ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2008 Философия. Социология. Политология №1(2)

Бертран Рассел

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ*

Приложение B. Теория типов

§ 497. Формулировка теории

Теория типов предложена здесь предварительно, как возможное решение *Противоречия*; но, по всей вероятности, её требуется преобразовать в несколько более тонкую форму до того, как она сможет ответить на все затруднения. Однако, следует признать, она является первым шагом в направлении истины, поэтому в данном *Приложении* я постараюсь сформулировать её главные характеристики, а также некоторые проблемы, которые она не в состоянии решить.

Каждая пропозициональная функция $\phi(x)$ – как утверждалось – помимо области истинности, имеет, вдобавок, область значимости, т.е. область, в которой должен располагаться x, если $\phi(x)$ вообще должна быть пропозицией, истинной или ложной. Это – первое положение теории типов. Второе положение заключается в том, что области значимости образуют *типы*, т.е. если x принадлежит области значимости $\phi(x)$, тогда существует класс объектов (тип x), каждый из которых также должен принадлежать области значимости $\phi(x)$. Однако ϕ может варьироваться, и область значимости всегда является либо единственным типом, либо суммой нескольких целых [whole] типов. Второе положение менее точно, чем первое, и в случае числа вызывает затруднения; но в том, что следует далее, его важность и значение, я надеюсь, станет более ясным.

Элемент или *индивид* – это любой объект, который не является областью [range]. Это – низший тип объектов. Если такой объект – скажем, определённая точка в пространстве – встречается в пропозиции, всегда можно подставить любой другой индивид без утраты значимости. То, что в разделе VI мы называли классом как одно, есть индивид, если его члены являются индивидами; объекты повседневной жизни, люди, столы, стулья, яблоки и т.д. суть классы как одно. (Человек – это класс психических конституент, остальные – это классы материальных точек, возможно, с некоторым указанием на вторичные качества.) Эти объекты поэтому относятся к тому же самому типу, что и простые индивиды. Кажется, что все объекты, обозначенные одиночными словами, будь то вещи или понятия, относятся к этому типу. Так, например, отношения, которые встречаются в реальных реляционных пропозициях, относятся к тому же самому типу, что и вещи, хотя экстенсиональные отношения, которыми занимается символическая логика, имеют иной

* Перевод В.А. Суровцева по изданию: *Russell B*. Principles of Mathematics. London: Allen & Unwin LTD, 1974.

тип. (Интенсиональные отношения, встречающиеся в обычных реляционных пропозициях, не определены, когда заданы их объёмы, но экстенсиональные отношения символической логики представляют собой классы пар.) Индивиды – это единственные объекты, относительно которых не могут осмысленно утверждаться числа.

Следующий тип состоит из областей или классов индивидов. (Со словом *область* [range] не должна связываться никакая идея упорядочивания.) Так, «Браун и Джонс» есть объект этого типа, и он не создаст значимую пропозицию, если его подставить вместо «Браун» в любую истинную или ложную пропозицию, конституентой которой является Браун. (Это по-своему оправдывает грамматическое различие между единственным и множественным числом; но эта аналогия не слишком точна, поскольку область может состоять из одного или более элементов, и, где элементов много, область в определённых пропозициях может выглядеть как единичное.) Если *u* – это область, определённая пропозициональной функцией $\phi(x)$, то область не-*u* будет состоять из всех объектов, для которых $\phi(x)$ является ложной, так что не-*u* содержится в области значимости $\phi(x)$ и содержит только объекты того же самого типа, что и члены *u*. В этой связи есть затруднение, вырастающее из того факта, что две пропозициональные функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ могут иметь одну и ту же область истинности *u*, тогда как области их значимости могут быть различны; поэтому не-*u* становится неопределённой. Всегда будет существовать минимальный тип, в пределах которого содержится *u*, а не-*u* может быть определена как остаток этого типа. (Сумма двух или более типов есть тип; минимальный тип – это тип, который не является такой суммой.) С позиции *Противоречия* эта точка зрения кажется наилучшей; для не-*u* должна существовать область ложности «*x* является элементом *u*», а «*x* является элементом *x*» должно вообще быть бессмысленным; следовательно, «*x* является элементом *u*» должно требовать, чтобы *x* и *u* относились к различным типам. Сомнительно, можно ли обеспечить этот результат, если не ограничиваться в этой связи минимальными типами.

В необходимости отрицать, что смешанный класс (т.е. класс, не все члены которого относятся к одному и тому же минимальному типу) может относиться к тому же самому типу, что и один из его членов, есть неизбежный конфликт со здравым смыслом. Рассмотрим, например, такие фразы, как «Гейне и французы». Если это должно быть классом, состоящим из двух индивидов, то «французы» должно пониматься как «французская нация», т.е. класс как одно. Если мы говорим о французах как о многом, мы получаем класс, состоящий не из двух членов, но из членов на одного больше, чем существует французов. К возможности образовать класс, одним из членов которого будет Гейне, тогда как другим – французы как многое, я вернусь позднее; пока же достаточно отметить, что если бы такой класс существовал, он должен был бы, если нужно избежать *Противоречие*, относиться к типу, отличающемуся как от классов индивидов, так и от классов классов индивидов.

Следующий тип после классов индивидов состоит из класса классов индивидов. Такова, например, ассоциация клубов; члены таких ассоциаций, клубы, сами являются классами индивидов. Будет удобно говорить о *классах* только там, где у нас есть классы индивидов, о классах классов – только там, где у нас есть классы классов индивидов, и т.д. В качестве общего понятия я буду использовать слово область [range]. Поскольку область может быть образована из объектов любого заданного типа, а результатом будет область более высокого типа, чем его члены, то существует прогрессия таких типов.

Новый ряд типов начинается с осмысленной пары [the couple with sense]. Область таких типов – это то, что символическая логика трактует как отношение: это – экстенсиональный взгляд на отношения. Мы можем затем образовать область отношений, или отношений отношений, или отношений пар (таких как сечение в проективной геометрии[1]), или отношений индивидов к парам и т.д.; и на этом пути мы получаем не просто единственную прогрессию, но весь бесконечный ряд прогрессий. К тому же у нас есть типы, образованные из троек, которые являются членами трёхместных отношений, рассматриваемых экстенсионально как области; но некоторое число троек сводимо к предыдущим типам. Так, если $\phi(x, y, z)$ является пропозициональной функцией, то она могла бы быть произведением пропозиций $\phi_1(x) \, . \, \phi_2(y) \, . \, \phi_3(z)$, или произведением $\phi_1(x) \, . \, \phi_2(y, z)$, или пропозицией об x и паре (y, z) или же она могла бы быть проанализирована другими аналогичными способами. В этих случаях новый тип не возникает. Но если наша пропозиция не поддаётся анализу таким образом – и не видно априорной причины, почему это всегда должно быть так, – тогда мы получаем новый тип, а именно тройку. Мы можем образовать области троек, пар троек, троек троек, пары из троек и индивидов и т.д. Все они образуют новые типы. Таким образом, мы получаем неограниченную иерархию типов, и трудно удостовериться, сколько их может быть; но метод получения новых типов предполагает, что их общее число есть α_0 (число конечных целых чисел), поскольку полученный ряд более или менее похож на ряд рациональных чисел, упорядоченных так: 1, 2, ..., n, ..., 1/2, 1/3, ... $1/n$, ..., 2/3, ..., 2/5, ... $2 / (2n + 1)$, ... Это, однако, только предположение.

Каждый из перечисленных выше типов является *минимальным* типом; т.е. если $\phi(x)$ является пропозициональной функцией, значимой для одного значения x, принадлежащего к одному из вышеупомянутых типов, то $\phi(x)$ значима для каждого значения x, принадлежащего к упомянутому типу. Но, казалось бы, – хотя я в этом сомневаюсь – сумма любого числа минимальных типов является типом, т.е. областью значимости для некоторых пропозициональных функций. Является это повсеместно истинным или же нет, *все области* определённо образуют тип, так как каждая область имеет число; и это относится ко всем объектам, поскольку каждый объект тождествен самому себе.

Вне вышеупомянутого ряда типов находится тип пропозиций; и можно предположить, что с него можно было бы начать как с отправного пункта новой иерархии; но на этом пути есть некоторые затруднения, которые вызывают сомнения; можно ли пропозиции вообще рассматривать наподобие других объектов.

§ 498. Числа и пропозиции как типы

Числа также являются типом, находящимся вне вышеупомянутого ряда, и представляют некоторые затруднения, вследствие того факта, что каждое число отбирает определённые объекты из каждого другого типа областей, а именно, из тех областей, которые имеют заданное число членов. Это делает очевидное определение 0 ошибочным; ибо каждый тип области будет иметь свою собственную нуль-область, которая будет членом 0, рассматриваемого как область областей, так что мы не сможем сказать, что 0 – это область, единственным членом которой является *эта* нуль-область. К тому же числа требуют рассмотрения всей общности типов и областей; и в этом рассмотрении могут встречаться затруднения.

Поскольку все области имеют числа, области являются областью; следовательно, выражение $x \in x$ иногда значимо, и в этом случае значимо также и его отрицание. Следовательно, существует область w областей, для которых $x \in x$ ложно; таким образом, *Противоречие* доказывает, что эта область w не принадлежит области значимости $x \in x$. Можно видеть, что $x \in x$ может быть значимо только тогда, когда x относится к типу бесконечного порядка, поскольку область u в $x \in u$ всегда должна относиться к типу на один выше, чем x; но область всех областей, конечно, относится к типу бесконечного порядка.

Поскольку числа являются типом, пропозициональная функция «x не является элементом u», где u – это область чисел, должна означать «x – это число, которое не является элементом u»; даже если не избегать этого несколько парадоксального результата, мы говорим, что, хотя числа являются типом в отношении некоторых пропозиций, они не являются типом в отношении таких пропозиций, как «u содержится в v» или «x является элементом u». Такая точка зрения вполне разумна, хотя она и ведёт к осложнениям, которым едва ли виден конец.

То, что пропозиции являются типом, следует из факта – если это можно назвать фактом – что только о пропозициях можно значимо говорить как об истинных или ложных. Конечно, истинные пропозиции, по-видимому, образуют тип, поскольку утверждаются они одни (ср. *Приложение A*, § 479). Но если это так, число пропозиций столь же большое, как и число всех объектов, поскольку каждый объект тождествен самому себе, а «x тождественен x» имеет одно-однозначное отношение к x. В этом, однако, содержится два затруднения. Во-первых, то, что мы называли, пропозициональным концептом [propositional concept], по-видимому, всегда является индивидом; следовательно, пропозиций должно быть не больше, чем индивидов. Во-вторых, если возможно, как это, по-видимому, и есть, образовать области пропозиций, таких областей должно быть больше, чем существует пропозиций, хотя такие области суть лишь некоторые из объектов (ср. § 343). Эти два затруднения весьма серьёзны и требуют подробного обсуждения.

§ 499. Являются ли пропозициональные концепты индивидами?

Первый пункт можно проиллюстрировать несколько более простыми положениями. Как мы знаем, классов существует больше, чем индивидов; но предикаты являются индивидами. Следовательно, не все классы имеют определяющие предикаты. Этот результат, который также выводим из *Противоречия*, показывает, насколько необходимо отличать классы от предикатов и твердо придерживаться экстенсионального взгляда на классы. Подобным же образом существует больше областей пар, чем имеется пар, а поэтому больше, чем имеется индивидов; но глаголы, которые выражают отношения интенсионально, являются индивидами. Следовательно, не каждая область пар образует объём некоторого глагола, хотя каждая такая область образует объём некоторой пропозициональной функции, содержащей две переменных. Поэтому, хотя глаголы существенны для логического генезиса таких пропозициональных функций, интенсиональная точка зрения неадекватна для того, чтобы задать все объекты, которые символическая логика рассматривает как отношения.

В случае пропозиций, кажется, как если бы всегда существовало соответствующее существительное, являющееся индивидом. У нас есть «x тождественно x» и «самотождественность x», «x отличается от y», «различие x и y» и т.д. Существительное, представляющее собой то, что мы называли пропозициональным концептом, при критическом рассмотрении кажется индивидом; но это невозможно, ибо «самотождественность x» имеет столько много значений, сколько существует объектов, а поэтому больше значений, чем существует индивидов. Это следует из факта, что существуют пропозиции, описывающие каждый мыслимый объект, и определение тождества показывает (§ 26), что каждый объект, относительно которого существуют пропозиции, тождествен самому себе. Единственный метод уклониться от этого затруднения состоит в том, чтобы отрицать, что пропозициональные концепты являются индивидами; и это, по-видимому, направление, в котором следует идти. Неоспоримо, однако, что пропозициональный концепт и цвет являются двумя объектами; следовательно, мы должны будем допустить, что возможно образовать смешанные области, не все члены которых относятся к одному и тому же типу, но такие области всегда будут относиться к типу, отличному от того, что мы можем назвать чистыми областями, т.е. такими областями, которые содержат члены только одного типа. Фактически пропозициональные концепты, по-видимому, являются ничем иным, нежели самими пропозициями, различие, что *мы* не утверждаем пропозицию в одном случае, но утверждаем в другом, является чисто психологическим.

§ 500. Противоречие, вырастающее из вопроса, существует ли классов пропозиций больше, чем пропозиций

Второй пункт предоставляет больше затруднений. Мы не можем отрицать, что существуют области пропозиций, ибо мы часто хотим утверждать логическое произведение таких областей; однако мы не можем признать, что областей существует больше, чем пропозиций. На первый взгляд, можно подумать, что затруднение разрешается тем фактом, что существует пропозиция, связанная с каждой областью пропозиций, не являющейся нулевой, а именно, логическое произведение пропозиций из этой области[2]; но это не уничтожает доказательство Кантора, что область имеет больше подобластей, нежели членов. Применим это доказательство, предполагая особое одно-однозначное отношение, которое соотносит каждую пропозицию p, не являющуюся логическим произведением, с областью, единственным членом которой является p, и одновременно оно соотносит произведение всех пропозиций с нуль-областью пропозиций и соотносит каждое другое логическое произведение с областью своих собственных составных элементов. Тогда область w, которая, согласно общему принципу доказательства Кантора, не соотнесена с какой-либо пропозицией, является областью пропозиций, представляющей собой логическое произведение, но не является составным элементом самой себя. Но по определению отношения соотнесения область w должна быть соотнесена с логическим произведением w. Таким образом, обнаруживается, что вновь возникает старое противоречие; ибо мы можем доказать, что логическое произведение w как является, так и не является членом w. Это, по-видимому, показывает, что такой области, как w, не существует; но теория типов не показывает, почему такой области не существует. Отсюда, по-видимому, следует, что *Противоречие* для своего решения требует дальнейших уточнений; но что это за уточнения, я пока не представляю.

Сформулируем это новое противоречие более полно. Если m является классом пропозиций, пропозиция «каждая m является истинной» может или не может само быть m. Но существует одно-однозначное отношение этой пропозиции к m; если n отличается от m, то «каждая n является истинной» отличается от пропозиции «каждая m является истинной». Рассмотрим теперь весь класс пропозиций формы «каждая m является истинной» и свойство не быть членами соответствующих им m. Пусть этим классом будет w и пусть p будет пропозицией «каждый w является истинным». Если p есть w, p должна обладать определяющим w свойством; но это свойство требует, чтобы p не была w. С другой стороны, если p не является w, то p обладает определяющим w свойством и, поэтому, является w. Таким образом, противоречие кажется неизбежным.

Чтобы иметь дело с этим противоречием, желательно повторно вернуться к вопросу о тождестве эквивалентных пропозициональных функций и о природе логического произведения двух пропозиций. Эти вопросы возникают следующим образом. Если m – это класс пропозиций, то их логическое произведение – это пропозиция «каждая m является истинной», которую я буду обозначать $\wedge$’m. Если теперь мы рассматриваем логическое произведение класса пропозиций, составленного из m вместе с $\wedge$’m, это эквивалентно «каждая m является истинной, и каждая m является истинной», т.е. «каждая m является истинной», т.е. $\wedge$’m. Таким образом, логическое произведение нового класса пропозиций эквивалентно члену этого нового класса, который представляет собой то же самое, что и логическое произведение m. Таким образом, если мы отождествляем эквивалентные пропозициональные функции ($\wedge$’m является пропозициональной функцией от m), то доказательство вышеупомянутого противоречия оказывается неверным, поскольку каждая пропозиция формы $\wedge$’m является логическим произведением и класса, членом которого она является, и класса, членом которого она не является.

Но такое решение в действительности невыполнимо, ибо вполне очевидно, что эквивалентные пропозициональные функции часто не идентичны. Кто, например, будет утверждать, что «x – это простое целое число, отличное от 2» идентично с «x – это или мудрые дела Чарльза II, или его дурацкие высказывания»? И всё же, если верить известному изречению, они эквивалентны. Логическое произведение всех пропозиций класса, составленного из *m* и ^’*m*, – это пропозиция «Каждая пропозиция, которая является *m* или утверждает, что каждая *m* является истинной, является истинной»; и она не идентична с «каждая *m* является истинной», хотя они и являются эквивалентными. Таким образом, по-видимому, нет простого метода избежать рассматриваемого противоречия.

Близкая аналогия этого противоречия с противоречием, обсуждаемым в разделе X, настоятельно предполагает, что оба они должны иметь одно и то же решение или, по крайней мере, очень сходные решения. Конечно, можно считать, что сами пропозиции относятся к различным типам, и что логические произведения должны содержать в качестве составляющих пропозиции только одного типа. Но это предположение кажется грубым и достаточно искусственным.

Подведём итог. По-видимому, специальное противоречие из раздела X решается теорией типов, но имеется по крайней мере одно аналогичное противоречие, которое, вероятно, не разрешимо этой теорией. Общность всех логических объектов или всех пропозиций, по-видимому, затрагивает фундаментальное логическое затруднение. Быть может, я не преуспел в поисках всеобъемлющего решения этого затруднения; но, поскольку оно оказывает влияние на самые основы рассуждения, я искренне рекомендую оказать ему пристальное внимание всем изучающим логику.

Примечания

1. Ср. § 203.

2. Можно сомневаться, каким является отношение областей пропозиций к их логическим произведениям, одно-однозначным или много-однозначным. Например, отличается ли логическое произведение *p*, *q* и *r* от логического произведения *pq* и *r*? Ссылка на определение логического произведения (§ 25) устраняет это сомнение; ибо эти два логических произведения, хотя и эквивалентны, ни в коем случае не тождественны. Следовательно, существует одно-однозначное отношение всех областей пропозиций к некоторым пропозициям, что прямо противоречит теореме Кантора.