

УДК 004.272:[519.87:519.248]

В.А. Павский, К.В. Павский**СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
СО СТРУКТУРНОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ¹**

В рамках теории массового обслуживания построена математическая модель функционирования вычислительных систем (ВС) со структурной избыточностью. Получены оценки показателей функционирования ВС (в частности, структурной избыточности). Предложены формулы для оценки вероятности нахождения ВС в состоянии низкой производительности в течение заданного промежутка времени. Решения найдены в аналитическом виде и могут быть использованы в инженерных расчетах.

Ключевые слова: *Распределенные вычислительные системы, структурная избыточность, математическая модель, оценки показателей, анализ.*

Трудности, возникающие при анализе надежности многомашинных вычислительных систем (ВС), связаны и с практической невозможностью получения аналитических формул, и с разумностью оценок показателей эффективности, зависящих от времени. Кроме того, для проведения анализа эффективности функционирования рабочих и проектируемых ВС недостаточно достоверной статистики [1]. Поэтому при построении математических моделей желательно минимизировать число параметров, зависящих от проблемной статистики. Современные ВС требуют создания сложных многопараметрических моделей, а это приводит к тому, что оценка меры адекватности модели становится трудновыполнимой. Построение же простых моделей приводит, скорее, к качественным, чем количественным оценкам функционирования систем. Следовательно, создание простых и эффективных математических моделей с параметрами, имеющими качественную или достоверную, потенциально возможную статистику, является актуальным.

Предлагается расчет и оценки показателей эффективности функционирования ВС со структурной избыточностью.

1. Объект исследования

Многомашинные вычислительные системы, состоящие из N достаточно высоконадежных элементарных машин (ЭМ), из которых структурную избыточность составляют n ЭМ, при относительно быстрой замене отказавших ЭМ машинами из структурной избыточности позволяют поддерживать необходимую производительность в течение длительного промежутка времени. Это означает, что пока множество ЭМ, составляющих структурную избыточность, не пустое, считается, что ВС имеет высокую производительность, иначе она переходит в состояние низкой производительности. Это условие позволяет получить дополнительную

¹ Работа выполнена в рамках интеграционного проекта №39 СО РАН, при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант № НШ-2175.2012.9), РФФИ (грант №12-07-00145).

информацию относительно времени нахождения ВС в состоянии высокой производительности и, не усложняя модели, дать рекомендации относительно ее эффективности работы.

Итак, объектом исследования является структурная избыточность, исследованная состояния которой мы постараемся получить оценки для показателей, численно характеризующих функционирование данной ВС. Исследования будем проводить в рамках теории массового обслуживания [2–4].

2. Постановка задачи

Пусть ВС состоит из N ЭМ, n из них составляют структурную избыточность, а остальные $N - n$ образуют основную подсистему. Любая из ЭМ основной подсистемы может выйти из строя. Вышедшая из строя ЭМ меняется на одну из ЭМ структурной избыточности, а сама вместе с другими машинами, число которых не более чем $n - 1$, ждет завершения восстановления. Все восстановленные ЭМ возвращаются в вычислительную систему. Моменты завершения восстановления описываются пуассоновским процессом с параметром μ . Если из строя выходит очередная ЭМ, а структурная избыточность пуста, то ВС переходит из состояния высокой производительности в состояние низкой, то есть основная подсистема работает в пониженном режиме.

Построение модели основано на следующих допущениях: 1) $n < N$, ВС высокопроизводительная, моменты выхода из строя любой из ЭМ подчиняются экспоненциальному закону, то есть можно считать, что поток отказов генерируется бесконечным источником излучения, образуя пуассоновский процесс с интенсивностью $N \cdot \lambda$; 2) восстановление любого числа $1 \leq k \leq n$ ЭМ осуществляется в соответствии с экспоненциальным законом распределения с интенсивностью μ ; по окончании восстановления ЭМ считаются принадлежащими структурной избыточности. О терминологии: ЭМ – требование, а восстановление – обслуживание. Требуется найти следующие показатели эффективности функционирования ВС:

$p_{\text{отк}}$ – вероятность того, что ВС находится в состоянии низкой производительности;

$k_{\text{ср}}$ – среднее число ЭМ, составляющих структурную избыточность;

$F(\tau)$ – вероятность того, что ВС в состоянии низкой производительности и будет находиться в нем в течение времени не меньшем τ , $\tau \in [0, \infty)$.

Математическая модель структурной избыточности. На систему массового обслуживания (СМО) поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью $N \cdot \lambda$. Требование, поступившее в СМО, вместе с другими $0 < k < n$ требованиями, ждет начала обслуживания. Если в системе уже находится n требований, то поступившее новое требование не обслуживается. Через некоторое время начинается обслуживание сразу всех $k + 1$ требований. Время обслуживания – случайная величина, подчиняющаяся экспоненциальному распределению с интенсивностью μ . Требуется вычислить $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t в СМО находится k требований, $t \in [0, \infty)$, $k = 0, 1, \dots, n$, и провести анализ функционирования ВС.

Система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} P_0'(t) = -N \cdot \lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t), \\ P_k'(t) = -(N \cdot \lambda + \mu) \cdot P_k(t) + N \cdot \lambda \cdot P_{k+1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ P_n'(t) = -\mu \cdot P_n(t) + N \cdot \lambda \cdot P_{n-1}(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad 0 < k \leq n \quad (2)$$

и условием нормировки

$$\sum_{k=0}^n P_k(\tau) = 1, \quad \forall \tau \in [0, \infty). \quad (3)$$

Преобразуем последнее уравнение системы (1) с учетом условия (3):

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -(N\lambda + \mu) \cdot P_0(t) + \mu.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях (2) записывается в виде

$$P_0(t) = \frac{\mu}{N \cdot \lambda + \mu} + \frac{N \cdot \lambda}{N \cdot \lambda + \mu} \cdot e^{-(N \cdot \lambda + \mu)t}. \quad (4)$$

Для произвольного k имеем

$$P_k(t) = \frac{(N\lambda)^k \mu}{(N\lambda + \mu)^{k+1}} - \frac{(N\lambda)^k \mu}{(N\lambda + \mu)^{k+1}} e^{-(N\lambda + \mu)t} + e^{-(N\lambda + \mu)t} \left(\frac{(N\lambda)^{k+1} t^k}{k! (N\lambda + \mu)} - (N\lambda)^k \mu \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^r}{r! (N\lambda + \mu)^{k-r+1}} \right). \quad (5)$$

Аналогично, при $k = n$ получаем, что

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{(N\lambda)^n}{(N\lambda + \mu)^n} + \frac{\mu(N\lambda)^{n-1}}{(N\lambda + \mu)^n} e^{-(N\lambda + \mu)t} - \\ &- \frac{(N\lambda)^n}{(n-1)!(N\lambda + \mu)} e^{-(N\lambda + \mu)t} \left(t^{n-1} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{(N\lambda)^k (n-k-1)!} \right) + \\ &+ (N\lambda)^{n-1} \mu e^{-(N\lambda + \mu)t} \sum_{r=1}^{n-2} \frac{t^r}{r! (N\lambda + \mu)^{n-r}} + \\ &+ (N\lambda)^{n-1} \mu e^{-((N-n)\lambda + \mu)t} \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{k=1}^r \frac{t^{r-k}}{(N\lambda)^k \cdot (N\lambda + \mu)^{n-r} \cdot (r-k)!}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение (4) – (6) уравнений системы (1) позволяет оценить скорость вхождения ВС в стационарный режим.

Если система функционирует достаточно долго, то для вероятностей $P_k(t)$ достаточно иметь решение для стационарного режима $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$, тогда решение системы (1) примет вид

$$p_0 = \frac{\mu}{N \cdot \lambda + \mu}, \quad p_k = \frac{\mu \cdot (N \cdot \lambda)^k}{(N \cdot \lambda + \mu)^{k+1}}, \quad p_n = \left(\frac{N \cdot \lambda}{N \cdot \lambda + \mu} \right)^n. \quad (7)$$

В соответствии с определением, данным в п.1, отсутствие ЭМ в структурной избыточности равносильно нахождению ВС в состоянии низкой производительности, вероятность попадания в которое

$$p_{\text{отк}} = p_n = \left(\frac{N \cdot \lambda}{\mu + N \cdot \lambda} \right)^n. \quad (8)$$

Зададим доверительную вероятность γ того, что ВС находится в состоянии высокой производительности. Замечая, что $1 - \gamma$ есть вероятность нахождения ВС в состоянии низкой производительности, после логарифмирования (8), с учетом того, что $p_{\text{отк}} = 1 - \gamma$, находим

$$k_{\text{ср}} = \left\lceil \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln N \lambda - \ln(N \cdot \lambda + \mu)} \right\rceil + 1,$$

где $[x]$ – целая часть числа.

В табл. 1 приведены значения среднего числа ЭМ, составляющих структурную избыточность от числа ЭМ в ВС при заданной надежности.

Таблица 1

а) $1 - \gamma = 0,01$; $\mu = 2.5$				б) $1 - \gamma = 0,05$; $\mu = 2.5$			
$\lambda \backslash N$	10^3	10^4	10^5	$\lambda \backslash N$	10^3	10^4	10^5
10^{-3}	5	22	188	10^{-3}	4	15	123
10^{-4}	3	5	22	10^{-4}	2	4	15

Из таблиц следует, что, например (табл. 1, б), при числе ЭМ в ВС $< 10^5$ структурная избыточность не превышает 0,15 % от общего числа ЭМ в ВС и $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч.

3. Оценка функции $F(\tau)$

На основании построенной математической модели структурной избыточности найдем функцию $F(\tau)$. Пусть ВС находится в состоянии низкой производительности, тогда восстановления ожидают не менее чем n ЭМ.

Поскольку отказы машин не зависят от того, в каком из двух состояний находится ВС, то, учитывая, что

$$p_n = \left(\frac{N \lambda}{N \lambda + \mu} \right)^n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu}{N \lambda + \mu} \cdot \left(\frac{N \lambda}{N \lambda + \mu} \right)^k,$$

обозначим $p_k^* = \frac{\mu}{N \lambda + \mu} \cdot \left(\frac{N \lambda}{N \lambda + \mu} \right)^k$, где p_k^* – вероятность того, что ожидают восстановления k ЭМ. Таким образом, для $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ $p_k^* = p_k$, а $\sum_{k=0}^{k=\infty} p_k^* = 1$.

Пусть ξ – случайная величина, означающая, что ВС в состоянии низкой производительности и будет находиться в нем в течение времени τ . Найдем

$P\{\xi \geq \tau\}$. Так как восстановление любого числа k из $m = n+k$ ЭМ оставляет ВС в состоянии низкой производительности, то

$$P\{\xi \geq \tau\} = \sum_{k=n}^m p_k^* \cdot P_k\{\xi \geq \tau\}, \quad (9)$$

где $P_k\{\xi \geq \tau\}$ – вероятность того, что за время τ восстановлено k ЭМ, а m ($n < m < N$) – число, используемое при оценке погрешности функции $F(\tau)$.

Поскольку в стационарном режиме поток восстановления ЭМ простейший [2, 5, 6], то

$$P_k\{\xi \geq \tau\} = \sum_{s=0}^{k-n} \frac{(\mu\tau)^s}{s!} \cdot \exp(-\mu\tau). \quad (10)$$

Подставляя в (9) правые части соответствующих вероятностей, получим, что

$$P\{\xi \geq \tau\} = \sum_{k=n}^m \frac{\mu}{N\lambda + \mu} \cdot \left(\frac{N\lambda}{N\lambda + \mu} \right)^k \cdot \sum_{s=0}^{k-n} \frac{(\mu\tau)^s}{s!} \cdot \exp(-\mu\tau). \quad (11)$$

По предположению, $n \ll N$, поэтому, считая, что $N \rightarrow \infty$ и тем самым $m \rightarrow \infty$, положим, по определению,

$$F(\tau) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mu}{N\lambda + \mu} \cdot \left(\frac{N\lambda}{N\lambda + \mu} \right)^k \cdot \sum_{s=0}^{k-n} \frac{(\mu\tau)^s}{s!} \cdot \exp(-\mu\tau).$$

Пусть $k - n = i$, тогда, после упрощений,

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \exp(-\mu\tau) \left(\frac{N\lambda}{N\lambda + \mu} \right)^n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu}{N\lambda + \mu} \left(\frac{N\lambda}{N\lambda + \mu} \right)^i \cdot \sum_{s=0}^i \frac{(\mu\tau)^s}{s!} = \\ &= p_{\text{отк}} e^{-\mu\tau} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu\tau)^s}{s!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu}{N\lambda + \mu} \left(\frac{N\lambda}{N\lambda + \mu} \right)^{i+s} = \\ &= \exp(-\mu\tau) \cdot p_{\text{отк}} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(N\lambda\mu\tau / (N\lambda + \mu))^s}{s!} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p_i^*. \end{aligned}$$

Учитывая, что сумма ряда равна $\exp(N\lambda\mu\tau / (N\lambda + \mu))$, $p_0 = p_0^* = \mu / (N\lambda + \mu)$ и $\sum_{i=0}^{i=\infty} p_i^* = 1$, окончательно получим

$$F(\tau) = p_{\text{отк}} \cdot \exp(-p_0\mu\tau). \quad (12)$$

Рис. 1 иллюстрирует зависимость функции $F(\tau)$ от времени τ , при $N = 2 \cdot 10^4$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $\mu = 2,5$ 1/ч, $n = 1, 2, 4$.

Из рисунка следует, что число n ЭМ, составляющих структурную избыточность, достаточно мало по сравнению с числом N ЭМ в ВС и вполне сравнимо с полученными данными табл. 1. Время выхода ВС из состояния низкой производительности при $n = 3,4$ $\tau \leq 2$ ч, что вполне адекватно возможности восстанавливающей системы.

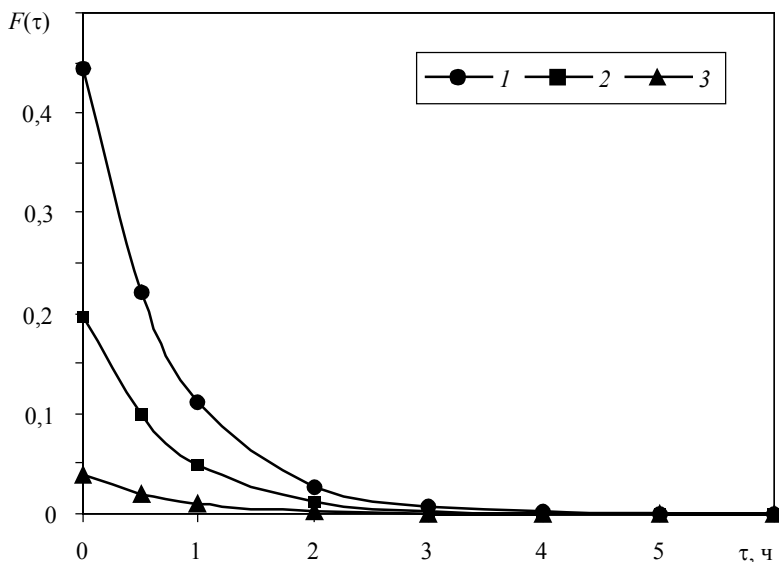


Рис. 1. Зависимость функции $F(\tau)$ от времени τ , $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $\mu = 2.5$ 1/ч :
1 – $n = 1$; 2 – $n = 2$; 3 – $n = 4$

Учитывая (11), будем иметь оценку погрешности $\Delta(\tau, m)$ для функции (12)

$$\Delta(\tau, m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu}{N\lambda + \mu} \cdot \left(\frac{N\lambda}{N\lambda + \mu} \right)^k \cdot \sum_{s=0}^{k-n} \frac{(\mu\tau)^s}{s!} \cdot \exp(-\mu\tau).$$

После элементарных преобразований, аналогичных выводу функции (12), получим

$$\Delta(\tau, m) = (N\lambda / (N\lambda + \mu))^{m-n+1} F(\tau).$$

Пример 1. При числовых значениях параметров рис.1 ($n = 4$) и уже при $m = 10$ имеем $\Delta(\tau, m) < 0,0035 \cdot F(\tau)$.

Показатель эффективности (12) важен не только простотой, но и содержащимися в нем параметрами n и μ , которые позволяют оценить качественную и дать количественную оценку функционированию ВС со структурной избыточностью и «живучих» [1], избегая при этом громоздких, хотя, может быть, и более точных формул, значение которых, скорее всего, находится численными методами. Например, если задать $\mu = \mu(\lambda)$, то есть расширить возможности восстанавливающей системы, то можно показать, насколько существенно уменьшается время выхода ВС из состояния низкой производительности.

В самом деле, вернемся к формуле (12). При увеличении n вероятность перехода ВС в состояние низкой производительности уменьшается. С другой стороны, если она в него вошла, то время выхода ВС из этого состояния не будет зависеть от n , то есть в этом случае модель бессильна.

Попробуем извлечь пользу из второго сомножителя правой части формулы (12). Пусть A – событие, состоящее в том, что ВС вошла в состояние низкой производительности, тогда $P\{A\} = p_{\text{отк}}$. Рассмотрим условную вероятность

$P\{\xi \geq \tau / A\}$. По определению

$$P\{\xi \geq \tau / A\} = \frac{P\{A \cap (\xi \geq \tau)\}}{P\{A\}}.$$

Но $P\{A \cap (\xi \geq \tau)\} = F(\tau)$, тогда

$$P\{\xi \geq \tau / A\} = \exp(-(p_0 \mu \tau)). \quad (13)$$

Найдем промежуток времени τ , за которое ВС выйдет из состояния низкой производительности. Зададим доверительную вероятность γ ; логарифмируя (13), получим $\tau = t_{\text{ср}} \ln(1 - \gamma) / p_0$, где $t_{\text{ср}} = 1/\mu$.

Пример 2. Пусть $\gamma = 0,95$, тогда при числовых значениях параметров рис.1 ($n = 4$) имеем $\tau \approx 2$ ч; для $\mu = 10$ ч, $\tau \approx 21$ мин.

Заключение

Подобные математические модели практически не рассматриваются в классической теории массового обслуживания, поскольку они не полны, однако и не противоречивы, и в состоянии описать, в некотором смысле, более широкий класс систем. Авторы работы постарались построить такую математическую модель, чтобы решения находились в аналитическом виде и соответствовали требованиям поставленной задачи. В работе получено решение системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний структурной избыточности. Это позволяет стандартными методами найти моменты, другие числовые характеристики. Предложены формулы для оценки вероятности нахождения ВС в состоянии низкой производительности в течение заданного времени. Найдена зависимость числа машин структурной избыточности от вероятности невыхода системы на высокий уровень производительности в течение заданного времени. Получена оценка погрешности этой вероятности. Решения найдены в аналитическом виде. Формулы могут быть использованы при экспресс-анализе функционирования распределенных вычислительных систем со структурной избыточностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошевский В.Г. Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 520 с.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2005. 400 с.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. 600 с.
4. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 3-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 520 с.
5. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления / под ред. Ю.К. Беляева. М.: Сов. радио, 1967. 312 с.
6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1966. 432 с.

Павский Валерий Алексеевич

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности

Павский Кирилл Валерьевич

Сибирский государственный университет телекоммуникаций
и информатики (Новосибирск)

E-mail: pavva46@mail.ru; pkv@isp.nsc.ru

Поступила в редакцию 6 июля 2012 г.

Pavsky Valery A. (Kemerovo Institute of Food Science and Technology), *Pavsky Kirill V.* (Siberian state university for telecommunication and information sciences). **Stochastic model and indices estimations of functioning distributed computer systems with structural redundancy.**

Keywords: distributed computer systems, structural redundancy, mathematical model, estimations of indices, analysis.

The mathematical model of functioning of distributed computer systems (CS) with structural redundancy is constructed by using apparatus of queueing theory. The indices estimations of functioning CS (in particular structural redundancy) are obtained. The formulas for probability estimation of being of CS in a state of low productivity during time are proposed. Decisions are found in an analytical form.