

УДК 519.2

А.В. Китаева, В.И. Субботина

СМЕЩЕНИЕ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ: ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ЯДРА И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Проводится сравнительный анализ асимптотического смещения оценок функционалов от условных распределений, аналогичных оценкам регрессии Надарая – Ватсона, построенных на знакопеременных ядрах, и оценок, полученных методом полиномиальной аппроксимации. Показано, что скорость сходимости смещения оценок полиномиальной аппроксимации ведет себя по отношению к степени аппроксимирующего полинома так же, как главная часть смещения оценки типа Надарая – Ватсона по отношению к порядку ядра, причем множитель в главной части смещения, зависящий от ядра, допускает интерпретацию через знакопеременные ядра.

Ключевые слова: функционалы от условных распределений, ядерное оценивание, асимптотическое смещение.

Рассматриваются оценки кривой в точке, представимые в виде

$$\hat{Y}(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) Y_i, \quad (1)$$

где $W_{ni}(x)$ – некоторые веса, которые, вообще говоря, могут зависеть от всего набора регрессоров $\{X_i, i = \overline{1, n}\}$. Веса, которые, как правило, зависят от некоторого параметра сглаживания, регулируют степень влияния наблюдений $\{Y_i, i = \overline{1, n}\}$.

При выполнении условия нормировки $\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) / n = 1$, оценка $\hat{Y}(x)$ является решением оптимизационной задачи взвешенного МНК

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) (Y_i - \hat{Y}(x))^2 \rightarrow \min_{\hat{Y}(x)}.$$

Естественным подходом к выбору весов в (1) является описание последовательности весов с помощью некоторой функции плотности вероятностей $K(\cdot)$, в которой параметр масштаба играет роль сглаживающего параметра. Такие оценки называют оценками ядерного типа, а функцию $K(\cdot)$ – ядром. Если мы возьмем веса в виде

$$W_{ni}(x) = \frac{1}{nh_n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) / p_n(x),$$

где

$$p_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

– ядерная оценка плотности вероятностей Розенблатта – Парзена [1, 2], то полу-

чим классическую оценку функции регрессии – оценку Надарая – Ватсона [3, 4]

$$NW_n(x) = \frac{\sum_{l=1}^n Y_l K\left(\frac{x - X_l}{h_n}\right)}{\sum_{l=1}^n K\left(\frac{x - X_l}{h_n}\right)}.$$

Оценку $NW_n(x)$ можно рассматривать как локальную аппроксимацию константой, поскольку она получается из критерия

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2 K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \rightarrow \min_{\hat{Y}}. \quad (2)$$

Класс ядерных оценок был введен Розенблаттом М. [1] и изучался Парзенем Э. [2] и Надарая Э.А. [3, 5 – 7], хотя основные принципы ядерного оценивания были независимо предложены Фиксом И. и Ходжесом Дж. [8] еще в 1951 г. и Акаки Х. [9] в 1954 г.

Оценки полиномиальной аппроксимации функции регрессии $\hat{\alpha}_0(x)$ являются естественным обобщением оценки $NW_n(x)$, следующим из представления (2):

$$\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{\alpha}_0 - \sum_{k=1}^p \hat{\alpha}_k (X_i - x)^k \right)^2 K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \Rightarrow \min_{(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_k)}. \quad (3)$$

Метод локальной полиномиальной аппроксимации функции регрессии систематически изучался сначала в работах Stone C.J. [10] и Cleveland W.S. [11], затем Fan J. [12, 13], Fan J. и Gijbels I. [14], Ruppert D. и Wand M.P. [15].

Заметим, что $\alpha_n^{(k)} k!$ служит оценкой производной k -го порядка ($k \leq p$) функции регрессии.

1. Оценки типа Надарая – Ватсона функционалов от условных распределений

Аналогичный подход можно применить к оцениванию функционалов от условных распределений (условных функционалов) и их производных, рассматриваемых в работах Кошкина Г.М. [16, 17].

Все примеры практических приложений, приведенные в [16, 17], либо прямо являются условными функционалами и их производными, либо представляют собой функции от них. Поэтому с содержательной точки зрения вместо оценок «базовых» функционалов $a_i(x) = \int_R g_i(y) f(y, x) dy$, $i = \overline{1, s+1}$, $g_{s+1} \equiv 1$, и их производ-

ных, вводимых в [16], можно сразу же рассматривать оценки условных функционалов $b_i(x) = a_i(x) / p(x) = a_i(x) / a_{s+1}(x) = \int_R g_i(y) f(y | x) dy$, $i = \overline{1, s}$. Здесь $g_1, \dots, g_s$

– известные функции, $p(\cdot)$ – плотность распределения входной переменной X , $f(\cdot | x) = f(x, \cdot) / p(x)$ – условная плотность распределения зависимой переменной Y .

Рассмотрим среднеквадратическую ошибку (СКО) оценок типа Надарая – Ватсона условных функционалов в случае н.о.р. (независимых одинаково распределенных) наблюдений (X_i, Y_i) :

$$b_{1n}(x) = \frac{\sum_{l=1}^n g_1(Y_l) K\left(\frac{x - X_l}{h_n}\right)}{\sum_{l=1}^n K\left(\frac{x - X_l}{h_n}\right)}, \quad (4)$$

пользуясь методикой, предложенной Кошкиным Г.М.

Согласно этому, вначале находим СКО и ковариации оценок базовых функционалов $a_{in}(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{l=1}^n g_i(Y_l) K\left(\frac{x - X_l}{h_n}\right)$, а затем, применяя теоремы сходимости (следствия 1.9.1 и 1.9.3 в [18]), находим асимптотическое смещение и дисперсию оценки $b_{1n}(x)$. В нашем случае функция $H(t) = \frac{t_1}{t_2}$, $t_1 = a_{1n}(x)$, $t_2 = a_{2n}(x)$, $s = 2$. Будем считать, что $K(\cdot)$ – ограниченное симметричное ядро-плотность, $g_1(\cdot)$ и $p(\cdot)$ – ограниченные функции, $\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n + 1/(nh_n)) = 0$, плотность $p(\cdot)$ и функция $a_1(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы, а функция $\int_R g_1^2(y) f(\cdot, y) dy$ непрерывна в точке x , $p(x) \neq 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$E(b_{1n}(x)) = b_1(x) + h_n^2 \frac{\int_R x^2 K(x) dx}{p(x)} \left[\frac{1}{2} b_1''(x) p(x) + b_1'(x) p'(x) \right] + o(h_n^2),$$

$$Var(b_{1n}(x)) = \frac{\int_R g_1^2(y) f(y|x) dy - b_1^2(x)}{nh_n p(x)} \int_R K^2(u) du + o\left(\frac{1}{nh_n}\right).$$

При исследовании асимптотического смещения оценок базовых функционалов (см., например, [17, с. 41]) нетрудно видеть, что, отказавшись от условия неотрицательности ядра, можно повысить скорость сходимости смещения оценок. Пусть ядро $K(\cdot)$ дополнительно удовлетворяет условиям

$$\int_R |x^\nu K(x)| dx < \infty, T_j = \int_R x^j K(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, \nu - 1, T_\nu \neq 0,$$

где ν – произвольное четное число, которое обычно называется порядком ядра. Тогда при условии непрерывной дифференцируемости до ν -го порядка включительно функций $p(\cdot)$ и $a_1(\cdot)$

$$E(b_{1n}(x)) = b_1(x) + h_n^\nu \frac{\int_R x^\nu K(x) dx}{p(x) \nu!} \left[\frac{1}{2} a_1^{(\nu)}(x) - b_1(x) p^{(\nu)}(x) \right] + o(h_n^\nu).$$

Асимптотическое поведение дисперсии при этом не меняется.

Очевидно, что при $v > 2$ ядро принимает отрицательные значения. Знакопеременные ядра можно строить различными методами [17, с. 95] или, например, используя рекуррентную формулу, позволяющую получать ядра порядка $v + 2$, зная ядра v -го порядка при условии их дифференцируемости:

$$K_{v+2}(x) = \frac{3}{2} K_v(x) + \frac{1}{2} x K'_v(x),$$

где K_v – ядро порядка v .

Использование знакопеременного ядра позволяет повысить скорость сходимости смещения оценок (4), однако, с другой стороны, приводит к трудностям интерпретации результатов (например, получается, что оценка плотности не обладает свойствами плотности) и может выглядеть искусственным приемом.

2. Оценки полиномиальной аппроксимации функционалов от условных распределений

Оценки полиномиальной аппроксимации условных функционалов строятся с использованием ядер-плотностей и также дают улучшенную скорость сходимости смещения. Для простоты обозначений далее будем опускать индекс у функций $g(\cdot)$ и $b(\cdot)$.

Введем обозначения

$$G = \begin{pmatrix} g(y_1) \\ \vdots \\ g(y_n) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & X_1 - x & \cdots & (X_1 - x)^p \\ 1 & X_2 - x & \cdots & (X_2 - x)^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_n - x & \cdots & (X_n - x)^p \end{pmatrix},$$

$$h_n K = \text{diag} \left(K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right), \dots, K \left(\frac{x - X_n}{h_n} \right) \right),$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \text{вектор размерности } (p+1) \times 1, \quad \hat{\alpha}_n = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{0n} \\ \hat{\alpha}_{1n} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{pn} \end{pmatrix}.$$

Если н.о.р. наблюдения $Z_l = (X_l, Y_l)$, $l = \overline{1, n}$, и ядро таковы, что существует обратная матрица $D^{-1} = (A^T K A)^{-1}$, то из критерия

$$\sum_{i=1}^n \left(g(Y_i) - \hat{\alpha}_0 - \sum_{k=1}^p \hat{\alpha}_k (X_i - x)^k \right)^2 K \left(\frac{x - X_i}{h_n} \right) \Rightarrow \min_{(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_k)}$$

следует, что

$$\hat{\alpha}_{0n} = e^T D^{-1} A^T K G. \quad (5)$$

Рассмотрим асимптотические характеристики $\hat{\alpha}_{0n}$ как оценки условного функционала $b(x) = \int_R g(y) f(y|x) dy$.

Пусть ядро $K(\cdot)$ определено на замкнутом ограниченном множестве, тогда матрица D не вырождена с вероятностью, стремящейся к единице при $nh_n \rightarrow \infty$ [19]. Пусть также ядро ограничено, тогда оно будет иметь все моменты. Кроме того, будем предполагать, что $K(\cdot)$ – ядро-плотность (из чего будет следовать, что

$\int_R x^2 K(x) dx \neq 0$). Все наложенные на ядро ограничения вполне естественны для ядерного оценивания.

Введем определение. Пусть ξ_n и η_n – последовательности случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω, F, P) .

Определение. Будем говорить, что последовательность ξ_n бесконечно мала по сравнению с последовательностью η_n по вероятности (обозначение

$\xi_n = o_p(\eta_n)$), если для $\forall \varepsilon > 0$ $P\left(\left|\frac{\xi_n}{\eta_n}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим $\varphi(x) = \int_R g^2(y) f(y/x) dy - b^2(x)$, $\Phi = \text{diag}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \int_R xK(x)dx & \cdots & \int_R x^p K(x)dx \\ \int_R xK(x)dx & \int_R x^2 K(x)dx & \cdots & \int_R x^{p+1} K(x)dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_R x^p K(x)dx & \int_R x^{p+1} K(x)dx & \cdots & \int_R x^{2p} K(x)dx \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \int_R xK(x)dx & \cdots & \int_R x^p K(x)dx \\ u & \int_R x^2 K(x)dx & \cdots & \int_R x^{p+1} K(x)dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^p & \int_R x^{p+1} K(x)dx & \cdots & \int_R x^{2p} K(x)dx \end{pmatrix}.$$

Найдем асимптотические условные (при условии $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$) смещение и дисперсию оценки $\hat{\alpha}_{0n}$. При усреднении по X возникают проблемы, связанные с возможностью обращения в нуль знаменателя в (5), которые можно решать различными способами, например, при помощи кусочно-гладкой аппроксимации оценок [17] или добавлением к знаменателю слагаемого n^{-2} [20].

Теорема. Пусть функция $b(x)$ имеет непрерывные производные до $p+2$ -го порядка включительно; функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна в точке x , $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в точке x , $p(x) \neq 0$; ядро $K(\cdot)$ дополнительно удовлетворяет усло-

вию $\int_R x^{2k-1} K(x) dx = 0, k = \overline{0, p}$ (это условие выполняется, например, для четного

ядра); $\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n + 1/(nh_n)) = 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ условное смещение

для четных p ($p(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned} & E(\hat{\alpha}_{0n} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) - b(x) = \\ & = \frac{\int_R u^{p+2} K(u) |U(u)| du}{|M|(p+1)!} \left\{ \frac{b^{(p+2)}(x)}{p+2} + \frac{b^{(p+1)}(x)p'(x)}{p(x)} \right\} h_n^{p+2} + o_p(h_n^{p+2}); \end{aligned} \quad (6)$$

для нечетных p

$$\begin{aligned} & E(\hat{\alpha}_{0n} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) - b(x) = \\ & = \frac{1}{(p+1)!} \frac{\int_R u^{p+1} K(u) |U(u)| du}{|M|} b^{(p+1)}(x) h_n^{p+1} + o_p(h_n^{p+1}); \end{aligned} \quad (7)$$

условная дисперсия ($p(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned} & Var(\hat{\alpha}_{0n} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = e_{(1)}^T D^{-1} A^T K \Phi K A D^{-1} e_{(1)} = \\ & = \frac{1}{nh_n |M|^2} \int_R K(u) |U(u)|^2 du \frac{\Phi(x)}{p(x)} + o_p\left(\frac{1}{nh_n}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим смещение оценки $\hat{\alpha}_{0n}(x)$

$$\begin{aligned} & b_n = E(\hat{\alpha}_{0n} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) - b(x) = \\ & = e^T D^{-1} A^T K \left[\frac{b^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} \begin{pmatrix} (x_1 - x)^{(p+1)} \\ \vdots \\ (x_n - x)^{(p+1)} \end{pmatrix} \frac{b^{(p+2)}(x)}{(p+2)!} \begin{pmatrix} (x_1 - x)^{(p+2)} \\ \vdots \\ (x_n - x)^{(p+2)} \end{pmatrix} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим

$$h = \text{diag}(1, h_n, \dots, h_n^p),$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \int_R x K(x) dx & \int_R x^2 K(x) dx & \dots & \int_R x^{p+1} K(x) dx \\ \int_R x^2 K(x) dx & \int_R x^3 K(x) dx & \dots & \int_R x^{p+2} K(x) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_R x^{p+1} K(x) dx & \int_R x^{p+2} K(x) dx & \dots & \int_R x^{2p+1} K(x) dx \end{pmatrix}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{D}{n} \sim h \left[p(x) M + h_n p'(x) \tilde{M} \right] h, \\ & ne^T D^{-1} \sim \left[\frac{e^T M^{-1}}{p(x)} - h_n \frac{p'(x)}{p^2(x)} e^T M^{-1} \tilde{M} M^{-1} \right] h^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим поведение величин $s^{(j)} = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)(X_i-x)^j$ при $n \rightarrow \infty$.

Применяя закон больших чисел и делая преобразования (замену переменной в интеграле), как в лемме 2.3.1 [17, с. 30], получим для $k = \overline{0, p}$

$$s^{(j)} = \begin{cases} h_n^j \int_R x^j K(x) dx p(x) + o_p(h_n^j) & \text{при } j = 2\kappa, \\ h_n^{j+1} \int_R x^{j+1} K(x) dx p'(x) + o_p(h_n^{j+1}) & \text{при } j = 2\kappa + 1. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая (11), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{h^{-1} A^T K}{n} \begin{pmatrix} (x_1 - x)^k \\ \vdots \\ (x_n - x)^k \end{pmatrix} = \\ & = h_n^k p(x) \begin{pmatrix} \int_R x^k K(x) dx \\ \vdots \\ \int_R x^{p+k} K(x) dx \end{pmatrix} + h_n^{k+1} p'(x) \begin{pmatrix} \int_R x^{k+1} K(x) dx \\ \vdots \\ \int_R x^{p+k+1} K(x) dx \end{pmatrix} + o(h_n^{k+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим через $(M^{-1})_{li} = \int_R x^{i-1} K(x) dx, i = \overline{1, p+1}$, элементы первой строки

матрицы M^{-1} .

Подставляя (10) и (12) в (9), получаем

$$\begin{aligned} b_n = & \sum_{i=1}^{p+1} (M^{-1})_{li} \int_R x^{i+1+p} K(x) dx \frac{b^{(p+1)}(x)}{(p+1)!} h_n^{p+1} + \left[\sum_{i=1}^{p+1} (M^{-1})_{li} \int_R x^{i+2+p} K(x) dx \frac{b^{(p+2)}(x)}{(p+2)!} + \right. \\ & \left. + \left[\sum_{i=1}^{p+1} (M^{-1})_{li} \int_R x^{i+2+p} K(x) dx - e^T M^{-1} \tilde{M} M^{-1} \begin{pmatrix} \int_R x^{p+1} K(x) dx \\ \vdots \\ \int_R x^{2p+1} K(x) dx \end{pmatrix} \frac{p'(x) b^{(p+1)}(x)}{p(x) (p+1)!} h_n^{p+2} \right] \right] \quad (13) \end{aligned}$$

Упростим выражение (13), учитывая, что при k нечетном $\int_R x^k K(x) dx = 0$; при

$i+j$ нечетном $(M^{-1})_{ji} = 0$, а при $i+j$ четном $\tilde{M}_{ji} = 0$. Заметив, что матрица $\tilde{M}$ получена из матрицы M сдвигом влево на одну позицию, получим, что при четном p первый член в (13) обращается в нуль, и $e^T M^{-1} \tilde{M} = 0$.

Таким образом, справедлива формула (7). При нечетном p первый член в (13) является главным и справедлива формула (6).

Докажем (8). Обозначим

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \int_R x K^2(x) dx & \cdots & \int_R x^p K^2(x) dx \\ \int_R x K^2(x) dx & \int_R x^2 K^2(x) dx & \cdots & \int_R x^{p+1} K^2(x) dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_R x^p K^2(x) dx & \int_R x^{p+1} K^2(x) dx & \cdots & \int_R x^{2p} K^2(x) dx \end{pmatrix}.$$

Тогда $\frac{A^T K \Phi K A}{n} \sim \frac{p(x)\varphi(x)}{h_n} h T h$ при $n \rightarrow \infty$. Учитывая (10), имеем

$$nh_n D(\hat{\alpha}_{0n} | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{\varphi(x)}{p(x)} e^T M^{-1} T M^{-1} e + o_p(1),$$

что, нетрудно видеть, совпадает с (8).

Из формул (6) и (7) видно, что скорости сходимости смещения оценки $\hat{\alpha}_{0n}$ по отношению к степени полинома p и оценки $b_n(x)$ по отношению к параметру v ведут себя одинаково.

Заключение

Заметим, что главная часть смещения, зависящая от ядра, допускает интерпретацию через ядра из класса K_v : функция $\tilde{K}(u) = \frac{K(u)|U(u)|u}{|M|}$ удовлетворяет условию

$$\int_R \tilde{K}(u) u^s du = 0, s = \overline{1, p}, \int_R \tilde{K}(u) u^{p+1} du \neq 0,$$

если p нечетное;

$$\int_R \tilde{K}(u) u^s du = 0, s = \overline{1, p+1}, \int_R \tilde{K}(u) u^{p+2} du \neq 0,$$

если p четное, т. е. $\tilde{K}(u)$ можно рассматривать как ядро из класса $K_{p+1}(K_{p+2})$, если p нечетное (четное) (параметр v принимает только четные значения, поскольку для оценок условных функционалов типа Надарая – Ватсона рассматривались четные ядра).

Например, пусть $p = 2$ или $p = 3$. Тогда

$$\tilde{K}(u) = \frac{\int_R x^4 K(x) dx - u^2 \int_R x^2 K(x) dx}{\left(\int_R x^4 K(x) dx - \left(\int_R x^2 K(x) dx \right)^2 \right)} K(u) \quad (14)$$

принадлежит классу K_4 . При помощи формулы (14) можно получать ядра из класса K_4 из ядер из класса K_2 ($K(\cdot) \in K_2$ в формуле (14)).

Таким образом, оценки полиномиальной аппроксимации, используя ядра-плотности, дают естественный подход к ядерному оцениванию условных функционалов, обеспечивая улучшенную скорость сходимости смещения, причем константы сходимости в части, зависящей от ядра, при определенном выборе знакопеременного ядра совпадают для двух типов рассматриваемых оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rosenblatt M.* Remarks on some nonparametric estimates of a density function // *Ann. Math. Statist.* 1956. V. 27. No. 3. P. 832–837.
2. *Parzen E.* On estimation of a probability density function and mode // *Ann. Math. Statist.* 1962. V. 33. No. 3. P. 1065–1076.
3. *Надарая Э.А.* Об оценке регрессии // *Теория вероятностей и ее применения.* 1964. Т. 19. Вып. 1. С. 147–149.
4. *Watson G.S.* Smooth regression analysis // *Sankhya. Indian J. Statist.* 1964. V. A26. P. 359–372.
5. *Надарая Э.А.* Непараметрические оценки кривой регрессии // *Тр. ВЦ АН ГССР. Тбилиси: Мецниереба.* 1965. № 5:1. С. 56–68.
6. *Надарая Э.А.* Об интегральной среднеквадратической ошибке некоторых непараметрических оценок плотности вероятностей // *Теория вероятностей и ее применения.* 1974. Т. 19. Вып. 1. С. 131–139.
7. *Надарая Э.А.* Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983. 194 с.
8. *Fix E., Hodges J.L.* Discriminatory analysis – non-parametric discrimination: consistency properties // *Report No. 4. Project no. 21-29-004. USAF School of Aviation Medicine, Randolph Field, Texas.* 1951.
9. *Akaike H.* An approximation to the density function // *Ann. Inst. Statist. Math.* 1954. V. 6. P. 127–32.
10. *Stone C.J.* Consistent nonparametric regression // *Ann. Statist.* 1977. V. 5. P. 595–645.
11. *Cleveland W.S.* Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots // *J. Amer. Statist. Assoc.* 1979. V. 74. P. 829–836.
12. *Fan J.* Design-adaptive nonparametric regression // *J. Amer. Statist. Assoc.* 1992. V. 87. №420. P. 998–1004.
13. *Fan J.* Local linear regression smoothers and their minimax efficiency // *Ann. Statist.* 1993. V. 21. P. 196–216.
14. *Fan J., Gijbels I.* Variable bandwidth and local linear regression smoothers // *Ann. Statist.* 1992. V. 20 P. 2008–2036.
15. *Ruppert D., Wand M.P.* Multivariate locally weighted least squares regression // *Ann. Statist.* 1994. V. 22. №3. P. 1346–1370.
16. *Кошкин Г.М.* Об одном подходе к исследованию функционалов от условных распределений при статистической неопределенности // *Автоматика и телемеханика.* 1978. № 8. С. 53–65.
17. *Добровидов А.В., Кошкин Г.М.* Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, Физматлит, 1997. 336 с.
18. *Васильев В.А., Добровидов А.В., Кошкин Г.М.* Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей. М.: Наука, 2004. 512 с.
19. *Wand M.P., Jones M.C.* Kernel Smoothing. London: Chapman & Hall, 1995. 210 p.
20. *Fan J.* Local linear regression smoothers and their minimax efficiency // *Ann. Statist.* 1993. V. 21. P. 196–216.

Китаева Анна Владимировна

Томский политехнический университет,

Субботина Валентина Игоревна

Томский государственный университет,

E-mail: kit1157@yandex.ru; valsubbotina@mail.ru

Поступила в редакцию 7 сентября 2012 г.

Kitaeva Anna V. (Tomsk Polytechnic University), *Subbotina Valentina I.* (Tomsk State University). **Bias of conditional density functional's estimators: sign-changing kernels and polynomial approximation.**

Keywords: conditional density functionals, kernel estimation, asymptotic bias.

Comparative analysis of asymptotic biases of two types of conditional density functional's kernel estimators: analogous to Nadaraya – Watson regression estimators with sign-changing kernels and polynomial approximation estimators are considered.

The range of convergence of the polynomial approximation estimators' behavior depending of the polynomial degree is similar to the one of Nadaraya – Watson type estimators depending of the kernel's order. The bias' main part can be interpreted by sign-changing kernels. The results are the same as for simple regression estimators.