

УДК 1: 001; 001.8

В.А. Суровцев

Ф.П. РАМСЕЙ О КОЛИЧЕСТВЕ ВЕЩЕЙ В МИРЕ*

Рассматривается идея Ф.П. Рамсея о возможности выражения в языке логики утверждений о количестве вещей в мире. Эта идея основана на концепции различения сказанного и показанного, разработанной Л. Витгенштейном. С точки зрения данной идеи обсуждается возможность трансформации некоторых утверждений Б. Рассела, выходящих за рамки логических предложений.

Ключевые слова: формальные понятия, тавтология и противоречие, программа логицизма, аксиома бесконечности.

В *Логико-философском трактате (ЛФТ)* Витгенштейн пишет: «Переменное имя “ x ” есть собственно знак псевдопонятия *объект*. Там, где всегда правильно употребляется слово “объект” (“предмет”, “вещь” и т.д.), оно выражается в логической символической форме через переменные имена. Например, в предложении “Имеется два объекта, которые...” через “ $(\exists x, y) \dots$ ”. Там же, где оно употребляется иначе, т.е. как собственно понятийное слово, возникают бессмысленные псевдопредложения. Так, например, нельзя сказать: “Имеются объекты”, как говорят “Имеются книги”. И так же нельзя говорить “Имеется 100 объектов” или “Имеется $\aleph_0$ объектов”. И вообще бессмысленно говорить *о количестве всех объектов*» [1. 4.1272]. В этом утверждении содержится три основных момента. Во-первых, здесь выражена фундаментальная для раннего Витгенштейна идея различения того, что может быть сказано в языке, и того, что показывается его структурой [2. С. 188–194]. Это различие, в частности, проявляется как различие между собственно понятиями и формальными понятиями (или псевдопонятиями). Собственно понятия выражаются функциями с соответствующими пробегами переменных, и эти функции говорят о реальных свойствах и отношениях. На формальные же понятия указывает использование разного типа переменных, которые не говорят ничего, но показывают своё возможное значение. Поэтому попытка явно выразить в формальном языке, что же подпадает под формальные понятия, является бессмысленной, так как в этом случае формальные понятия уподобляются собственно понятиям. Однако «формальные понятия не могут, как собственно понятия, изображаться функцией. Потому что их признаки, формальные свойства, не выражаются функциями. Выражение формального свойства есть черта определённого символа» [1. 4.126]. Так, то, что мы используем выражения типа « $f(x)$ », где « x » – индивидуальная переменная, уже показывает, что возможными значениями этой переменной являются объекты, и, следовательно, дополнительного указания на то, что имеются объекты,

* Исследование выполнено при поддержке государственного контракта на выполнение поисковых научно-исследовательских работ для государственных нужд в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», мероприятие 1.1, проект «Онтология в современной философии языка» (2009-1.1-303-074-018).

не требуется. Речь, собственно, идёт о том, что если мы используем переменные, то говорить об области действия этих переменных не имеет смысла, поскольку то, как используются эти переменные, показывает их пробег. А отсюда вытекает, что утверждение о существовании объектов бессмысленно уже хотя бы потому, что использование определённого типа переменных указывает на то, что эти объекты имеются (т.е. использование символа $\hat{f}x$ уже

показывает, что x имеет пробег, соответствующий $\hat{f}$, и ничего более не нужно). Сама форма предложения, где есть переменная для объектов, указывает на то, что они есть, а сколько их – это вопрос другой. Если они есть, то они есть, что демонстрируется использованием индивидуальных переменных, а если бы их не было, то не было бы и никаких индивидуальных переменных. В некотором смысле утверждать, что объекты есть, используя при этом индивидуальные переменные, – тавтология, поскольку то, что мы пытаемся выразить, показывается самой формой выражения. Применяясь к словоупотреблению Витгенштейна, говорить, что «имеются x , и x есть объекты, такие, что...» – бессмысленно, поскольку само употребление переменной ' x ' показывает, что объекты есть, а «то, что *может* быть показано, *не может* быть сказано» [1. 4.1212].

Во-вторых, бессмысленно говорить не только о том, что вообще имеются объекты. Бессмысленно любое выражение, где используется псевдопонятие «объект». Видимость в необходимости такого использования возникает тогда, когда объекты нужно, в частности, отождествить или различить или же указать на то, сколько их. Однако в рамках представлений *ЛФТ*, хотя об этом нельзя сказать, это можно показать. Поэтому Витгенштейн принимает следующее соглашение: «Тождество объектов я выражаю тождеством знаков, а не с помощью знака тождества. Различие объектов – различием знаков» [1. 5.53]. Если нужно указать на количество объектов, то для этого используется соответствующее количество имён. Например, «то, что должна высказать аксиома бесконечности, могло бы выразиться в языке тем, что имеется бесконечно много имён с различным значением» [1. 5.535]. Символическая система должна показывать то, что нет необходимости утверждать. Псевдопонятия должны быть исключены надлежащим способом записи.

Наконец, в-третьих, позитивные идеи Витгенштейна, высказанные в двух первых пунктах, тесно взаимосвязаны с критикой логицистской системы *Principia Mathematica* (*PM*) А.Н. Уайтхеда и Б. Рассела, в которой широко используются утверждения о существовании, тождестве и различии объектов. Так, в *PM* утверждение о существовании различных вещей используется при установлении свойств отдельных чисел, при этом употребляется знак тождества, с помощью которого устанавливается количество объектов. Выражения типа « $(\exists x, y, z \dots) . x \neq y . x \neq z . y \neq z \dots$ » в системе *PM* являются вполне обычными и указывают на существование определённого количества различных объектов в зависимости от количества используемых переменных. Это указание, например, в качестве гипотезы повсеместно используется при введении чисел натурального ряда, включая утверждение аксиомы бес-

конечности о том, что существует класс объектов, больший любого заданного класса [3. С. 58–114].

Надо сказать, что во *Введении*, которое Рассел написал к *ЛФТ*, он соглашается как с критикой, так и с позитивными предложениями Витгенштейна. Он, в частности, пишет: «Отказ от тождества устраняет один из способов, с помощью которого можно было бы говорить о совокупности всех вещей; и будет показано, что любой другой способ, который может быть предложен, столь же ошибочен; по крайней мере так утверждает Витгенштейн, и, я думаю, правильно утверждает. Это приводит к утверждению, что “объект” есть псевдопонятие. Сказать “ x есть объект” – значит ничего не сказать. Из этого следует, что мы не можем высказывать таких положений, как “в мире больше чем три объекта” или “в мире бесконечное число объектов”. Объекты могут упоминаться только в связи с каким-либо определённым свойством. Мы можем сказать: “Существует больше трёх объектов, которые суть люди”, или “Существует больше трёх объектов, которые красны”, так как в этих положениях слово “объект” в языке логики может быть заменено на переменную, причём переменная в первом случае удовлетворяет функции “ x – человек”, а во втором случае – “ x – красный”. Но когда мы пытаемся сказать: “Существует больше трёх объектов”, эта подстановка переменной вместо слова “объект” становится невозможной и предложение, поэтому, должно рассматриваться как бессмысленное» [4. С. 23].

Такое безоговорочное согласие Рассела выглядит крайне странным, поскольку в структуре *РМ* возможность различения и отождествления вещей и собственно утверждение об их существовании, помимо указания их возможных свойств, играет крайне важную роль. Кроме того, при всём своём согласии с Витгенштейном Рассел не внёс корректив во второе издание *РМ*, которое вышло через несколько лет после *ЛФТ* и учитывало ряд не связанных с *ЛФТ* критических замечаний, решение которых было представлено в *Приложениях*.

Представляется, что такая позиция Рассела связана с двумя противоположными тенденциями. С одной стороны, предлагаемая в *ЛФТ* позиция, казалось бы, позволяла осуществить одну из фундаментальных идей *РМ* о сводимости математики к логике, т.е. идею о том, что любое утверждение математики переводимо в утверждение логики, а сама математика есть только развитая логика. С точки зрения программы логицизма, т.е. программы сведения математики к логике, которой придерживается Рассел, любое утверждение о количестве вещей в мире, об их тождестве и различии превосходит возможности логики, которая является сугубо аналитичной и не должна ничего говорить о мире. В этой связи любое утверждение об объектах должно выходить за сферу логики, а значит, превосходить любую систему, которая претендует на то, чтобы утверждать универсальные истины, при этом ничего не говоря о конкретном содержании мира, к которому она может быть применена. Однако в структуре *РМ* такие утверждения есть, и они используются при доказательстве важных результатов. В этом случае утверждение об объектах используется в качестве антецедента импликации и рассматривается как предположение только для доказательства данного результата, которое

при необходимости может быть отброшено, и, во всяком случае, этот антецедент не должен рассматриваться как логически необходимый. Так, например, в *PM* во всех утверждениях, которые зависят от принятия аксиомы бесконечности, сама аксиома рассматривается как гипотеза. В частности, в *PM* об аксиоме бесконечности утверждается: «Это предположение будет приводиться в качестве гипотезы тогда, когда это будет уместно. Ясно, что в логике не найдётся ничего из того, чтобы обосновать его истинность или ложность, и что в нём можно лишь легитимно быть убеждённым или не быть убеждённым, опираясь на эмпирические основания» [3. С. 225]. Поэтому для любого результата *T*, доказательство которого требует аксиомы бесконечности *AxInf*, в *PM* доказываемся не сам результат *T*, а импликация $AxInf \supset T$. Поскольку аксиома бесконечности явно имеет фактический характер, вне зависимости от того, как его трактовать (например, если понятие «объект» трактовать в физическом смысле, то на вопрос об истинности данной аксиомы можно было бы ответить только с помощью данных физики), все подобные результаты будут выходить за рамки логики [5. С. 202–203]. Поэтому для Рассела предложения Витгенштейна, видимо, выглядят весьма привлекательными. Действительно, если всё, что касается объектов как таковых, показывается особенностями символической записи, тогда отпадает необходимость что-то о них утверждать, т.е. использовать выходящие за рамки логики допущения.

Однако, с другой стороны, предложения Витгенштейна в системе *PM* не так-то просто реализовать. Это связано не только с особенностями принимаемых Расселом и Витгенштейном логических символик, дело в том, что эти символики отражают различные онтологические представления. Так, например, утверждение Витгенштейна, что выражение «Имеется два объекта, которые...» можно выразить через « $(\exists x, y) \dots$ » [1. 4.1272], осмысленно только тогда, когда разные имена, которые можно подставить на место переменных в этом выражении, будут обозначать разные объекты. И в системе онтологических представлений Витгенштейна это вполне нормально, поскольку, так как «объект прост» [1. 2.02], то «два объекта различаются только тем, что они разные» [1. 20233], и это различие можно показать употреблением разных имён. Объекты могут обладать всеми одинаковыми свойствами, тем не менее они остаются различными, если употребляются разные имена.

Но в системе *PM* всё обстоит совершенно не так. И это связано с возможностью различения объектов. Если Витгенштейн предполагает, что объекты различны уже тем, что они различны, то Рассел считает, что различие должно выражаться каким-то свойством объектов. А в этом случае употребление различных имён недостаточно, поскольку если все свойства объектов одинаковы, то их невозможно различить, а значит, это один объект, и использование разных имён здесь не поможет. Таким образом, получается, что то, что Витгенштейн стремится показать, в системе *PM* не только сказать, но и показать невозможно.

В данном случае система *PM* исходит из определения Лейбницем тождества неразличимых: два объекта суть один объект, если нельзя указать раз-

личающие их свойства. Именно в этом смысле в системе *PM* используется равенство, определение которого говорит, что две вещи неразличимы, если они обладают одинаковыми свойствами [3. С. 245]. Поэтому на различие вещей, если все их свойства совпадают, нужно прямо указывать, поскольку это их различие является отношением, которое необходимо для введения различных объектов. Отсюда вытекает, что в *PM* от выражений вида ' $x \neq y$ ' невозможно избавиться, если нужно принять существование различных объектов, поскольку различие имён в данном случае роли не играет. Это связано с тем, что имена ' a ' и ' b ' обозначают один объект, если все свойства, приписываемые объектам a и b , одинаковы, поскольку при этом a и b оказываются одним объектом. Очевидно, что здесь подходы Витгенштейна и Рассела различны. В *PM* можно сказать то, чего не может сказать Витгенштейн, а именно, что разные символы могут обозначать один и тот же объект.

И хотя Рассел принимает критику Витгенштейна, в системе *PM* от выражений тождества и различия объектов, использующих знаки '=' и ' $\neq$ ', не так-то просто избавиться, поскольку там заложена определённая онтологическая идея. Объекты не просто различны, различие проявляется в определённых свойствах этой системы. В *ЛФТ* Витгенштейн предлагает способ перевода выражений со знаком '=' из *PM* в собственную систему [1. 5531–5532], основанную на предлагаемом им соглашении о том, что тождество объектов должно выражаться тождеством знаков, а различие объектов – различием знаков [1. 5.53]. Однако, как показывает Ф.П. Рамсей, воплощение этой идеи уже на уровне тех утверждений, которые не вызывают сомнения в своей логической природе, связано со значительными затруднениями и вряд ли может быть реализовано в полной мере [6].

И связано это прежде всего с тем, что в *PM* с помощью знака равенства выражаются действительно весьма важные положения. Так, в рецензии на *ЛФТ* Рамсей указывает: «Отбрасывание равенства может иметь серьезные последствия для теории множеств и кардинальных чисел. Например, едва ли правдоподобно заявление, что два класса равночисленны, только если существует однозначное соответствие, чьей областью является один класс, а конверсной областью – другой, если такие отношения не могут быть построены посредством равенства» [7. С. 75]. Это замечание действительно существенно, поскольку через взаимнооднозначное соответствие в системе *PM* вводится понятие кардинального числа как класса всех равночисленных классов. Можно указать на то, что Витгенштейн в *ЛФТ* обходит это возражение, предлагая собственное определение кардинального числа как показателя логической операции [1. 6.021], что приводит его к выводу, что «теория классов в математике совершенно излишня» [1. 6031]. Но это указывает также и на то, что представление о соотношении логики и математики у Витгенштейна совершенно иное, чем у Рассела, что прежде всего связано с пониманием специфики математических утверждений, которые в *ЛФТ* рассматриваются как уравнения, касающиеся знаков и поэтому позволяющие из одних утверждений, не принадлежащих математике, получать другие утверждения, точно так же не принадлежащие математике [2. С. 247–259]. Подход Витгенштейна к утверждениям математики кажется несколько упрощённым, но

он импонирует Рамсею, который в той же рецензии пишет, что предложения математики, согласно Витгенштейну, «являются равенствами, получаемыми написанием '=' между двумя пропозициями, которые могут быть подставлены вместо друг друга. Я не вижу, как этот подход предполагает охватить всю математику, и он, очевидно, неполон, поскольку существуют также неравенства, которые трудно объяснить. Легко, однако, заметить, что 'Я имею более двух пальцев' не предполагает значимости ' $10 > 2$ ', ибо, если вспомнить, что различные знаки должны иметь различные значения, оно просто представляет собой '($\exists x, y, z$) : x, y, z есть мои пальцы'» [7. С. 76]. Таким образом, Рамсей согласен, что нечто можно показать особенностями символической системы, хотя, с другой стороны, он сомневается в том, что всё, что можно выразить средствами *PM*, укладывается в соглашение, принимаемое Витгенштейном в *ЛФТ*.

Размышления над слабыми и сильными сторонами позиций *PM* и *ЛФТ* в конечном счёте приводят Рамсея к созданию собственной теории тождества, на основании которой переосмысливается характер аксиомы бесконечности, которая начинает рассматриваться как тавтология, т.е. как предложение логики [8]. Однако эта оригинальная теория выросла из не менее интересной попытки синтезировать идеи Рассела и Витгенштейна, кратко представленной Рамсеем в рукописи «Количество вещей в мире», которая опубликована в составе его архивного наследия [9].

В этой работе Рамсей отмечает указанную выше двойственность позиции Рассела. Так, он утверждает, что если мы пытаемся говорить об объектах, то это приводит «к трудной и важной проблеме об уместности в логике и математике вопроса о количестве вещей в мире. То, что это в некоторой степени уместно, проявляется в *Principia Mathematica*, где предполагается, что существует одна вещь (хотя м-р Рассел впоследствии заявляет, что это – дефект логической чистоты системы), и где для доказательства обычных математических теорем требуется аксиома бесконечности. Конечно, подразумевается, что эта аксиома утверждает существование бесконечного количества вещей, но фактически, с точки зрения определения тождества в *PM*, она утверждает другое, она утверждает, что существует бесконечное количество различных вещей» [9. Р. 170]. При всей привлекательности идей *ЛФТ* для Рамсея, который впоследствии будет говорить, что, используя предложения Витгенштейна, он нашёл, как освободить *PM* от серьёзных возражений в отношении вопроса о сводимости математики к логике [8. С. 15], он чётко фиксирует различие онтологических предпосылок, поскольку Расселу необходимо говорить о различных вещах, тогда как Витгенштейну – нет.

Представляется, таким образом, что в попытке синтезировать идеи Рассела и Витгенштейна, перед Рамсеем стоит две проблемы. С одной стороны, можно ли, учитывая критику и предложения Витгенштейна, сохранить '=' и ' $\neq$ ' для того, чтобы иметь возможность учесть количество различных вещей в мире. Даже если использовать разные имена для различных объектов, можно ли указать, сколько их, и вообще, можно ли поставить такой вопрос в рамках *PM*, если преобразовать её с точки зрения *ЛФТ*. С другой стороны, поскольку разговор о количестве разных вещей выходит за рамки логики и

аналитически понимаемой математики, можно ли модифицировать систему *РМ* так, чтобы утверждения о количестве вещей стали предложениями логики или тавтологиями в смысле *ЛФТ*. Возможность сказать о количестве вещей непосредственно затрагивает природу логики, и если из одной только формы высказывания следует некоторое утверждение об онтологии, то это говорит о том, что логика может и должна учитывать онтологические предпосылки, не утрачивая при этом аналитического характера.

Начнём с первой проблемы. Сложность здесь заключается уже в том, что любая попытка сказать о количестве вещей в мире сталкивается с тем, что в системе *ЛФТ* подобные попытки объявляются бессмысленными псевдопредложениями не только потому, что здесь используется псевдопонятие *объект*, как указывалось выше, но и с тем, как Витгенштейн понимает высказывания, сообщающие подлинный смысл. Дело не только в том, что в *РМ* используются выражения с псевдопонятиями, важно также и то, что в *ЛФТ* подлинными высказываниями объявляются только те, что являются функциями истинности элементарных высказываний, т.е. высказываний, имеющих форму вида ' fa ', ' $f(a,b)$ ' и т.д. [1. 5], из которых утверждения вида ' $\exists x . fx$ ' или ' $\exists x . f(x,b)$ ' и т.д. можно получить посредством логических преобразований, использующих исключительно истинностные функции. В этом случае, как видно, речь идёт не о количестве объектов, но только об объектах, имеющих определённое свойство. Более того, посредством преобразований, допустимых в *ЛФТ*, никакого утверждения собственно об объектах получить невозможно. То есть любое утверждение, которое выражается с использованием квантора существования, значимо не само по себе, но только через свойство, которым обладают вводимые посредством квантора объекты. Поэтому Витгенштейн и может утверждать, что «Имеется два объекта, которые...» можно выразить через « $(\exists x, y) \dots$ » [1. 4.1272]. С этим согласен и Рамсей: «Ясно, что “Существует столько-то вещей”, не является пропозицией, ибо она не является функцией истинности элементарных пропозиций» [9. Р. 171].

В этом отношении выражения, допустимые в *РМ*, вроде ' $(\exists x) . x = a$ ' и ' $(\exists x) . x \neq a$ ', где первое выражение говорит, что существует один объект, а второе – что существует более одного объекта, лишены смысла, поскольку, с точки зрения Витгенштейна, «в правильной логической символике даже не могут быть написаны» [1. 5.534]. Однако Рамсей предлагает интерпретировать подобные выражения таким способом, чтобы они имели видимость смысла, переписывая их не просто как утверждение о существовании объектов, но как утверждения, приписывающее объектам некоторое свойство. В качестве формального выражения такого свойства предлагается ' Tx ', являющееся сокращением тавтологии вида ' $\phi x \vee \sim \phi x$ ', как Рамсей поступает и ранее [6. С. 100]. В этом случае ' $(\exists x) . x = a$ ' переписывается как ' $(\exists x) . x = a \cdot Tx$ ' и трактуется как тавтология, а ' $(\exists x) . x \neq a$ ' переписывается как ' $(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$ ' и трактуется как сумма тавтологий ' Tx ' для всех значений x , отличных от a , при этом, «если значения x , отличные от a , существуют, то ' $(\exists x) . x \neq a$ ' является тавтологией, в противном случае является бессмысленной» [9. Р. 170].

С точки зрения Рамсея, такой ход вполне допустим, поскольку, «если мы можем говорить, что существует столько-то вещей, выполняющих ϕx , по-
 чему бы тогда не говорить, что существует столько-то вещей, выполняющих
 Tx ?» [9. Р. 171]. Действительно, возьмём выражение «Существует по край-
 ней мере две вещи, выполняющие ϕx », что формально можно записать как
 $\langle (\exists x, y) . x \neq y \cdot \phi x \cdot \phi y \rangle$ или $\langle (\exists x) : \phi x : (\exists y) . y \neq x \cdot \phi y \rangle$. Сходным образом
 можно записать, что существуют по крайней мере две вещи, добавив к этому,
 что они выполняют Tx . То есть получится выражение $\langle (\exists x, y) . x \neq y \cdot Tx \cdot Ty \rangle$
 или $\langle (\exists x) : Tx : (\exists y) . y \neq x \cdot Ty \rangle$. И, как утверждает Рамсей, это выражение
 «чтобы оно не означало, является тавтологией; а если оно не означает ниче-
 го, то ничего не означает и предыдущая пропозиция “Существуют по край-
 ней мере две вещи, выполняющие ϕx ”» [9. Р. 171]. Во всяком случае, пер-
 вое выражение должно выступать условием осмысленности второго, по-
 скольку если осмысленным не будет первое выражение, то осмысленным не
 будет и второе. Более того, поскольку первое выражение является тавтоло-
 гией, то оно уже должно подразумеваться любым выражением, имеющим
 форму второго, поскольку любое выражение вида $\langle (\exists x) \phi x \rangle$ подразумевает
 выражение вида $\langle (\exists x) . \phi x \vee \sim \phi x \rangle$. Так, например, утверждение «Снег бел»
 подразумевает осмысленность выражения «Снег бел или не бел». Видимо, в
 этом смысле Рамсей полагает, что выражение Витгенштейна «“Существует n
 вещей, таких что...”» предполагает не только для своей истинности, но и для
 своей *осмысленности* то, что мы пытаемся утверждать посредством “Сущес-
 твует n вещей”» [9. Р. 171]¹. Таким образом, учитывать количество объек-

¹ Здесь может показаться, что у Рамсея и Витгенштейна речь идёт о разных проблемах. Это связано с тем, что Витгенштейн в *ЛФТ* говорит не столько об n объектах, сколько об *объектах*. Так, выражение «Имеются объекты» у Витгенштейна [1. 4.1272] явно отличается от выражений, рассматриваемых Рамсеем. И действительно, когда Рамсей говорит, что «Существует n вещей, таких что...», предполагает не только для своей истинности, но и для своей *осмысленности* то, что мы пытаемся утверждать посредством «Существует n вещей», это уже подразумевает, что имеется некоторое количество различных объектов. Однако то, что в системе *ЛФТ* в определённом смысле всё-таки можно говорить о количестве объектов, подтверждает сам Витгенштейн. В печатном экземпляре *ЛФТ*, принадлежащем Рамсею (а Рамсей принимал непосредственное участие в переводе и издании *ЛФТ* на английском языке, причём это участие было основным в том смысле, что терминология и основные идеи немецкого текста *ЛФТ* в английском варианте в конечном счёте были представлены в версии Рамсея, который провёл значительное время в беседах с Витгенштейном, обсуждая основные идеи *ЛФТ* [10. С. 140]), Витгенштейн в английском тексте, наряду с другими поправками, сделал следующее замечание: «“Существует n вещей, таких что...”» предполагает для своей *осмысленности* то, что мы пытаемся утверждать посредством “Существует n вещей”. К. Леви, который провёл детальный анализ замечаний Витгенштейна в данном тексте, принадлежащем Рамсею и скорректированном Витгенштейном, считает, что данное замечание Витгенштейн предполагал вставить в следующее издание *ЛФТ* между пятым и шестым параграфом афоризма 4.1272 [11. Р. 421]. Так и Рамсей обсуждает афоризм *ЛФТ*: «Имеются два объекта, которые...”» можно выразить через “ $(\exists x, y) \dots$ ” [1. 4.1272] в форме «Существует n вещей, таких что...», сообразуясь с этим замечанием Витгенштейна.

тов и их свойства, с точки зрения Рамсея, в символической системе вполне возможно. Другое дело, как это нужно интерпретировать.

Рамсей придаёт утверждениям о вещах некоторый смысл, но возникает проблема, как о них можно говорить, если 'говорить' понимается в смысле Витгенштейна. То есть возникает проблема, какую роль они могут играть в символической системе. Действительно, выражения вроде «Существует столько-то вещей» не являются пропозициями, т.е. не являются функциями элементарных пропозиций ни в смысле Витгенштейна, ни в смысле Рамсея, даже несмотря на то, что Рамсей, как указано выше, придаёт им некоторый смысл.

Однако, как говорит Рамсей: «Нас спросят, если “Существует столько-то вещей” не является пропозицией, как мы вообще можем обсуждать этот вопрос? Ответ не труден; мы рассматриваем не наше мышление, язык и логику, которые охватывают весь мир, но гипотетический язык и логику, охватывающую некоторую часть мира. Таким образом, мы можем вообразить существование, где ‘все’ охватывает не все вещи, но только их некоторое множество; количество этого множества будет тогда количеством вещей в его мире, относительно которого мы в нашем языке можем образовать пропозиции, хотя он в своём – не может. И так мы можем конструировать различные логические языки, применимые к этим различным мирам; мир может состоять из одной вещи, из двух вещей и т.д.» [9. Р. 171].

Это утверждение Рамсея необходимо прояснить. Для этого вернёмся к выражениям вида $(\exists x) . x \neq a \cdot \phi x$. Как считает Рамсей, выражение вроде $(\exists x) . x \neq a \cdot \phi x$, если существует только одна вещь в мире типа a , является бессмысленным. Точно так же бессмысленным является выражение $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot \phi x$, если существует только две вещи, и т.д. Однако возникает проблема, как это можно выразить в символической системе, если выражения, утверждающие количество вещей в мире, Витгенштейн объявляет псевдопредложениями. Если воспользоваться соглашением самого Витгенштейна о том, что разные вещи должны обозначаться различными именами, это можно было бы показать различным количеством имён в разных частичных языках. Однако, как считает Рамсей, хотя «это можно было бы показать числом имён в языке, если бы все объекты имели имена, но поскольку не все объекты должны иметь имена, эта демонстрация могла бы быть ошибочной» [9. Р. 172]¹.

Рамсей согласен с Витгенштейном, что с помощью выражений из PM вида $(\exists x) . x \neq a$ сказать ничего нельзя. Но это не означает, что в частичном языке ничего нельзя показать с помощью таких выражений. Здесь он исполь-

¹ Этот аргумент Рамсея соответствует аргументу Куайна против подстановочной квантификации, которая в отличие от объектной квантификации предполагает, что на место переменных подставляются имена, а не объекты. Возражение Рамсея наиболее очевидно для бесконечных областей, ибо, как пишет Куайн, «в достаточно богатом универсуме существует больше вещей, чем их может быть наименовано, даже если имена бесконечны по числу» [12. С. 167], поскольку множество имён счётно, тогда как, скажем, множество действительных чисел не счётно. Отсюда следует, что уже не всем действительным числам можно приписать имена; «обилие имён не может предотвратить существование безымянных объектов в достаточно богатом универсуме» [12. С. 168].

зует идею Витгенштейна о различии между тем, что может быть сказано в языке, и тем, что может быть показано языком. Но он не согласен с тем, что на количество вещей в мире можно указывать только наличием разных имён. Для этого могут использоваться также тавтологии. Здесь необходимо напомнить, что с точки зрения *ЛФТ* тавтологии ничего не говорят о мире, поскольку не являются предложениями языка, сообщающими некоторое содержание. Последние характеризуются тем, что обладают возможностью быть истинными или ложными, и связано это с тем, что «истинным или ложным предложение может быть только потому, что оно является образом действительности» [1. 4.06]. Но тавтологии не являются образом действительности, у них нет возможности быть истинными или ложными, поскольку они созданы истинными, так как «их истинность узнаётся из одного лишь символа» [1. 6.113]. Но хотя тавтологии ничего не говорят о мире, они всё-таки нечто показывают. С точки зрения Витгенштейна, тавтологии показывают формальные, логические свойства языка, а через логическую форму (форму отображения), которая у языка и описываемого им мира едина, и свойства мира [1. 6.12].

Но, как считает Рамсей, логику мира можно показать, включая демонстрацию количества вещей. Он предлагает использовать демонстративную функцию тавтологий, расширяя её до демонстрации количества вещей в соответствующем частичном мире. При этом он применяет расширенное понятие тавтологии, использующее предикат ' Tx ', так, как показано выше. Он пишет: «В языке, описывающем мир с двумя вещами (two-things-world), мы не можем сказать, "Существует в точности две вещи"; это будет показываться тем, что ' $(y) : (\exists x) . x \neq a \cdot Tx$ ' является тавтологией, а ' $(\exists x) . x \neq y \cdot x \neq z \cdot Tx$ ' – бессмысленно» [9. Р. 172].

Другими словами, выражения вида ' $(\exists x) . x \neq a \cdot \phi x$ ' в нашем частичном языке будут иметь значение в мире, состоящем из двух вещей, т.е. будут говорить о каком-то свойстве этих вещей, и, значит, быть истинными или ложными, только в том случае, если осмысленным будет выражение ' $(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$ ', которое ничего не говорит, но в качестве тавтологии нечто показывает, а именно то, что вещей в этом мире более одной, и, к тому же, если бессмысленным будет выражение ' $(\exists x) . x \neq y \cdot x \neq z \cdot Tx$ ', показывающее, что вещей в нашем частичном мире более двух. Таким образом, у Рамсея тавтологичность и бессмысленность определённых выражений показывают то, что Рассел пытается сказать с помощью выражений вида «Существует столько-то вещей», а Витгенштейн пытается показать наличием определённого количества имён. То есть логику мира можно показать в том числе и тем, что одни утверждения о количестве вещей являются тавтологиями, а другие – противоречиями.

В логике мира, содержащего две вещи, выражение вроде ' $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot \phi x$ ' Рамсей считает бессмысленным, добавим, что, следовательно, бессмысленным является и выражение вида ' $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$ '. Однако, как полагает Рамсей, более удобным было бы придать подобным выражениям некоторое значение, и наиболее подходящим было бы считать их противоречиями. Это связано с несколькими причинами. Во-первых, эти выражения

мы не можем рассматривать как возможно истинные или ложные, т.к. это не сообразуется со структурой нашего частичного мира, образом которого в этом случае они должны были бы быть. Тавтологии же зарезервированы для противоположного случая. Но других вариантов для осмысленных пропозиций не предусмотрено. Во-вторых, этот ход не приводит к противоречию в рамках системы. Наконец, в-третьих, что является, по-видимому, самым важным, это поможет сравнить логику мира, содержащего две вещи, с логикой миров, содержащих большее количество вещей. Если мы принимаем такое соглашение, то выражение вроде $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b$, которое Витгенштейн считает бессмысленным псевдопредложением, приобретает смысл. Будучи переписанным в форме $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$, оно становится противоречием в мире, содержащем одну или две вещи, и тавтологией в мире, содержащем более двух вещей. Таким образом, используя подобные выражения и трактуя их в стиле *ЛФТ* как предложения логики, т.е. как тавтологии и противоречия, мы можем заместить ими выражения *РМ*, утверждающие о существовании определённого количества вещей.

Так, демонстративная функция выражений $(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$ и $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$, в мире, содержащем в точности две вещи, где первое является тавтологией, а второе – противоречием, вполне аналогична утверждению «Существует в точности две вещи», которое в системе *РМ* выражается следующим образом: $(\exists x, y) . x \neq y : \sim : (\exists x, y, z) . x \neq y \cdot y \neq z \cdot z \neq x$. Однако, несмотря на то, что функции этих выражений и утверждения из *РМ* можно трактовать одинаково, тем не менее данные выражения в совокупности не являются утверждением пропозиции «Существует в точности две вещи». Связано это не с придаваемым им смыслом, но с тем, как их нужно понимать. В стиле *ЛФТ* они должны трактоваться как то, что показывает логику мира, а не как то, что говорит о его содержании, как следует понимать эти выражения в *РМ*. Поэтому хотя формула $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b$ и бессмысленна с точки зрения Витгенштейна, с точки зрения Рамсея она имеет смысл, и этот смысл можно эксплицировать в мире, содержащем в точности две вещи, хотя он и отличен от смысла пропозиции «Существует в точности две вещи», поскольку «если бы эта формула на самом деле выражала такую пропозицию, она имела бы фиксированный смысл, независимо от своей истинности, т.е. от числа вещей в мире, а именно, смысл “что число вещей – два”. Но фактически её *смысл* (не просто *истинность*) зависит от числа вещей в мире; в одном случае она *означает* тавтологию, в другом – противоречие; и не в одном из этих случаев она не означает “Существует две вещи в мире”. Как сказал бы Витгенштейн, число вещей в мире *показывается* определённой символической формой, которая является тавтологией или противоречием; а то, что может быть показано, не может быть сказано» [9. Р. 173]. Тавтологичность $(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$ и противоречивость $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$ показывают, но не утверждают, что мир, который они описывают, содержит ровно две вещи. Таким способом Рамсей предполагает показать то, что Витгенштейн показывать не собирался, вернее, Рамсей тавтологиями стремится показать то, что у Витгенштейна не предусмотрено.

Подобным образом можно трактовать и другие выражения. Например, осмысленность формулы $\langle (\exists x, y) . x \neq y \rangle$, говорящей в *РМ*, что существует по крайней мере две вещи, с точки зрения Рамсея, зависит от того, что в мире, содержащем только одну вещь, формула $\langle (\exists x, y) . x \neq y \cdot Tx \cdot Ty \rangle$ будет противоречием, а во всех остальных – тавтологией. Только тогда будет осмысленной формула $\langle (\exists x, y) . x \neq y \cdot fx \cdot fy \rangle$, которая говорит, что эти вещи обладают некоторым свойством. Таким образом, значимость выражений, которые можно оценить как истинные или ложные, зависит от демонстративной функции выражений, показывающих число вещей в мире. Или, если говорить совсем просто, то сама символика, показывая, что некоторые выражения являются тавтологиями, а некоторые – противоречиями, демонстрирует, сколько вещей имеется в мире.

Однако несмотря на различие в интерпретации, формулы вроде $\langle (\exists x) . x \neq a \cdot Tx \rangle$ и $\langle (\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx \rangle$, совокупность которых заменяет $\langle (\exists x, y) . x \neq y : \sim : (\exists x, y, z) . x \neq y \cdot y \neq z \cdot z \neq x \rangle$ из *РМ*, могут с пользой трактоваться так, как если бы вместе они были явным выражением о том, что существует только две вещи в мире, поскольку они могут выполнять функцию выражений из *РМ*, которые говорят о количестве вещей в мире. Напомним, что Рассел использует их в качестве условий. Так и предлагаемые Рамсеем выражения могут использоваться в качестве условий других выражений в рамках частичных языков. Таким способом можно построить логику частичных языков, и эти логики показывали бы, сколько вещей содержит соответствующий мир. Кроме того, такой подход обеспечивал бы общую логику языков, описывающую мир с произвольным числом элементов. Так, определим подобные формулы как '*p*', пусть '*q*' будет произвольной формулой, и рассмотрим формулу ' $p \supset q$ '. Тогда на основании свойств импликации формула ' $p \supset q$ ' будет тавтологией в любом мире, кроме мира, содержащего в точности две вещи, поскольку '*p*' в этом случае, согласно принятому соглашению, будет противоречием, а при ложном антецеденте импликация всегда истинна. Если же рассматривается мир, содержащий в точности две вещи, тогда формула ' $p \supset q$ ' сводится к '*q*', поскольку '*p*' будет тавтологией, а при истинном антецеденте условия истинности импликации зависят исключительно от консеквента. Ни в первом, ни во втором случае '*p*' ничего не говорит, но лишь, как сказал бы Витгенштейн, показывает логику мира.

Аналогичные соображения касаются '*q*'. Если '*q*' является тавтологией в мире, содержащем две вещи, то ' $p \supset q$ ' будет тавтологией в любом мире, и при этом не важно, будет ли '*q*' тавтологией в каком-то другом мире. Как утверждает Рамсей, «таким образом, мы можем одновременно развить логики, т.е. тавтологии, всех миров; ибо, когда мы наталкиваемся на выражение, которое является тавтологией только, скажем, в мире, содержащем две вещи, мы ставим '*p*' перед ним в качестве условия и получаем универсально тавтологичное выражение» [9. Р. 173]. Таким образом, условие '*p*' обеспечивает введение логики мира, содержащего две вещи, в логику любого мира.

Очевидно, что подход Рамсея не приходит в противоречие ни с системой *РМ*, ни с системой *ЛФТ*, поскольку основан исключительно на классических свойствах материальной импликации. И действительно, если учесть со-

глашение Рамсея, совокупность формул $(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$ и $(\exists x) . x \neq a \cdot x \neq b \cdot Tx$ будет играть ту же самую роль, что и выражение $(\exists x, y) . x \neq y : \sim : (\exists x, y, z) . x \neq y \cdot y \neq z \cdot z \neq x$ из *PM*, приведённое выше. Все выражения из *PM*, если принять соглашение Рамсея, будут сохранять свою значимость. Аналогичным образом могут трактоваться и выражения из *ЛФТ*, если учесть перевод, предлагаемый Витгенштейном в афоризмах 5.531–5.5321. Правда, при реализации такого перевода Рамсей предполагает, что '=' и ' $\neq$ ' трактуются как обычные предикаты, что позволяет свести выражения о тождестве из *PM* в выражения, допустимые в *ЛФТ* [6. С. 92–93]. Тогда, например, выражение из *PM* вроде $(\exists x) . x \neq a$ (которые в интерпретации Рамсея выглядят как $(\exists x) . x \neq a \cdot Tx$) сводится к $(\exists x) . x \neq a \vee a \neq a$, что, в свою очередь, сводится к $(\exists x) . Tx \cdot Ta \cdot \vee . Ca$ (где ' Ca ' есть отрицание ' Ta '), и затем, ввиду свойств дизъюнкции, – к $(\exists x) . Tx \cdot Ta$, что естественно трактовать как просто ' Ta '. Поэтому проблем в отношении *ЛФТ* не возникает, за исключением того, что «поскольку мы предполагаем, что различные буквы имеют различное значение, это соглашение возможно только тогда, когда вещей столько же, сколько букв» [9. Р. 174]. Но это как раз и соответствует тому, к чему стремится Витгенштейн, принимая соглашение, что различные вещи должны обозначаться разными именами.

Все эти рассуждения, очевидно, применимы к любому частичному миру. В данном случае не важно, сколько именно вещей рассматривается, и не важно, сколько их. Роли не играет, сколько именно вещей показано употреблением знаков. Будет ли их две, три или больше. И здесь, конечно, возникает вопрос, можно ли применить предыдущие рассуждения к числу вещей в мире, которое не ограничивается определённым количеством? – Можно. Но каким образом? Речь здесь, конечно, должна идти об аксиоме бесконечности. Вопрос о числе вещей в мире имеет значение только в перспективе этого вопроса. Но для Рамсея важно также и то, чтобы этот вопрос решался в рамках программы логицизма. И действительно, подход Рамсея даёт решение основной проблемы, связанной с аксиомой бесконечности, и эта проблема состоит в следующем: «Для каждого предложения, доказуемого с помощью логических аксиом и аксиомы бесконечности, в самой логике выводима теорема вида импликации, антецедент которой есть эта аксиома, а консеквент – данное предложение. Поэтому для тех математических теорем T , доказательство которых требует аксиомы бесконечности $AxInf$, Уайтхед и Рассел смогли доказать не сами по себе T , а только импликацию $AxInf \supset T$. Но это, конечно, значит, что ни для какой такой математической теоремы T нельзя показать, что она является теоремой логики, пока $AxInf$ не взята в качестве аксиомы логики» [5. С. 202]. Ясно, что с точки зрения представленных выше предложений аксиома бесконечности, рассматриваемая в виде антецедента импликации, если её можно интерпретировать в качестве тавтологии в бесконечном мире, будет удовлетворять всем тем условиям, которые позволяют ввести её в логику любого мира, без того, чтобы считать её предложением, выходящим за рамки аналитического знания. И хотя на данном этапе Рамсей не может предложить адекватной формулировки такой тавтологии, поскольку отсутствует адекватный логический аппарат, а формули-

ровка из *PM* в силу указанных выше причин не подходит, он всё-таки не сомневается, что, используя теорию формальных рядов или теорию классов, можно найти такое выражение, которое в бесконечном мире было бы тавтологией, а в конечном – противоречием.

Подобное выражение действительно является аксиомой, поскольку его нельзя доказать. Хотя гипотетически конструируемые частичные миры и их логика дают тавтологичные выражения в любом мире, в том числе и в бесконечном, из них нельзя вывести выражение, которое бы соответствовало тавтологии, показывающей бесконечность вещей. Действительно, если мы рассматриваем выражение ' $p \supset q$ ', где ' p ' относится к миру с заданным количеством вещей, то ' p ', как показано выше, будет противоречием в любом частичном мире, с количеством вещей, отличным от заданного, а само ' $p \supset q$ ' в силу свойств импликации будет тавтологией. Но из этого нельзя вывести, что одно из таких ' p ' функционально будет соответствовать *AxInf*, т.е. будет, в соответствии с соглашением Рамсея, показывать бесконечность вещей. Поэтому *AxInf* должна вводиться именно как аксиома, но в отличие от системы *PM*, где эта аксиома рассматривается как содержательное утверждение о свойствах реального мира, у Рамсея она рассматривается как предложение логики. И если выражение, соответствующее *AxInf*, можно сформулировать в принципе, то «всё, что на самом деле можно спросить, заключается в том, является ли определённый знак тавтологией, или же нет – знаком, относительно значения которого мы можем или не можем знать, является ли он тавтологией» [9. Р. 175], поэтому всё сводится к возможности определённых конструкций, которые должны нечто показать. Вопрос только в том, возможны ли эти конструкции?

Надо сказать, что подход Рамсея к бесконечности существенно отличается от подхода Рассела. Связано это с тем, что в отличие от конструктивного подхода к выражениям, исповедуемого в рамках *PM*, где возможность построения произвольной функции зависит от выразительных возможностей языка, от способности построения определённых выражений, Рамсей относительно природы математических объектов придерживается реалистской позиции. Рассел считает, что поскольку из особенностей самих выражений нельзя вывести бесконечность объектов в мире, то её можно лишь постулировать в качестве экстралогической аксиомы, которая фиксировала бы объективное свойство реального мира. Иной подход у Рамсея, который утверждает, что функции должны рассматриваться с точки зрения их объективного значения и не должны зависеть от нашей способности их построения в языке. Способность построения функций в языке ограничена способностями строящего их логика и не должна сказываться на объективном значении самой функции [13. С. 63–64]. Если даже у нас не хватает языковых средств для построения выражений о бесконечности объектов, это не означает, что этого нельзя было бы сделать, если бы мы обладали бесконечными возможностями. Как утверждает Рамсей, «сама идея бесконечности доказывает существование бесконечности» [9. Р. 175], поскольку заложена в возможности подобных конструкций.

Если не принимать во внимание эпистемологические доводы Рамсея в пользу существования бесконечности вещей в мире, что требует отдельного исследования, его основной аргумент как раз и связан с объективным значением подобных выражений. Для объяснения вернёмся к примерам. Выше говорилось, что выражение «Существует по крайней мере две вещи x , таких что ϕx » (или формально « $(\exists x, y) . x \neq y \cdot \phi x \cdot \phi y$ ») будет осмысленным, т.е. будет говорить, что две вещи обладают определённым свойством, только если в мире более одной вещи, на что указывает тавтологичность формулы « $(\exists x, y) . x \neq y \cdot Tx \cdot Ty$ ». В противном случае она будет бессмысленной или, если принять соглашение Рамсея, противоречивой. И то же самое должно выполняться для любого утверждения об n вещах. Выражение «Существует по крайней мере n вещей x , таких, что ϕx » будет бессмысленным или противоречивым, если не существует n вещей, что также показывается тавтологичностью соответствующей формулы. Но, как считает Рамсей: «‘Существует бесконечное число x , таких что ϕx ’ является логической суммой всех таких пропозиций для различных значений n , и является бессмысленным, если не существует n вещей, каким бы ни было n , или если бы не существовала бесконечность вещей» [9. Р. 176]. И поскольку вопрос о существовании бесконечности таких вещей x , которые ϕx , вполне осмыслен, то вне зависимости от того, можем ли мы актуально сконструировать соответствующую формулу, отвечающую на этот вопрос демонстрацией своей тавтологичности, Рамсей считает, что бесконечность вещей всё равно должна быть.

Общий ход своих рассуждений Рамсей суммирует следующим образом: «Мы показали, как можно скомбинировать изучение логик различных миров введением выражений в качестве гипотез, которые в некоторых мирах являются тавтологиями, в других мирах – бессмысленными, но по определению самопротиворечивыми. Наиболее важной из них является аксиома бесконечности, которая не может быть доказана, поскольку любое доказательство из предыдущих аксиом применялось бы также к конечным мирам, в которых эта аксиома не имела места. Тем не менее в отношении некоторого типа в нашем собственном мире эта аксиома является определённо тавтологичной, как это показывается тем фактом, что мы можем осмысленно исследовать, существует ли бесконечное число определённого сорта вещей. Конечно, если аксиома бесконечности не имеет силы в нашем мире, она не могла бы иметь силы ни в одном частичном универсуме рассуждения, и мы были бы не в состоянии как-то осмыслить её значение, кроме как принять особое определение. Ясно, что она является тавтологией и подозрительна только потому, что не может быть доказана; но мы явно показали, почему она не может быть доказана, а именно потому, что любое доказательство применялось бы также к любому конечному универсуму рассуждения» [9. Р. 176].

Однако при всей привлекательности идеи Рамсея показывать с помощью тавтологий и противоречий количество вещей в мире, при её реализации очень многое зависит от понимания демонстративной функции предложений логики. Надо сказать, что Рассел, при всём своём согласии с Витгенштейном, не принимает полностью его концепцию различия того, что может быть показано, и того, что может быть сказано языком. В частности, реализованная

до конца, эта концепция приходит в противоречие с его доктриной типов, где о выражениях одного типа можно говорить с помощью выражений другого, более высокого типа, а значит, то, что показывается одними выражениями, может быть сказано другими [4. С. 31]. Во всяком случае, если мы принимаем концепцию различия между сказанным и показанным, необходимо обосновать, в какой степени она применима к системам типа *PM*, особенно если учесть, что данная концепция не в последнюю очередь разрабатывалась Витгенштейном не как критика утверждения о количестве вещей в мире, а как критика теории типов. Дальнейшая разработка идеи Рамсея должна была бы продемонстрировать, что концепция различия сказанного и показанного, применяемая в *ЛФТ* тотально, может иметь избирательное применение в отношении отдельных логических идей. Тотальное применение этой концепции не согласуется и с доктриной самого Рамсея, который также разрабатывает теорию типов, хотя и в весьма отличном от Рассела виде. Таким образом, представленные выше идеи Рамсея имеют достаточно ограниченное значение, поскольку в реформе использования тождества в выражениях из *PM* зависят от частично принимаемой концепции Витгенштейна, а в интерпретации аксиомы бесконечности – от его собственного предпочтения концепции реализма в основаниях математики.

Литература

1. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2008.
2. Суровцев В.А. Автономия логики: Источники, генезис и система философии раннего Витгенштейна. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001.
3. Уайтхед А.Н., Рассел Б. Основания математики: В 3 т. Т. 2. Самара: Самарский университет, 2006.
4. Рассел Б. Введение // Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2008. С. 11–31.
5. Френкель А.А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
6. Суровцев В.А. Л. Витгенштейн и Ф.П. Рамсей о тождестве // Вестник Томского государственного университета (Сер. Философия, социология, политология). 2009. № 4(8). С. 89–103.
7. Рамсей Ф.П. Критические заметки о «Логико-философском трактате» Л. Витгенштейна // Логика, онтология, язык. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 63–79.
8. Рамсей Ф.П. Основания математики // Рамсей Ф.П. Философские работы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. С. 15–64.
9. Ramsey F.P. Notes on Philosophy, Probability and Mathematics. Napoli: Bibliopolis, 1991.
10. Меллор Д.Х. Фрэнк Пламpton Рамсей // Философия науки. 2007. № 3(34). С. 138–158.
11. Льюи С. A Note on the Text of the *Tractatus* // Mind. 1967. Vol. 61. P. 416–423.
12. Куайн У.В.О. Философия логики. М.: «Канон+» РООИ Реабилитация, 2008.
13. Суровцев В.А. Аксиома сводимости, теория типов Ф.П. Рамсея и реализм в математике // Вестник Томского государственного университета (Сер. Философия, социология, политология). 2007. № 1.