

УДК 336:51

Г.А. Медведев

О ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДОХОДНОСТИ. 4. ДВУХФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ДАФФИ – КАНА

Исследуются модели Даффи – Кана, описывающие динамику краткосрочной процентной ставки в случае, когда состояние финансового рынка характеризуется не только уровнем самой процентной ставки, но и еще одним другим изменяющимся во времени параметром. Рассматриваются два случая. В первом в качестве дополнительной переменной состояния берется локальное по времени среднее значение краткосрочной процентной ставки. Во втором случае в качестве дополнительной переменной состояния принята мгновенная дисперсия процентной ставки. Двухфакторные модели строятся таким образом, чтобы они приводили к аффинной временной структуре доходности. Основное внимание уделяется определению функций временной структуры. Поскольку получающиеся для этих функций уравнения не допускают аналитических решений, предлагается находить их аппроксимации. Ввиду того, что в реальных случаях волатильность обычно мала, для этого используется метод малого параметра Пуанкаре.

Ключевые слова: *процентные ставки доходности, аффинная модель, функции временной структуры, модель Даффи – Кана, метод малого параметра.*

Обычно рассматриваются модели процентной ставки, в которых краткосрочная ставка $r(t)$ является единственной переменной состояния. Эти модели привлекательны тем, что часто дают возможность получать аналитические решения и обеспечивают относительно простой вычислительный анализ. Однако однофакторные модели имеют определенные недостатки. Основной из них состоит в том, что вся временная структура управляется только единственным значением краткосрочной ставки, зафиксированным в начальный момент построения временной структуры. А это представляется неразумным с экономической точки зрения.

Для того чтобы избежать этого недостатка авторы предлагают для моделирования неопределенности процентной ставки использовать более чем одну переменную состояния. При переходе от единственного фактора к нескольким должно быть улучшение аппроксимации временной структуры. Ценой за это в общем случае является потеря возможности получения аналитических решений, получение уравнений с частными производными с повышенной размерностью и усложнение процедуры получения результатов.

Выбор подходящих факторов также важен. Здесь снова возникает проблема выполнения условий отсутствия арбитража и построения равновесных моделей. Большинство известных многофакторных моделей основываются на двух факторах. Дж. Кокс, Дж. Ингерсолл и С. Росс (CIR, 1985) и С. Ричард (1978) использовали спот-ставку и ставку инфляции, Ф. Лонгстафф и Е. Шварц (1991) – спот-ставку и ее волатильность, Д. Даффи и Р. Кан (1996) – доходность на фиксированный набор облигаций, М. Бреннан и Е. Шварц (1979) – долгосрочную и краткосрочную ставки, С. Шейфер и Е. Шварц (1987) – краткосрочную ставку и спред, Г. Фонг и О. Васичек (1991) – краткосрочную ставку и ее волатильность, С. Дас и

С. Фореси (1996) – краткосрочную ставку и ее среднее и т.д. В последнее время были разработаны трехфакторные модели, из которых наиболее известными являются модель Л. Чена (1996) и модель П. Балдуччи, С. Даса, С. Фореси и Р. Сандарамы (BDFS, 1996). В этих моделях в качестве переменных состояния используются краткосрочная ставка, ее локальное среднее и ее волатильность. Некоторые модели получаются расширением однофакторных арбитражных моделей путем предположения о том, что параметры модели могут изменяться со временем, такой параметр включается в число переменных состояния и добавляется соответствующее уравнение его динамики. Как и в случае их однофакторных версий, многофакторные арбитражные модели создают безрисковый портфель в текущем времени относительно всех рассматриваемых факторов для получения из арбитражных рассуждений уравнения в частных производных, которому должна удовлетворять стоимость актива.

Общие свойства многофакторных моделей временной структуры доходностей были представлены в [1]. Там предполагалось, что динамика переменных состояния рынка может описываться многомерным стохастическим уравнением

$$dX(t) = K(\theta - X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t),$$

где $X(t)$ – n -вектор состояния; θ – n -вектор математических ожиданий $E[X]$; $\sigma(X)$ – $(n \times m)$ -матрица волатильности; K – $(n \times n)$ -матрица коэффициентов возвращения к среднему; $W(t)$ – m -вектор независимых стандартных винеровских процессов. Чтобы временная структура доходности была аффинной, матрица волатильности и m -вектор рыночных цен риска $\lambda(x)$ должны обладать свойствами

$$\sigma(x)\sigma(x)^T = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i, \quad \sigma(x)\lambda(x) = \xi + \sum_{i=1}^n \eta_i x_i,$$

где α и β_i – $(n \times n)$ -матрицы; ξ и η_i – n -векторы, x_i – компоненты вектора x . Указанные соотношения удовлетворяются при

$$\sigma(x) = \sigma \langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle, \quad \lambda(x) = \langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle \lambda,$$

где γ, λ – m -векторы, σ – $(n \times m)$ -матрица, Γ – $(m \times n)$ -матрица, а $\langle \sqrt{\gamma + \Gamma x} \rangle$ – диагональная $(m \times m)$ -матрица, по диагонали которой стоят квадратные корни компонент вектора $\gamma + \Gamma x$. В этом случае $\alpha = \sigma \langle \gamma \rangle \sigma^T$, $\xi = \sigma \langle \gamma \rangle \lambda$, а элементы матрицы β_i и вектора η_i определяются равенствами

$$(\beta_i)_{kj} = \sum_{u=1}^m \sigma_{ku} \sigma_{ju} \Gamma_{ui}, \quad 1 \leq k, j \leq n; \quad (\eta_i)_k = \sum_{u=1}^m \sigma_{ku} \Gamma_{ui} \lambda_u, \quad 1 \leq k \leq n.$$

В этом случае скалярная функция временной структуры $A(\tau)$ и n -вектор $B(\tau)^T = (B_1(\tau), B_2(\tau), \dots, B_n(\tau))$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A'(\tau) = (\sigma \langle \gamma \rangle \lambda - K\theta)^T B(\tau) + B(\tau)^T \sigma \langle \gamma \rangle \sigma^T B(\tau)/2, \quad A(0) = 0, \\ B'_i(\tau) = \phi_i - B(\tau)^T (\eta_i + K_i) - B(\tau)^T \beta_i B(\tau)/2, \quad B_i(0) = 0. \quad (1)$$

В уравнении для $B_i(\tau)$ символ K_i обозначает i -й столбец матрицы K , $1 \leq i \leq n$; $\phi_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$; $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n = 1$. Заметим также, что матрицы β_i , $1 \leq i \leq n$, по определению являются симметрическими.

Основную трудность при определении функций временной структуры $A(\tau)$ и $B(\tau)$ представляет решение системы уравнений (1), которая, по существу, является системой уравнений Риккати и не имеет аналитического решения. Проблема ре-

шений таких уравнений обсуждалась Д. Даффи и Р. Каном [2], которые предложили численный метод решения с помощью конечно-разностных алгоритмов. Они проиллюстрировали свой подход на примере двухфакторной модели стохастической волатильности, являющейся двухфакторным расширением модели Кокса – Ингерсолла – Росса. Этот пример показал, что такой подход требует довольно громоздких преобразований, большого опыта при выборе параметров сетки и при оценке точности решения. Кроме того, такой метод естественно является приближенным, как и все конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений. Наряду с этим можно использовать другой приближенный метод, основанный на том, что для моделей процентных ставок, приводящих к аффинным временным структурам доходности, оценки параметров на основе реальных рыночных данных показывают, что волатильность в этих моделях обычно мала [3 – 7]. Тогда для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (1) можно использовать метод малого параметра А. Пуанкаре (1892), рассматривая в качестве малого параметра коэффициент, определяющий порядок малости элементов матрицы волатильности. Идея метода заключается в следующем. В правой части дифференциального уравнения выделяют часть, которую можно считать малой по сравнению с оставшейся. Считая, что эта «малая часть» несущественно влияет на решение уравнения, отбрасывают ее и получают, таким образом, более простое уравнение. Решение этого уравнения принимается за нулевое приближение к решению исходного уравнения. После этого возвращаются к решению исходного уравнения, в правой части которого в «малую часть» подставляется найденное нулевое приближение. Решение получающегося уравнения принимается за первое приближение, и процедура повторяется, пока не будет достигнута необходимая точность. Используем метод малого параметра для определения временных структур доходности для многомерных моделей динамики процентных ставок.

1. Двухфакторная модель «ставка – ее локальное среднее»

Идея распространения однофакторных моделей динамики процентных ставок на многофакторный случай состоит в том, что некоторый параметр, который был постоянным в однофакторном случае, считают случайно изменяющимся и при этом предположении добавляют уравнение его стохастической динамики. Так получается двухфакторная модель. Если в качестве этого параметра выбран уровень θ , к которому возвращается процентная ставка, имеем следующую двухфакторную модель:

$$dr(t) = k_r(\theta(t) - r(t))dt + \sqrt{2k_r D_r \frac{r(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_r(t), r(0) > x; \quad (2)$$

$$d\theta(t) = k_\theta(\theta_0 - \theta(t))dt + \sqrt{2k_\theta D_\theta \frac{\theta(t) - x}{\theta_0 - x}} dW_\theta(t), \theta(0) > x. \quad (3)$$

Здесь вектор переменных состояния $X(t)^T = (r(t), \theta(t))$, вектор математических ожиданий $\theta^T = (\theta_0, \theta_0)$. Остальные элементы модели

$$K = \begin{pmatrix} k_r & -k_r \\ 0 & k_\theta \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2k_r D_r / (\theta_0 - x)} & 0 \\ 0 & \sqrt{2k_\theta D_\theta / (\theta_0 - x)} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом если обозначить для краткости

$$\sigma_{11} = \sqrt{2k_r D_r / (\theta_0 - x)}, \quad \sigma_{22} = \sqrt{2k_\theta D_\theta / (\theta_0 - x)},$$

имеем

$$\eta_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \lambda_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \lambda_\theta \end{pmatrix}, \quad \beta_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 \end{pmatrix},$$

$$K_r = \begin{pmatrix} k_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_\theta = \begin{pmatrix} -k_r \\ k_\theta \end{pmatrix}.$$

Параметр x определяет нижнюю границу изменения процентной ставки, поэтому он имеет одинаковое значение как в уравнении для краткосрочной процентной ставки $r(t)$, так и в уравнении для ее локального среднего $\theta(t)$.

Таким образом, уравнения (1) для функций временной структуры $B(\tau)^T = (B_r(\tau), B_\theta(\tau))$ приобретают вид

$$B_r'(\tau) = \phi_r - (k_r + \sigma_{11} \lambda_r) B_r(\tau) - \sigma_{11}^2 B_r(\tau)^2 / 2, \quad B_r(0) = 0; \quad (4)$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta + k_r B_r(\tau) - (k_\theta + \sigma_{22} \lambda_\theta) B_\theta(\tau) - \sigma_{22}^2 B_\theta(\tau)^2 / 2, \quad B_\theta(0) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) – это уравнение Риккати с постоянными коэффициентами, и его решение имеет вид

$$B_r(\tau) = \phi_r \left(\frac{\varepsilon_r}{e^{\varepsilon_r \tau} - 1} + V_r \right)^{-1}, \quad (6)$$

где для краткости обозначено

$$\varepsilon_r = \sqrt{(k_r + \sigma_{11} \lambda_r)^2 + 2\phi_r \sigma_{11}^2}, \quad V_r = (\varepsilon_r + \sigma_{11} \lambda_r + k_r) / 2.$$

Уравнение (5) – это тоже уравнение Риккати, у которого один из коэффициентов, $\phi_\theta + k_r B_r(\tau)$, зависит от τ . Его решение в аналитическом виде записать не удастся, хотя при помощи преобразования $B_\theta(\tau) = \frac{2}{\sigma_{22}^2} \frac{1}{Y} \frac{dY}{d\tau}$ его можно свести к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменным коэффициентом:

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} + (k_\theta + \sigma_{22} \lambda_\theta) \frac{dY}{d\tau} - \sigma_{22}^2 (\phi_\theta + k_r B_r(\tau)) Y = 0.$$

Решение этого уравнения в аналитическом виде, к сожалению, тоже не получается из-за сложного вида $B_r(\tau)$. Воспользуемся методом малого параметра, предполагая, что величины σ_{11}^2 и σ_{22}^2 являются малыми. Поскольку процесс $\theta(t)$ имеет смысл локального среднего процесса $r(t)$, то естественно предполагать, что $k_\theta D_\theta < k_r D_r$. Поэтому в качестве малого параметра δ можно принять величину $\delta = \sigma_{11}^2 / 2$. Обозначим также $\omega = \sigma_{22}^2 / \sigma_{11}^2 < 1$, $\psi_r = k_r + \sigma_{11} \lambda_r$, $\psi_\theta = k_\theta + \sigma_{22} \lambda_\theta$. Уравнения (4), (5) можно записать в виде

$$B_r'(\tau) = \phi_r - \psi_r B_r(\tau) - \delta B_r(\tau)^2, \quad B_r(0) = 0; \quad (7)$$

$$B_\theta'(\tau) = \phi_\theta - \psi_\theta B_\theta(\tau) + k_r B_r(\tau) - \delta \omega B_\theta(\tau)^2, \quad B_\theta(0) = 0. \quad (8)$$

Для успешного применения метода малого параметра обычно требуется, чтобы выражения в правых частях уравнений были аналитическими функциями. То-

гда последовательность приближений будет сходиться к истинному решению. В нашем случае это выполняется. Представим функции $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$ в виде рядов по малому параметру

$$B_r(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i G_i(\tau), \quad B_\theta(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i H_i(\tau), \quad (9)$$

где $G_i(\tau)$ и $H_i(\tau)$ – i -е приближения функций $B_r(\tau)$ и $B_\theta(\tau)$ соответственно. Подставляя выражения (9) в уравнения (7), (8), получаем уравнения для определения последовательных приближений:

$$G_0'(\tau) = \phi_r - \psi_r G_0(\tau), \quad G_1'(\tau) = -\psi_r G_1(\tau) - G_0(\tau)^2,$$

$$G_i'(\tau) = -\psi_r G_i(\tau) - \sum_{j=0}^{i-1} G_j(\tau) G_{i-j-1}(\tau), \quad i \geq 2;$$

$$H_0'(\tau) = \phi_\theta - \psi_\theta H_0(\tau) + k_r G_0(\tau), \quad H_1'(\tau) = -\psi_\theta H_1(\tau) + k_r G_1(\tau) - \omega H_0(\tau)^2,$$

$$H_i'(\tau) = -\psi_\theta H_i(\tau) + k_r G_i(\tau) - \omega \sum_{j=0}^{i-1} H_j(\tau) H_{i-j-1}(\tau), \quad i \geq 2.$$

Начальные условия для всех приближений нулевые: $G_i(0) = 0$ и $H_i(0) = 0$, $i \geq 0$. Как видно, уравнения для приближений всех порядков – это неоднородные линейные уравнения первого порядка, решение которых не представляет труда. При этом однородные части всех уравнений одинаковые, что тоже облегчает процедуру нахождения решений. Приведем первые приближения

$$G_0(\tau) = \frac{\phi_r}{\psi_r} (1 - e^{-\psi_r \tau}), \quad G_1(\tau) = -\frac{\phi_r^2}{\psi_r^3} (1 - 2\psi_r \tau e^{-\psi_r \tau} - e^{-2\psi_r \tau}),$$

$$H_0(\tau) = \left(\frac{\phi_\theta}{\psi_\theta} + \frac{k_r \phi_r}{\psi_r \psi_\theta} \right) (1 - e^{-\psi_\theta \tau}) + \frac{k_r \phi_r}{\psi_r (\psi_\theta - \psi_r)} (e^{-\psi_\theta \tau} - e^{-\psi_r \tau}).$$

Оказывается, что все приближения представляются в виде взвешенной суммы экспонент, такой, что i -е приближение является суммой экспонент с показателями $0, -\psi_r \tau, -2\psi_r \tau, \dots, -(i+1)\psi_r \tau$, причем громоздкость взвешивающих коэффициентов с ростом i быстро растет. Поэтому приближения в аналитическом виде приводить здесь представляется неудобным. Продемонстрировать характер приближений удобнее на численном примере. Д. Ан и Б. Гао [5] приспособили модель Даффи – Кана для описания динамики процесса годовой ставки доходности одномесечных бумаг Казначейства США для периода наблюдения с января 1960 г. по февраль 1991 г. Они получили такой результат:

$$dr(t) = 0,1347 \times (0,0762 - r(t))dt + \sqrt{0,0181 \times r(t) - 0,0006} dW(t).$$

В наших обозначениях это означает, что $k_r = 0,1347$, $\theta_0 = 0,0762$, $D_r = 0,002892$, $\sigma_{11} = 0,134536$, $x = 0,033149$. Локальное среднее $\theta(t)$ по смыслу является сглаженной процентной ставкой, поэтому коэффициент возвращения k_θ и дисперсия D_θ локального среднего $\theta(t)$ должны быть меньше, чем k_r и D_r соответственно. Выберем их равными $k_\theta = 0,1$, $k_r = 0,01347$, $D_\theta = 0,1$, $D_r = 0,0002892$. Выберем также $\lambda_r = \lambda_\theta = 0,1$, $\phi_r = \phi_\theta = 0,5$. Тогда $\psi_r = 0,148154$, $\psi_\theta = 0,014815$, $\sigma_{22} = 0,013454$. В качестве малого параметра выбираем $\delta = \sigma_{11}^2/2 = 0,009050$, $\omega = \sigma_{22}^2/\sigma_{11}^2 = 0,01$.

Первые три приближения функции $B_r(\tau)$ имеют вид

$$\begin{aligned} G_0(\tau) &= 3,3749 \times (1 - e^{-0,1482 \times \tau}), \\ \delta G_1(\tau) &= -0,6957(1 - e^{-0,2964 \times \tau}) + 0,2062 \times \tau e^{-0,1482 \times \tau}, \\ \delta^2 G_2(\tau) &= 0,2867 - 0,1434 e^{-0,4446 \times \tau} - (0,2866 + 0,08497 \times \tau) e^{-0,2964 \times \tau} + \\ &\quad + (0,1432 - 0,04250 \times \tau - 0,006296 \times \tau^2) e^{-0,1482 \times \tau}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $B_r(\tau)$ определяется формулой (6) точно, можно сравнить полученные приближения с точными значениями. На рис. 1 представлены графики относительной погрешности приближений. На рис. 1 использованы обозначения

$$G0 = \frac{G_0(\tau) - B_r(\tau)}{B_r(\tau)}; \dots;$$

$$G01234 = \frac{G_0(\tau) + \delta G_1(\tau) + \delta^2 G_2(\tau) + \delta^3 G_3(\tau) + \delta^4 G_4 - B_r(\tau)}{B_r(\tau)}.$$

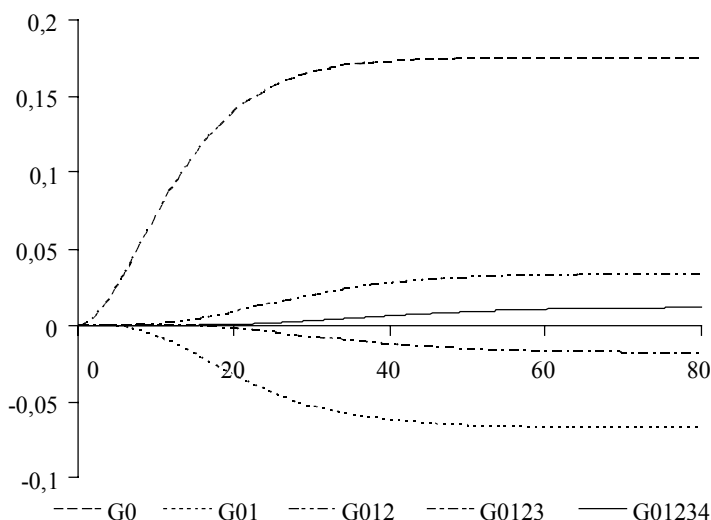


Рис. 1. Относительная погрешность первых приближений функции $B_r(\tau)$ по методу малого параметра

Обозначим через $B_r^{(j)}(\tau)$ аппроксимацию функции $B_r(\tau)$ с помощью приближений $\{G_i(\tau), 0 \leq i \leq j\}$ и через $B_\theta^{(j)}(\tau)$ – аппроксимацию функции $B_\theta(\tau)$ с помощью приближений $\{H_i(\tau), 0 \leq i \leq j\}$, т. е.

$$B_r^{(j)}(\tau) = \sum_{i=0}^j \delta^i G_i(\tau), \quad B_\theta^{(j)}(\tau) = \sum_{i=0}^j \delta^i H_i(\tau).$$

Как видно из рис. 1, максимальные отклонения приближения от истинного значения достигаются в предельной точке при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому точность аппроксимации $B_r^{(j)}(\tau)$ можно оценить сверху неравенством

$$|B_r^{(j)}(\tau) - B_r(\tau)| < |B_r^{(j)}(\infty) - B_r(\infty)|.$$

Как следует из формулы (6), $B_r(\infty) = \phi_r V_r^{-1}$. Определим $B_r^{(j)}(\infty)$. Поскольку $B_r'(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ для любых допустимых значений параметров, то это свойство будет иметь место и для приближений $G_i(\tau)$. Иначе говоря, их производные также стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Это значит, что предельные значения $G_i(\infty)$ будут удовлетворять системе соотношений

$$\phi_r = \psi_r G_0(\infty), \psi_r G_1(\infty) = -G_0(\infty)^2, \psi_r G_i(\infty) = -\sum_{j=0}^{i-1} G_j(\infty) G_{i-j-1}(\infty), \quad i \geq 2.$$

Из этих соотношений следует, что $G_i(\infty) = (-1)^i a_i \frac{\phi_r^{i+1}}{\psi_r^{2i+1}}$, где коэффициенты a_i на-

ходятся следующим образом. Из первого соотношения имеем $a_0 = 1$. Остальные коэффициенты a_i , $i \geq 1$, последовательно определяются по формуле $a_i = p_i q_i^T$, где p_i и q_i – вектора, определяемые равенствами $p_i = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1})$, $q_i = (a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_0)$, $i \geq 1$. Так что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ и т. д. Поэтому

$$B_r^{(j)}(\infty) = \sum_{i=0}^j (-\delta)^i a_i \frac{\phi_r^{i+1}}{\psi_r^{2i+1}} \quad \text{и} \quad |B_r^{(j)}(\tau) - B_r(\tau)| < \left| \frac{\phi_r}{V_r} - \frac{\phi_r}{\psi_r} \sum_{i=0}^j a_i \left(-\frac{\delta \phi_r}{\psi_r^2} \right)^i \right|.$$

Таким образом, точность можно контролировать, если определить предельное значение $B_r(\infty)$ из уравнений (7) и (8) при $\tau \rightarrow \infty$. Аппроксимация функции $B_0(\tau)$ в виде (9) производится аналогичным способом. Свойства аппроксимирующих функций $H_j(\tau)$ аналогичны свойствам функций $G_i(\tau)$, только в связи с тем, что уравнение (8) для функции $B_0(\tau)$ немного сложнее, чем уравнение (7) для $B_r(\tau)$, функции $H_j(\tau)$ более громоздки по сравнению с функциями $G_i(\tau)$. Обозначим предельные при $\tau \rightarrow \infty$ относительные погрешности аппроксимации

$$G_j = \frac{B_r^j(\infty) - B_r(\infty)}{B_r(\infty)}, \quad H_j = \frac{B_0^j(\infty) - B_0(\infty)}{B_0(\infty)}.$$

На рис. 2 представлены G_j и H_j для нескольких значений порядка приближения j .

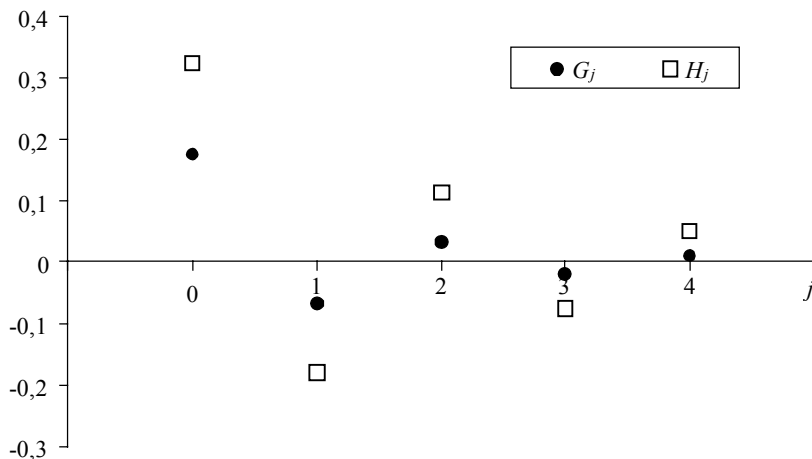


Рис. 2. Предельные относительные погрешности аппроксимации функций $B_r(\tau)$ и $B_0(\tau)$

2. Двухфакторная модель «ставка – ее мгновенная дисперсия»

Если в качестве второй переменной состояния выбрана мгновенная дисперсия краткосрочной процентной ставки, уравнения двухфакторной модели переменных состояния приобретают вид

$$dr(t) = k_r(\theta - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t) \frac{r(t) - x_r}{\theta - x_r}} dW_r(t), r(0) > x_r;$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x_D}{V - x_D}} dW_D(t), D(0) > x_D.$$

Однако в таком виде эти уравнения не приводят к аффинной временной структуре из-за того, что в первом уравнении под корнем появляется произведение процессов $r(t)$ и $D(t)$. Чтобы остаться в рамках аффинной доходности, приходится нижнюю границу процентной ставки x_r удалить на бесконечность, $x_r \rightarrow -\infty$. Тогда уравнения двухфакторной модели краткосрочной процентной ставки получаются в виде

$$dr(t) = k_r(\theta - r(t))dt + \sqrt{2k_r D(t)} dW_r(t); \quad (10)$$

$$dD(t) = k_D(V - D(t))dt + \sqrt{2k_D S \frac{D(t) - x}{V - x}} dW_D(t), D(0) > x \geq 0. \quad (11)$$

Здесь V и S – соответственно среднее и дисперсия процесса $D(t)$, $x = x_D$ – нижняя граница процесса $D(t)$. В этом случае вектор переменных состояния $X(t)^T = (r(t), D(t))$, вектор математических ожиданий $\theta^T = (\theta, V)$. Остальные элементы модели могут быть определены следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_D \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -2k_D S x / (V - x) \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2k_r \\ 0 & 2k_D S / (V - x) \end{pmatrix}.$$

Уравнения (1) для функций временной структуры $A(t)$ и $B(t)^T = (B_r(t), B_D(t))$ приобретают вид

$$A'(\tau) = k_r \theta B_r(\tau) + k_D V B_D(\tau) + \frac{2\lambda_D S x}{V - x} k_D B_D(\tau) - \frac{k_D S x}{V - x} B_D(\tau)^2, \\ B_r'(\tau) = \phi_r - k_r B_r(\tau), B_r(0) = 0, \quad (12)$$

$$B_D'(\tau) = \phi_D - \left(1 + \frac{2\lambda_D S}{V - x}\right) k_D B_D(\tau) - 2\lambda_r k_r B_r(\tau) - k_r B_r(\tau)^2 - \frac{k_D S}{V - x} B_D(\tau)^2, \\ B_D(0) = 0. \quad (13)$$

В этой версии двухфакторной модели функция $B_r(\tau)$ легко находится из уравнения (12):

$$B_r(\tau) = \phi_r (1 - e^{-k_r \tau}) / k_r,$$

а в уравнении для функции $B_D(\tau)$ в качестве малого параметра можно использовать параметр $\delta = \frac{k_D S}{V - x}$, где S – дисперсия процесса $D(t)$, определяя $B_D(\tau)$ в виде разложения $B_D(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i B_{Di}(\tau)$. При этом нулевое приближение $B_{D0}(\tau)$ находится в виде

$$B_{D0}(\tau) = f_1(1 - e^{-\psi\tau}) + f_2(e^{-k_r\tau} - e^{-\psi\tau}) + f_3(e^{-\psi\tau} - e^{-2k_r\tau}),$$

где $\psi = k_D(1 + 2\lambda_D S/(V - x))$, $f_1 = (\phi_D - \phi_r^2/k_r - 2\lambda_r\phi_r)/\psi$, $f_2 = 2(\lambda_r\phi_r + \phi_r^2/k_r)/(\psi - k_r)$, $f_3 = \phi_r^2/(k_r(\psi - 2k_r))$. Следующие приближения $B_{Di}(\tau)$ находятся последовательно из линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$B_{Di}'(\tau) = -\psi B_{Di}(\tau) - \delta \sum_{j=0}^{i-1} B_{Dj}(\tau) B_{D,i-1-j}(\tau), \quad B_{Di}(\tau) = 0, \quad i \geq 1. \quad (14)$$

Говоря о функции временной структуры $B_D(\tau)$, следует обратить внимание на то, что с ростом дисперсии процентной ставки доходность облигации уменьшается, как это можно увидеть из анализа однофакторной доходности [8]. Поэтому функция $B_D(\tau)$ должна быть отрицательной. Краткосрочная ставка доходности ранее была определена как $y(x) = x^T \phi$ и для нашего случая $y(r, D) = r\phi_r + D\phi_D$. Для того чтобы $y(r, D)$ уменьшалась с увеличением D , необходимо, чтобы $\phi_D < 0$. С учетом этого возникают ограничения на величину локальной по времени дисперсии краткосрочной процентной ставки, обеспечивающей положительную доходность: $D < |r\phi_r/\phi_D|$. Решения уравнения (13) оказываются монотонно убывающими функциями, при $\tau \rightarrow \infty$ достигающими предельного значения $B_D(\infty) < 0$. Это значение можно определить из уравнения (13), если учесть, что при $\tau \rightarrow \infty$ в левой части уравнения $B_D'(\tau) \rightarrow 0$.

$$B_D(\infty) = (-\psi + \sqrt{\psi^2 - 4\delta(\phi_r^2/k_r + 2\lambda_r\phi_r - \phi_D)})/2\delta.$$

Приближения $B_{Di}(\tau)$ имеют такие же свойства, что и $B_D(\tau)$, а их предельные значения обеспечивают равенство $B_D(\infty) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i B_{Di}(\infty)$. Из уравнений (14) следует, что предельные значения $B_{Di}(\infty)$ определяются по формулам

$$B_{D0}(\infty) = \frac{\phi_D}{k_D} - \frac{\phi_r^2}{k_D k_r} \equiv \Phi < 0, \quad B_{Di}(\infty) = a_i \left(-\frac{1}{k_D} \right)^i \Phi^{i+1}, \quad i \geq 1,$$

где коэффициенты a_i , $i \geq 1$, находятся также, как это делалось выше при анализе двухфакторной модели (2), (3). По аналогии с моделью (2), (3) для модели (12), (13) можно записать

$$B_D^{(j)}(\infty) = \Phi \sum_{i=0}^j a_i \left(-\frac{\delta\Phi}{k_D} \right)^i \quad \text{и} \quad |B_D^{(j)}(\tau) - B_D(\tau)| < \left| B_D(\infty) - \Phi \sum_{i=0}^j a_i \left(-\frac{\delta\Phi}{k_D} \right)^i \right|,$$

что определяет верхнюю границу погрешности приближения $B_D^{(j)}(\tau) = \sum_{i=0}^j \delta^i B_{Di}(\tau)$. Относительную погрешность приближения $B_D^{(j)}(\tau)$ определим, как делалось это выше: $(B_D^{(j)}(\tau) - B_D(\tau))/B_D(\tau)$. На рис. 3 эта относительная погрешность представлена для нулевого и первого приближения при следующих параметрах двухфакторной модели: $k_r = 0,1347$, $\theta = 0,0762$, $k_D = 0,1$, $V = 0,002892$, $S = 0,00001$, $x = 0$, $\lambda_r = \lambda_D = 0$, $\phi_r = 0,5$, $\phi_D = -0,5$.

На рис. 4 для этих же параметров для пяти начальных приближений представлены предельные при $\tau \rightarrow \infty$ относительные погрешности, которые определяют верхнюю границу относительной погрешности для всякого конечного τ . Из этого рисунка видно, что для заданных параметров приближения $B_D^{(j)}(\tau)$ довольно быстро сходятся к истинной функции $B_D(\tau)$.

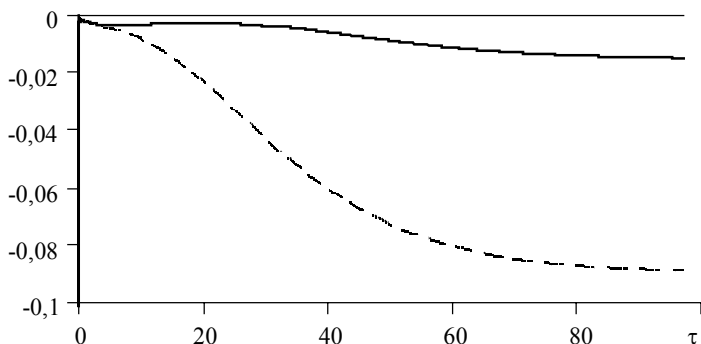


Рис. 3. Относительная погрешность нулевого (пунктир) и первого (сплошная линия) приближений

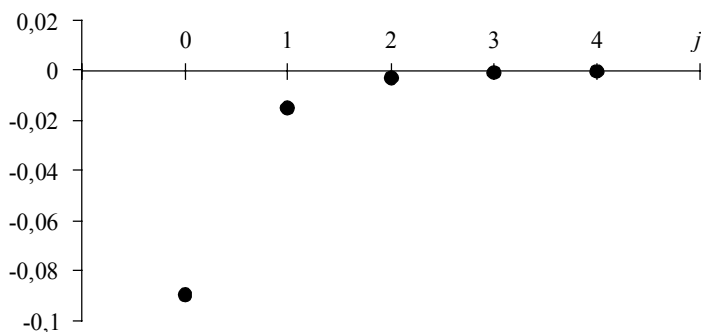


Рис. 4. Предельная относительная погрешность аппроксимации функции $B_D(\tau)$ как функция номера приближения j

Заключение

Однофакторная модель Даффи – Кана [8] может быть расширена на двухфакторный случай дополнением второй переменной состояния. В качестве возможных версий дополнительных переменных в статье рассмотрены локальный (по времени) средний уровень процентной ставки или ее мгновенная дисперсия. Получающиеся двухфакторные модели формулируются так, чтобы обеспечить аффинную временную структуру доходности. Рассмотрены способы определения функций временной структуры, для чего используется метод малого параметра. Исследуется точность аппроксимации полученных приближений. К сожалению, из-за ограниченного допустимого объема статьи не исследованы свойства кривых доходности и форвардных кривых двухфакторных моделей. Это будет сделано в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 1. Модель Васичека // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика 2012. № 1(18). С. 102–111.
2. Duffie D., Kan R. A Yield-Factor Model of Interest Rates // Mathematical Finance. 1996. V. 6. P. 379–406.
3. Chan K. C., Karolyi G. A., Longstaff F. A., Sanders A. S. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate // J. Finance. 1992. V. 47. P. 1209–1227.

4. Bali T. An empirical comparison of continuous time models of the short term interest rate // J. Futures Markets. 1999. V. 19. No. 7. P. 777 – 797.
5. Ahn D.-H., Gao B. A parametric nonlinear model of term structure dynamics // The Review of Financial Studies. 1999. V. 12. No. 4. 721–762.
6. Duffie D., Singleton K. J. An econometric model of the term structure of interest-rate swap yields // J. Finance. 1997. V. 52. P. 1287–1321.
7. Ait-Sahalia Y. Transition densities for interest rate and nonlinear diffusion // J. Finance. 1999. V. 54. P. 1361–1395.
8. Медведев Г.А. О временной структуре доходности. 3. Однофакторная модель Даффи – Кана // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3(20). С. 71–80.

Медведев Геннадий Алексеевич

Белорусский государственный университет (Минск)

E-mail: MedvedevGA@cosmostv.by

Поступила в редакцию 30 мая 2012 г.

Medvedev Gennady A. (Belarusian State University). On term structure of yield rates. 4. The Duffie – Kan two factor model.

Keywords: yield interest rates, affine model, functions of term structure, Duffie – Kan model, small parameter method.

Interest rate models in which the short-term rate is a unique state variable are usually considered. These models are attractive because the analytical decisions can be often got and a simple computing analysis can be done. However one-factor models have certain lacks. Basic of them consists in fact that all the term structure is determined by only the unique value of the short-term rate which is fixed at the initial moment of construction of term structure. And it seems to be unreasonable from the economic point of view. To avoid this lack authors suggest to use for modeling of dynamics of the interest rate more than one state variable. At transition from the unique factor to several there should be an improvement of approximation of term structure. In general the price for it is the loss of possibility of getting of analytical decisions, obtaining of the equations with partial derivatives with the raised dimension and difficulties in procedure of results obtaining.

In the paper the Duffie – Kan models, describing dynamics of the short-term interest rate in a case when the state of the financial market is characterized not only by level of the interest rate, but also by other parameter changing in time are investigated. There are considered two cases. In the first as an additional state variable is accepted local on time average value of the short-term interest rate. In the second case as an additional state variable the instant variance of the interest rate is accepted. Two-factor models are constructed so that they led to affine term structure of yield. The basic attention is given to definition of functions of term structure. As the equations for these functions do not suppose analytical decisions, it is proposed to find their approximations. In view of that in real cases the volatility is usually small, the method of small parameter of Poincare is used for this purpose.