

УДК 519.6

Б.М. Шумилов, А.Ж. Кудуев

**НОВЫЙ ТИП МУЛЬТИВЕЙВЛЕТОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ,
ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНАМ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ¹**

Для случая эрмитовых сплайнов пятой степени исследован новый метод построения системы базисных сплайн-мультивейвлетов, использующий условия ортогональности многочленам пятой степени. Рассмотрены варианты построения и обращения блока фильтров. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: эрмитовы сплайны пятой степени, мультивейвлеты, ортогональность многочленам.

Вейвлетами называются короткие или быстро затухающие волновые функции (всплески), такие, что множество их двоичных сжатий и двоично-рациональных сдвигов в совокупности образует базис пространства $L^2(R)$ [1–3]. В случае, если волновых функций несколько, они образуют ряд мультивейвлетов [4–8]. Одно из основных преимуществ мультивейвлетов над единичными вейвлетами состоит в том, что они ортогональны многочленам одной и той же степени при меньшей длине носителя. Например, мультивейвлеты пятой степени имеют носитель $[0, 3]$, который значительно меньше носителя $[0, 11]$ единичных вейвлетов пятой степени. В работе [9] были построены мультивейвлеты пятой степени, вторые производные которых ортогональны вторым производным базисных эрмитовых сплайнов пятой степени. Данные мультивейвлеты имеют носитель $[0, 2]$. При численном решении дифференциальных уравнений по способу Галеркина это увеличивает разреженность решаемых систем. Недостаток состоит в том, что они ортогональны многочленам не выше первой степени, что ухудшает сжатие числовых данных по сравнению с обычными вейвлетами и мультивейвлетами. В данной работе, используя подход [10], построим базисные мультивейвлеты пятой степени с носителями $[0, 2]$, которые ортогональны любым многочленам пятой степени.

**1. Построение системы базисных сплайн-мультивейвлетов
на конечном отрезке**

Исходным для построения вейвлет-преобразования является наличие набора вложенных пространств $\dots V_{L-1} \subset V_L \subset V_{L+1} \dots$. В данном случае пространство V_L является пространством сплайнов степени 5 гладкости C^2 на отрезке $[a, b]$ с равномерной сеткой узлов $\Delta^L: x_i = a + (b - a) i / 2^L, i = 0, 1, \dots, 2^L, L \geq 0$, и базисными функциями $N_{i,k}^L(x) = \varphi_k(v - i), k = 0, 1, 2 \forall i$, где $v = 2^L(x - a)/(b - a) + 1$, с центрами в целых числах, порожденными сжатиями и сдвигами трех масштабирующих функций вида [11] (рис. 1)

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-90915 мол_снг_нр

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} t^3(6t^2 - 15t + 10) \\ -t^3(3t^2 - 7t + 4) \\ \frac{t^3}{2}(t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 0 \leq t \leq 1; \begin{bmatrix} (2-t)^3(6t^2 - 9t + 4) \\ (2-t)^3(3t^2 - 5t + 2) \\ \frac{(2-t)^3}{2}(t^2 - 2t + 1) \end{bmatrix}, 1 \leq t \leq 2 \right\},$$

$$\varphi_k(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad t \notin [0, 2].$$

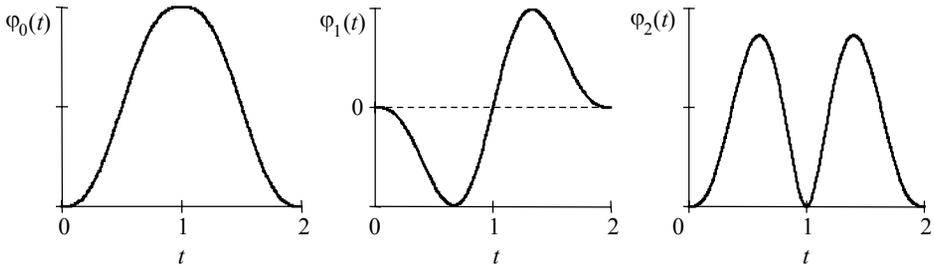


Рис. 1. Графики масштабирующих функций $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

Поскольку сетка Δ^{L-1} , $L \geq 1$, получается из сетки Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то базисными функциями для V_{L-1} будут функции $N_{i,k}^{L-1}(x)$, с носителями в два раза большими по ширине и центрами в четных целых числах. В соответствии с масштабными соотношениями [12]

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^2 H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t-k) \\ \varphi_1(2t-k) \\ \varphi_2(2t-k) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $H_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{15}{16} & 0 \\ -\frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$, $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{15}{16} & 0 \\ \frac{5}{32} & -\frac{7}{32} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{64} & -\frac{1}{16} \end{bmatrix}$,

каждую широкую базисную функцию внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а по краям отрезка из двух троек узких базисных функций. Обратное, очевидно, возможно только приближенно. Остается некоторое пространство W_{L-1} , содержащее уточняющие подробности, которые и позволяют восстановить V_L из V_{L-1} : $V_L = V_{L-1} + W_{L-1}$. Следующим этапом является определение вейвлетов как базиса W_{L-1} . В классической теории вейвлетов базисные функции W_{L-1} ортогональны всем базисным сплайнам на прореженной сетке Δ^{L-1} по отношению к некоторому скалярному произведению. Это означает, что пространство V_L представляет прямую сумму V_{L-1} и W_{L-1} : $V_L = V_{L-1} \oplus W_{L-1}$.

В отличие от этого будем искать базисные функции пространства W_L как линейные комбинации базисных эрмитовых сплайнов на сетке Δ^{L+1} , удовлетворяющих условиям ортогональности всем многочленам шестого порядка, то есть

$$\int_a^b M_{i,k}^L(x) x^m dx = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad \forall i (m = 0, 1, \dots, 5). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть

$$\begin{aligned} M_{1,0}^0(x) &= M_0(v), M_{1,1}^0(x) = M_1(v), M_{1,2}^0(x) = M_2(v), \\ M_{1,0}^L(x) &= w_0(v), M_{1,1}^L(x) = w_1(v), M_{1,2}^L(x) = w_2(v), \\ M_{2^L,0}^L(x) &= w_0(2^L - v), M_{2^L,1}^L(x) = -w_1(2^L - v), M_{2^L,2}^L(x) = w_2(2^L - v), L \geq 1, \\ M_{i,0}^L(x) &= \psi_0(v + 3/2 - i), M_{i,1}^L(x) = \psi_1(v + 3/2 - i), M_{i,2}^L(x) = \psi_2(v + 3/2 - i), \\ & i = 2, 3, \dots, 2^L - 1, L \geq 2, \end{aligned}$$

где $v = 2^L(x - a)/(b - a)$, и

$$\begin{aligned} M_0(t) &= \varphi_0(2t) - 4\varphi_0(2t+1) - 4\varphi_0(2t-1) + \\ &+ 84(\varphi_1(2t+1) - \varphi_1(2t-1)) - 828(\varphi_2(2t+1) + \varphi_2(2t-1)), \\ M_1(t) &= 35\varphi_1(2t) - 200(\varphi_1(2t+1) + \varphi_1(2t-1)) + \\ &+ 8\varphi_0(2t+1) - 8\varphi_0(2t-1) + 2280(\varphi_2(2t+1) - \varphi_2(2t-1)), \\ M_2(t) &= 35\varphi_2(2t) - 251(\varphi_2(2t+1) + \varphi_2(2t-1)) - \varphi_0(2t+1) - \\ &- \varphi_0(2t-1) + 23(\varphi_1(2t+1) - \varphi_1(2t-1)), \\ w_0(t) &= 1296\varphi_0(2t+1) + (7990\varphi_0(2t) - 538\varphi_0(2t-1) - 41545\varphi_1(2t) - \\ &- 41140\varphi_1(2t-1) - 924040\varphi_2(2t) + 438040\varphi_2(2t-1)), \\ w_1(t) &= 432\varphi_1(2t+1) + (283\varphi_0(2t) - 12\varphi_0(2t-1) - 1161\varphi_1(2t) - \\ &- 1288\varphi_1(2t-1) - 32372\varphi_2(2t) + 13520\varphi_2(2t-1)), \\ w_2(t) &= 2160\varphi_2(2t+1) + (77\varphi_0(2t) - 2\varphi_0(2t-1) - 245\varphi_1(2t) - \\ &- 320\varphi_1(2t-1) - 8900\varphi_2(2t) + 3320\varphi_2(2t-1)), \\ \psi_0(t) &= 164\varphi_0(2t) + (28\varphi_0(2t+1) + 28\varphi_0(2t-1) + 115\varphi_1(2t+1) - \\ &- 115\varphi_1(2t-1) - 13200\varphi_2(2t)), \\ \psi_1(t) &= 80\varphi_1(2t) + (-\varphi_0(2t+1) + \varphi_0(2t-1) + 37\varphi_1(2t+1) + \\ &+ 37\varphi_1(2t-1) + 412\varphi_2(2t+1) - 412\varphi_2(2t-1)), \\ \psi_2(t) &= 464\varphi_2(2t) + (-4\varphi_0(2t) - 11\varphi_1(2t+1) + 11\varphi_1(2t-1) - \\ &- 112\varphi_2(2t+1) - 112\varphi_2(2t-1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда система функций $\{M_{i,k}^L(x), i = 1, 2, \dots, 2^L; k = 0, 1, 2\}$, удовлетворяет условиям (2) и образует базис в пространстве W_L , $L \geq 0$.

Доказательство. Проверка условий ортогональности (2) выполняется непосредственным вычислением. Для установления базисности функций $M_{i,k}^L(x)$ в случае конечного отрезка достаточно их линейной независимости, вытекающей из того факта, что они представляют собой множество сдвигов ненулевых функций с компактными носителями. При этом их количество в точности равно разности

между размерностями пространств V_{L+1} и $V_L : 3 \cdot (2^{L+1} + 1) - 3 \cdot (2^L + 1) = 3 \cdot 2^L$.

Теорема 1 доказана.

Носители полученных функций равны носителям базисных сплайнов на сетке Δ^L (рис. 2).

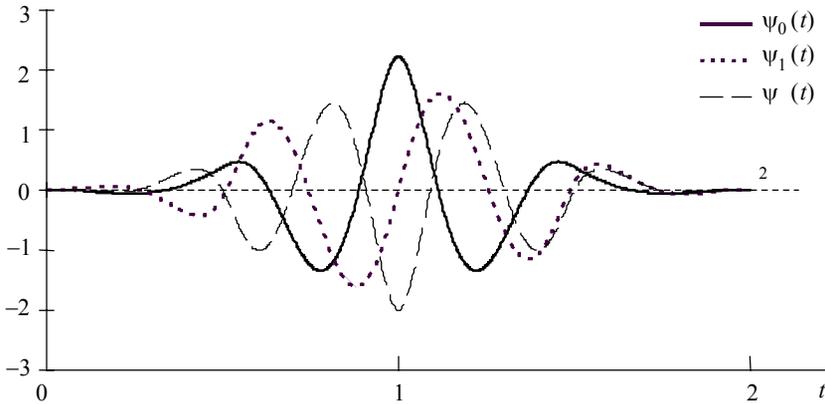


Рис. 2. Вид двух симметричных и одного антисимметричного «материнских» вейвлетов $\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t)$

2. Построение и обращение блока фильтров

На любой сетке $\Delta^L, L \geq 0$, интерполяционный эрмитов сплайн 5-й степени может быть представлен как

$$S^L(x) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,k} N_{i,k}^L(x), \quad a \leq x \leq b, \tag{4}$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}, k = 0, 1, 2$, являются значениями и соответственно первыми и вторыми производными аппроксимируемой функции в узлах сетки.

Если записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки

$$\varphi^L = [N_{0,0}^L, N_{0,1}^L, N_{0,2}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, \dots, N_{2^L,2}^L]$$

и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора

$$C^L = [C_0^{L,0}, C_0^{L,1}, C_0^{L,2}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, \dots, C_{2^L}^{L,2}]^T.$$

то уравнение (4) переписывается как $S^L(x) = \varphi^L(x)C^L$. Аналогично, запишем базисные вейвлет-функции на уровне разрешения L в виде матрицы-строки

$$\psi^L = [M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, M_{1,2}^L, \dots, M_{2^L,2}^L].$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты будем собирать в вектор

$$D^L = [D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, D_1^{L,2}, \dots, D_{2^L}^{L,2}]^T.$$

Тогда с использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^L из C^{L-1} и D^{L-1} может быть записан как [13]

$$C^L = [P^L | Q^L] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{32} & \frac{1}{64} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{32} & \frac{1}{64} \\ -\frac{15}{16} & -\frac{7}{32} & -\frac{1}{64} & \frac{15}{16} & -\frac{7}{32} & \frac{1}{64} \\ 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, Q^1 = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -1 \\ 84 & -200 & 23 \\ -828 & 2280 & -251 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \\ -4 & -8 & -1 \\ -84 & -200 & -23 \\ -828 & -2280 & -251 \end{bmatrix}.$$

Здесь многоточия обозначают повторяющиеся блоки матрицы P^3 . Блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов масштабных соотношений для эрмитовых сплайнов 5-й степени (1), тогда как блоки матрицы Q^L – из коэффициентов соотношений (3). Обратный процесс разбиения коэффициентов C^L на более грубую версию C^{L-1} и уточняющие коэффициенты D^{L-1} состоит в решении системы линейных уравнений (5). Разрешимость данной системы гарантирована линейной независимостью базисных функций. При этом для ускорения вычислений матрицу $[P^L | Q^L]$ можно сделать ленточной, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц P^L и Q^L перемежались (см. [13]).

Процедуру разбиения C^L на часть C^{L-1} , соответствующую низшему разрешению, и уточняющие коэффициенты D^{L-1} можно применить рекурсивно и к самой этой части C^{L-1} . Следовательно, исходные коэффициенты можно представить в виде иерархии грубых версий с разрешениями C^0, C^1, \dots, C^{L-1} и уточняющих деталей D^0, D^1, \dots, D^{L-1} . Результирующее вейвлет-разложение эрмитового сплайна 5-й степени $S^L(x)$ может быть записано в виде

$$S^L(x) = \sum_{k=0}^2 \left(\sum_{i=0}^1 C_i^{0,k} N_{i,k}^0(x) + \sum_{j=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{2^j} D_i^{j,k} M_{i,k}^j(x) \right), \quad a \leq x \leq b.$$

При этом по величине вейвлет-коэффициентов $D^j, j = 0, 1, \dots, L-1$, можно судить о значимости соответствующих уточняющих деталей. Незначимые убираются с целью сжатия информации.

3. Пример

Для $x \in [0, 1]$ положим

$$\psi_1^0(x) = \sqrt{231/272} M_{1,0}^0(x),$$

$$\psi_2^0(x) = 3/8 M_{1,1}^0(x),$$

$$\psi_3^0(x) = \sqrt{231/13} M_{1,2}^0(x),$$

и пусть
$$\psi_{i-2}^L(x) = \left(2^L 1695 / 30371 \right)^{1/2} / 1296 M_{i/3,0}^L(x),$$

$$\psi_{i-1}^L(x) = \left(2^L 4322 / 705 \right)^{1/2} / 432 M_{i/3,1}^L(x),$$

$$\psi_i^L(x) = \left(2^L 505979 / 208 \right)^{1/2} / 2160 M_{i/3,2}^L(x),$$

$$i = 3, 3 \cdot 2^L, L \geq 1;$$

$$\begin{aligned}\psi_{i-2}^L(x) &= \left(2^L 8733 / 1762\right)^{1/2} / 164 M_{i/3,0}^L(x), \\ \psi_{i-1}^L(x) &= \left(2^L 86625 / 716\right)^{1/2} / 80 M_{i/3,1}^L(x), \\ \psi_i^L(x) &= \left(2^L 1088893 / 20\right)^{1/2} / 464 M_{i/3,2}^L(x), \\ i &= 6, 9, \dots, 3 \cdot 2^L - 3, L \geq 2.\end{aligned}$$

Заметим, что $\psi_i^L(x)$ нормированы так, что $\|\psi_i^L(x)\|_{L_2(0,1)} = 1$ для $i = 1, 2, \dots, 3 \cdot 2^L$.

Рассмотрим в качестве тестовой функции многочлен пятой степени $f(x) = (1/2 - x)^5$ с числом разбиений $n = 2^5$ на интервале $0 \leq x \leq 1$, длина шага $\Delta x = 1/n$. Число используемых значений функции и двух производных на интервале при выполнении вейвлет-преобразования равно $3(n+1) = 99$.

Начиная с верхнего уровня разрешения $L = 5$, находим последовательно при

$L = 5$:

$$\begin{aligned}D^4 &= [0.08679; -0,1174; 0,03294; -0,005044; -0,002738; -0,002359; -0,002481; \\ &-0,001461; -0,001019; -0,001459; -0,0006021; -0,0006303; -0,0006729; \\ &-0,0001976; -0,0002875; -0,0002498; -3,499 \cdot 10^{-5}; -0,0001086; -5,528 \cdot 10^{-5}; \\ &2,879 \cdot 10^{-6}; -2,483 \cdot 10^{-5}; -2,848 \cdot 10^{-6}; 1,055 \cdot 10^{-6}; -1,689 \cdot 10^{-6}; 2,848 \cdot 10^{-6}; \\ &1,055 \cdot 10^{-6}; 1,689 \cdot 10^{-6}; 5,528 \cdot 10^{-5}; 2,879 \cdot 10^{-6}; 2,483 \cdot 10^{-5}; 0,0002498; \\ &-3,499 \cdot 10^{-5}; 0,0001086; 0,0006729; -0,0001976; 0,0002875; 0,001459; \\ &-0,0006021; 0,0006303; 0,002481; -0,001461; 0,001019; 0,005044; \\ &-0,002738; 0,002359; -0,08679; -0,1174; -0,03294]^T;\end{aligned}$$

$L = 4$:

$$\begin{aligned}D^3 &= [-0,07943; 0,1773; -0,09874; -0,00107; 0,00016; -0,0005311; -8,338 \cdot 10^{-5}; \\ &6,975 \cdot 10^{-5}; -3,565 \cdot 10^{-5}; -1,852 \cdot 10^{-5}; 1,135 \cdot 10^{-5}; -1,869 \cdot 10^{-5}; 1,852 \cdot 10^{-5}; \\ &1,135 \cdot 10^{-5}; 1,869 \cdot 10^{-5}; 8,338 \cdot 10^{-5}; 6,975 \cdot 10^{-5}; 3,565 \cdot 10^{-5}; 0,00107; 0,00016; \\ &0,0005311; 0,07943; 0,1773; 0,09874]^T;\end{aligned}$$

$L = 3$:

$$\begin{aligned}D^2 &= [-0,07274; 0,1526; -0,08045; -0,0002049; 1,391 \cdot 10^{-5}; -0,0001316; \\ &0,0002049; 1,391 \cdot 10^{-5}; 0,0001316; 0,07274; 0,1526; 0,08045]^T;\end{aligned}$$

$L = 2$:

$$D^1 = [-0,04817; 0,09931; -0,05134; 0,04817; 0,09931; 0,05134]^T;$$

$L = 1$: на последнем шаге остается шесть значений многочлена пятой степени и двух его производных в концах отрезка $C^0 = [0,05701; -0,3206; -0,858; -0,05701; -0,3206; -0,858]^T$, и в центре три вейвлет-коэффициента разложения функции и производных $D^0 = [4,653 \cdot 10^{-16}; -0,001413; -3,571 \cdot 10^{-16}]^T$.

После обнуления вейвлет-коэффициентов, по модулю меньших 0,032, остается 30 значений, что дает коэффициент сжатия $99/30 = 3,3$.

На рис. 3, 4 представлены результаты реконструкции значений сплайна $S^5(x)$ и двух его производных в узлах сетки $\Delta^5: y_i, y1_i, y2_i, i = 0, 1, \dots, 32$. Здесь сплошными линиями обозначаются исходная функция и ее производные: $f(x), f1(x), f2(x), 0 \leq x \leq 1$.

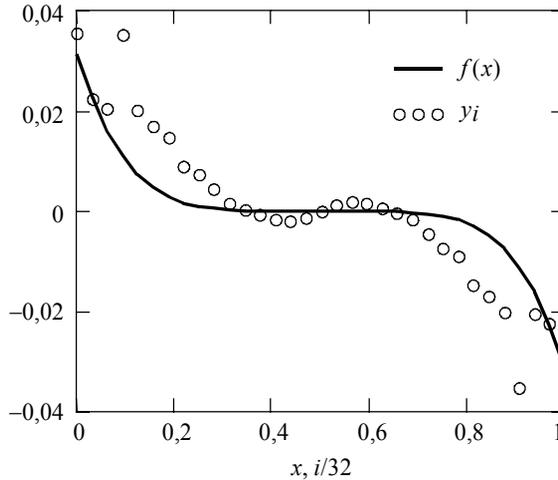


Рис. 3. Сравнение результатов вейвлет-реконструкций узловых значений сплайна 5-й степени для случая функции $f(x) = (1/2 - x)^5$

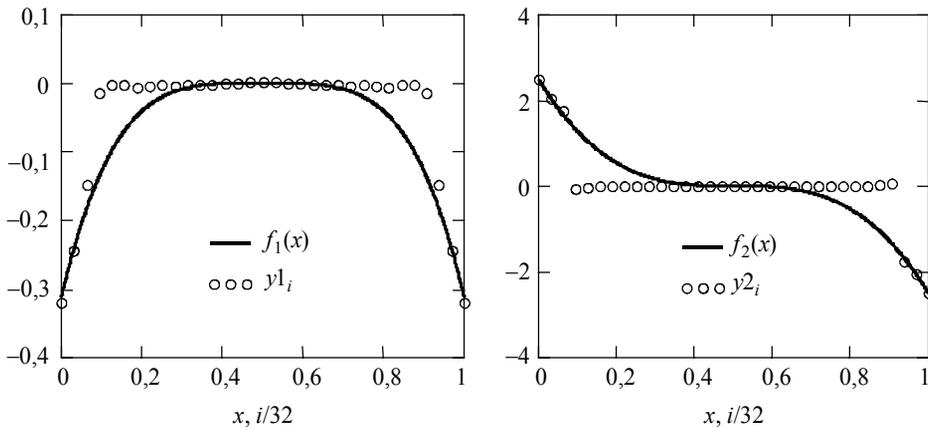


Рис. 4. Сравнение результатов вейвлет-реконструкций узловых значений производных сплайна 5-й степени для случая функции $f(x) = (1/2 - x)^5$

Заключение

В работе представлена схема построения эрмитовых сплайн-вейвлетов, ортогональных многочленам. Полученные результаты предоставляют широкие возможности для применения при оптимизации методов обработки численной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 332 с.
2. Чуи Ч. Введение в вейвлеты: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
3. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006. 616 с.

4. *Strela V.* Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform // Stud. Appl. Math. 1997. V. 98. Iss. 4. P. 335–354.
5. *Strela V., Heller P.N., Strang G., Topivala P., Heil C.* The application of multiwavelet filterbanks to image processing // IEEE Trans. Signal Processing. 1999. V. 8. No. 4. P. 548–563.
6. *Warming R., Beam R.* Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // SIAM J. Sci. Comp. 2000. V. 22. No. 1. P. 269–317.
7. *Dahmen W., Han B., Jia R.-Q., Kunoth A.* Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines // Constr. Approx. 2000. V. 16. P. 221–259.
8. *Han B.* Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets // J. Approxim. Theory. 2001. V. 110. P. 18–53.
9. *Турсунов Д.А., Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Турсунов Э.А.* Новый тип эрмитовых мультивейвлетов пятой степени // Пятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям / под ред. проф. А.В. Старченко. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2010. С. 101–105.
10. *Koro K., Ade K.* Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2001. V. 25. P. 149–164.
11. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
12. *Strang G., Strela V.* Short wavelets and matrix dilation equations // IEEE Trans. Signal Processing. 1995. V. 43. No. 1. P. 108–115.
13. *Столиц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с.

Шумилов Борис Михайлович

Томский государственный университет,

Кудуев Алтынбек Жалилбекович

Ошский государственный университет

E-mail: b_shumilov@math.tsu.ru, altun_12@rambler.ru

Поступила в редакцию 31 августа 2012 г.

Shumilov Boris M., Kuduev Altynbek Z. (Tomsk State University, Osh State University). **New type multiwavelets of the fifth degree orthogonal to quintic polynomials.**

Keywords: Hermitian splines of the fifth degree, multiwavelets, orthogonality to polynomials.

For the space of Hermitian splines of the fifth degree of a kind

$$S^L(x) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{2^L} C_i^{L,k} N_{i,k}^L(x), \quad a \leq x \leq b,$$

with a uniform grid of nodes $\Delta^L: u_i = a + (b - a) i / 2^L, i = 0, 1, \dots, 2^L, L \geq 0$, and the basic functions $N_{i,k}^{L(l)}(u_j) = \delta_i^j \cdot \delta_k^l, l = 0, 1, 2$, with the centers in integers, it is proposed to use as wavelets functions $M_{i,k}^L(x)$, satisfying the conditions of orthogonality to all polynomials of sixth order, i.e.

$\int_a^b M_{i,k}^L(x) x^m dx = 0, k = 0, 1, 2 \quad \forall i (m = 0, 1, \dots, 5)$. For the wavelets centered at even integers,

and the supports equal to the supports of basic splines on the grid Δ^L , received two-scale relations of expansion and formulas for calculating the coefficients in the thinned grid Δ^{L-1} from the spline coefficients in a dense grid Δ^L in the form of solution of linear algebraic equations system with band matrix. There are results of numerical experiments presented. Justified the improving of compression of numerical data in comparison with the known quintic wavelets and multiwavelets.