вероятность $w(\lambda_1\,|\,t)=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)$, $t\geq 0$ (имеет место наибольшая близость к простейшему потоку).

Для второго условия факторизации: $\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2=0$, вытекающего из (15), плотность вероятностей $p_T(\tau)$ определяется первой формулой в (15), в которой $\pi_2(T)=\left[\alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2)\right]\left[1-(\lambda_1-\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}/(\lambda_1+\alpha_1)\right]$. При этом [2, 7] $w(\lambda_1\,|\,t_k+0)= \;=\lambda_1/(\lambda_1+\alpha_1)$, $k=1, 2, \ldots$, т.е. апостериорная вероятность не зависит от предыстории, а зависит от ее значения $w(\lambda_1\,|\,t_k+0)$ в момент наступления события наблюдаемого потока. В этом случае близость к простейшему потоку отсутствует.

Вероятностные характеристики для первого варианта примут вид

$$M_\tau=T+\frac{1}{\lambda_1+\alpha_1}+\frac{\alpha_2(1-q)\pi_2(T)}{(\lambda_1+\alpha_1)^2},$$

$$D_\tau=\frac{1}{(\lambda_1+\alpha_1)^2}\left\{1+\frac{2\alpha_2(1-q)\pi_2(T)}{\lambda_1+\alpha_1}-\left[\frac{\alpha_2(1-q)\pi_2(T)}{\lambda_1+\alpha_1}\right]^2\right\},$$

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}(\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2)\times$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2(1-q)\left[\lambda_1+\alpha_1-(\lambda_1-\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{(\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1+\alpha_1)^2\left[(\lambda_1+\alpha_1)^2-(\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}^2.$$

Для второго варианта, аналогично первому, можно показать, что

$$p_T(\tau)=\begin{cases}0; & 0\leq\tau<T;\\ \{\lambda_1+\alpha_1-\alpha_1(1-p)[1-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-T)]\pi_1(T)\}\,e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-T)}, & \tau\geq T;\end{cases}$$

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=0,\quad 0\leq\tau_1<T,\quad 0\leq\tau_2<T,$$

$$p_T(\tau_1,\tau_2)=p_T(\tau_1)p_T(\tau_2)-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}(1-p)^2(\lambda_1\lambda_2-p\alpha_1\alpha_2)\times$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2\left[\lambda_1+\alpha_1-(\lambda_1-\alpha_2)\right]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{(\alpha_1+\alpha_2)\left[(\lambda_1+\alpha_1)^2-(\lambda_1\lambda_2-p\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}^2\times$$
$$\times[1-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau_1-T)][1-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau_2-T)]e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau_1+\tau_2-2T)},$$
$$\tau_1\geq T,\quad \tau_2\geq T;$$

$$\pi_1(T)=\pi_1-\left[\pi_1-\pi_1(0\,|\,T)\right]e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T},\quad \pi_1(0\,|\,T)=\frac{p_{21}+\delta\pi_1\left[1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{1-\delta e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}},$$

$$\pi_1=\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2},\quad p_{21}=\frac{\alpha_2}{\lambda_1+\alpha_1},\quad \delta=\frac{\lambda_1\lambda_2-p\alpha_1\alpha_2}{(\lambda_1+\alpha_1)^2}. \tag{16}$$

В частности, положив в (16) $T=0$, получаем для этого варианта формулу $p(\tau_1,\tau_2)$, приведенную в [1].

Из (16) следует, что при $p=1$ (первое условие факторизации) наблюдаемый поток становится рекуррентным. Тогда $p_T(\tau)=(\lambda_1+\alpha_1)e^{-(\lambda_1+\alpha_1)(\tau-T)}, \tau\geq T$; при этом [2,7] апостериорная вероятность $w(\lambda_1\mid t)=\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2), t\geq 0$ (имеет место наибольшая близость к простейшему потоку).

Для второго условия факторизации: $\lambda_1\lambda_2-p\alpha_1\alpha_2=0$, вытекающего из (16), плотность вероятностей $p_T(\tau)$ определяется первой формулой в (16), в которой $\pi_1(T)=\left[\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)\right]\left[1-(\lambda_1-\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}/(\lambda_1+\alpha_1)\right]$. При этом [2, 7] апостериорная вероятность $w(\lambda_1\mid t)$ не зависит от предыстории, а зависит только от ее значения $w(\lambda_1\mid t_k+0)=\lambda_1/(\lambda_1+\alpha_1)$, $k=1, 2, \ldots$, в момент наступления события наблюдаемого потока. В этом случае близость к простейшему потоку отсутствует.

Вероятностные характеристики для второго варианта запишутся в виде

$$M_\tau=T+\frac{1}{\lambda_1+\alpha_1}+\frac{\alpha_1(1-p)\pi_1(T)}{(\lambda_1+\alpha_1)^2},$$

$$D_\tau=\frac{1}{(\lambda_1+\alpha_1)^2}\left\{1+\frac{2\alpha_1(1-p)\pi_1(T)}{\lambda_1+\alpha_1}-\left[\frac{\alpha_1(1-p)\pi_1(T)}{\lambda_1+\alpha_1}\right]^2\right\},$$

$$\operatorname{cov}(\tau_1,\tau_2)=-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}(\lambda_1\lambda_2-q\alpha_1\alpha_2)\times$$
$$\times\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2(1-p)\left[\lambda_1+\alpha_1-(\lambda_1-\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}{(\alpha_1+\alpha_2)(\lambda_1+\alpha_1)^2\left[(\lambda_1+\alpha_1)^2-(\lambda_1\lambda_2-p\alpha_1\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}\right]}\right\}^2.$$

Третий вариант идентичен первому варианту, когда $q=1$, либо второму, когда $p=1$.

Заключение

Полученные результаты делают возможным решение задачи оценки неизвестных параметров, задающих обобщенный асинхронный поток событий, функционирующий в условиях мертвого времени.

В общем случае коррелированного обобщенного асинхронного потока событий, функционирующего в условиях мертвого времени (наблюдаемый поток), для оценки неизвестных параметров можно использовать метод моментов; для частных случаев, когда наблюдаемый поток становится рекуррентным, – метод максимального правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Асинхронный дважды стохастический поток с инициированием лишних событий // Дискретная математика. 2011. Т. 23. Вып. 2. С. 59–65.
2. *Горцев А.М., Леонова М.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного потока в условиях непродлевающего мертвого времени // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3(12). С. 54–64.

3. *Леонова М.А., Нежельская Л.А.* Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
4. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: Изд-во БГУ, 2000. 175 с.
5. *Васильева Л.А, Горцев А.М.* Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69–79.
6. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск: Изд-во «Университетское», 1988. 254 с.
7. *Горцев А.М., Леонова М.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1(10). С. 33–47.

Горцев Александр Михайлович
Леонова Мария Алексеевна
Нежельская Людмила Алексеевна
Томский государственный университет
E-mail: gam@fpmk.tsu.ru; mleonova86@mail.ru;
nla@fpmk.tsu.ru
Поступила в редакцию 10 июля 2012 г.

Gortsev Aleksandr M., Leonova Maria A., Nezhelskaya Lyudmila A. (Tomsk State University).
The joint probability density of duration of the intervals in a generalized asynchronous flow of events with unprolonging dead time.

Keywords: generalized asynchronous flow of events, unprolonging dead time, probability density, joint probability density, recurrence of the event flow.

Generalized asynchronous flow of events which intensity is a piecewise constant stochastic process $\lambda(t)$ with two states λ_1 and λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) is considered. During the time interval when $\lambda(t) = \lambda_i$, Poisson flow of events takes place with the intensity λ_i, $i = 1,2$. Transition from the first state of process $\lambda(t)$ into the second one (from the second state into the first one) is carried out at any moment of time. The sojourn time in the i-th state is exponentially distributed with parameter α_i, $i = 1,2$. The process of transition $\lambda(t)$ from the first state into the second one initiates with probability p ($0 \le p \le 1$) an extra event in the second state. Also the process of transition $\lambda(t)$ from the second state into the first one initiates with probability вероятностью q ($0 \le q \le 1$) extra event in the first state.

We solve the problem of finding the explicit form of probability density $p_T(\tau)$ of the interval between two events and the joint probability density $p_T(\tau_1, \tau_2)$ of the length of two adjacent intervals with unprolonging dead time.