

УДК 512.541

М.И. Рогозинский

О k -ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНОСТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Вводится понятие k -вполне транзитивности для групп без кручения, исследуется вопрос о k -вполне транзитивности вполне разложимых групп из некоторых классов.

Ключевые слова: абелева группа, k -вполне транзитивность.

Одним из ключевых понятий теории абелевых групп является понятие вполне транзитивности. Впервые это понятие было рассмотрено Капланским в [1] для p -групп: p -группа G называется *вполне транзитивной*, если для любых элементов $a, b \in G$ группы G из выполнения неравенства $H(a) \leq H(b)$ следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$, такого, что $\theta(a) = b$ (здесь $H(a), H(b)$ – индикаторы элементов a и b соответственно).

Понятие вполне транзитивной группы без кручения впервые появилось в работе П.А. Крылова [2]: группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых элементов $a, b \in G$ из $\chi(a) \leq \chi(b)$, где $\chi(a), \chi(b)$ – характеристики элементов a и b , следует существование $\theta \in E(G)$ со свойством $\theta(a) = b$. Заметим, что в [2] группа с указанным выше свойством называлась транзитивной.

В [3] рассматривается понятие «вполне транзитивность» для произвольной абелевой группы. Затем это понятие уточняется в [4]. При этом введенное понятие вполне транзитивной абелевой группы согласуется с рассматриваемыми ранее определениями вполне транзитивной p -группы и вполне транзитивной группы без кручения.

Интерес к изучению вполне транзитивных абелевых групп продиктован следующими соображениями. Вполне транзитивными группами являются группы, обладающие различной структурой, однако имеющие фундаментальное значение в теории p -групп и групп без кручения. К вполне транзитивным группам относятся, например, p -группы без элементов бесконечной высоты, p -адические алгебраически компактные группы и однородно сепарабельные группы, которым посвящены работы Р. Бэра, Ю.Л. Ершова, Л.Я. Куликова, А.П. Мишиной, Л. Фукса и других алгебраистов, квазисервантно инъективные группы без кручения, сильно однородные группы, интенсивно изучаемые в последнее время. Также понятие вполне транзитивной группы тесно связано с изучением вполне характеристических подгрупп абелевых групп [4]. Вполне транзитивные группы без кручения интенсивно изучались в работах [5–9] и др.

В [10] Кэрролл вводит понятие k -вполне транзитивной p -группы, тем самым обобщая понятие вполне транзитивности для p -групп.

Пусть G – p -группа и $k \in \mathbb{N}$. Группа G называется *k -вполне транзитивной*, если из выполнения условий для кортежей $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ элементов группы G :

- (1) $H(x_i) \leq H(y_i), i = \overline{1, k}$;
 (2) кортеж X высотно независим, в том смысле, что при $i \neq j$ $h(rx_i) \neq h(sx_j)$ для любых $r, s \in \mathbf{Z}$, кроме случая $rx_i = sx_j = 0$,

следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$ группы G со свойством $\theta(x_i) = y_i, i = \overline{1, k}$.

Для рассмотрения групп без кручения нам понадобятся следующие понятия [11].

Характеристикой называется последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞ . Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество всех таких последовательностей. Если $\chi_1 = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, \dots, l_n, \dots)$, то полагают $\chi_1 \leq \chi_2$ тогда и только тогда, когда $k_i \leq l_i$ для всех $i \in \mathbf{N}$.

Пусть G – группа без кручения. Для элемента $g \in G$ максимальное целое неотрицательное число k при данном простом числе p , для которого в группе G разрешимо уравнение $p^k x = g$, называется *p -высотой* элемента g и обозначается $h_p(g)$. Если уравнение разрешимо для любого $k \in \mathbf{N}$, то полагаем $h_p(g) = \infty$. Последовательность *p -высот*

$$\chi(g) = (h_{p_1}(g), h_{p_2}(g), \dots),$$

где $p_1, p_2, \dots$ – последовательность всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию, называется *характеристикой* или *высотной последовательностью* элемента g . Так как характеристика элемента g зависит от группы G , то иногда пишут $\chi_G(g)$.

Если $\chi_1 = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, \dots, l_n, \dots)$ – характеристики, то их сумма определяется как характеристика

$$\chi_1 + \chi_2 = (k_1 + l_1, \dots, k_n + l_n, \dots),$$

а их разность при $\chi_2 \leq \chi_1$ определяется как характеристика

$$\chi_1 - \chi_2 = (k_1 - l_1, \dots, k_n - l_n, \dots),$$

где ∞ плюс (минус) нечто есть ∞ . Заметим, что в [11] для указанных операций с характеристиками используется мультипликативная запись, здесь же будет удобна аддитивная форма записи. Характеристика называется *идемпотентной*, если $\chi + \chi = \chi$.

Две характеристики $\chi_1 = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, \dots, l_n, \dots)$ называются *эквивалентными*, если неравенство $k_n \neq l_n$ имеет место лишь для конечного числа номеров n и только тогда, когда k_n и l_n конечны. Класс эквивалентности во множестве характеристик называется *типом*. Если $\chi(g)$ принадлежит типу t , то говорят, что элемент g имеет тип t , и пишут $t(g) = t$ или $t_G(g) = t$, если необходимо указать, что тип элемента g рассматривается в группе G .

Группа без кручения G называется *однородной* (типа t), если все ее ненулевые элементы имеют один и тот же тип t .

Тип обычно представляется характеристикой, принадлежащей этому типу. Другими словами, пишут

$$t = (k_1, \dots, k_n, \dots),$$

понимая, что характеристику $(k_1, \dots, k_n, \dots)$ можно заменить эквивалентной. Для двух типов t_1 и t_2 полагают $t_1 \leq t_2$, если существуют две такие характеристики χ_1 и χ_2 , принадлежащие типам t_1 и t_2 соответственно, что $\chi_1 \leq \chi_2$.

Обозначим через Π – множество всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Тип t называется p_k -делимым, если для всех характеристик $\chi \in t$, где $\chi = (\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^k, \dots)$, имеем $\chi^{(k)} = \infty$. Заметим, что если G – однородная группа типа t и тип t p_k -делим, то $p_k G = G$.

Семейство групп без кручения $\{G_i\}_{i \in I}$ называется жесткой системой, если

$$\text{Hom}(G_i, G_j) \cong \begin{cases} R \subseteq \mathbf{Q}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Далее в работе под словом группа будем понимать абелеву группу без кручения.

В настоящей работе рассматривается обобщение понятия вполне транзитивности для групп без кручения.

Определение 1 [12]. Пусть G – группа без кручения и $k \in \mathbf{N}$. Группу G назовем k -вполне транзитивной, если для любых двух кортежей длины k $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ элементов группы G из выполнения условий

- (1) $\chi(x_i) \leq \chi(y_i)$, $i = \overline{1, k}$;
- (2) типы $t(x_i)$ и $t(x_j)$ несравнимы при $i \neq j$

следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$ группы G со свойством $\theta(x_i) = y_i$, $i = \overline{1, k}$.

При $k = 1$ получаем понятие вполне транзитивной группы.

Кортеж X , удовлетворяющий условию (2) определения 1, назовем t -независимым. Наибольшую длину t -независимого кортежа группы G будем называть t -длиной и обозначать $k_t(G)$. К примеру, t -длина всякой однородной группы равна 1. В случае, если в группе G для любого $k \in \mathbf{N}$ существует t -независимый кортеж длины k , будем считать, что $k_t(G) = \infty$. Ясно, что при $k > k_t(G)$ группа G является k -вполне транзитивной по определению. Тогда очевидно, что всякая однородная группа (в том числе делимая и ранга 1) является k -вполне транзитивной для любого $k > 1$.

Покажем, что условие (2) определения 1 нельзя заменить условием независимости элементов кортежа X .

Пусть G – группа ранга, не меньшего двух, $k > 1$; $a, b \in G$, причем $\chi(a) < \chi(b)$ и элементы a, b независимы.

Полагаем $x_1 = a + b$, $x_2 = a$, $y_1 = b$, $y_2 = a$. Если $r(G) = 2$, то в группе G нет элементов, независимых с (x_1, x_2) . Если же $r(G) > 2$, то в качестве элементов $x_3, x_4, \dots, x_k$ выберем элементы, независимые с a, b . Тогда полагаем $y_i = x_i$, $i = \overline{3, k}$. Ясно, что для кортежей $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$; $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ условие (1)

определения 1 выполнено. Также, по построению, элементы кортежа X независимы. Предположим, существует эндоморфизм $\theta \in E(G)$ группы G , переводящий элементы кортежа X в элементы кортежа Y . Тогда получаем

$$\theta(x_1) = \theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b) = y_1 = b \text{ и } \theta(x_2) = \theta(a) = y_2 = a.$$

Учитывая оба равенства, приходим к соотношению $\theta(b) = b - a$.

Рассмотрим характеристики элементов из этого равенства:

$$\chi(\theta(b)) = \chi(b-a) = \inf(\chi(a); \chi(b)) \leq \chi(a) < \chi(b).$$

Приходим к противоречию, так как эндоморфизм не может понижать характеристики. ■

Укажем некоторые свойства t -длин прямых сумм групп без кручения.

Пусть $G = A \oplus B$. Тогда

$$1. \quad k_t(G) \geq k_t(A).$$

Действительно, если $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ — t -независимый кортеж элементов группы A , то X также t -независимый кортеж группы G , значит $k_t(G) \geq k$.

2. Если для любых элементов $a \in A, b \in B$ типы $t(a)$ и $t(b)$ несравнимы, то $k_t(G) \geq k_t(A) + k_t(B)$.

Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ — t -независимый кортеж группы A , $Y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ — t -независимый кортеж группы B . Поскольку типы элементов групп A и B несравнимы, кортеж $Z = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l)$ также t -независим, т.е. $k_t(G) \geq k + l$.

3. Если для любых элементов $a \in A, b \in B$ типы $t(a)$ и $t(b)$ сравнимы, то $k_t(G) = \max(k_t(A); k_t(B))$.

Для определенности будем считать, что $k_t(B) \geq k_t(A)$. Пусть $Y = (y_1, y_2, \dots, y_l)$ — t -независимый кортеж группы B наибольшей длины. Рассмотрим кортеж $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_l, a)$, где $a \in A$. Поскольку типы любых элементов групп A и B сравнимы, кортеж $\bar{Y}$ не является t -независимым, т.е. в группе G нет t -независимого кортежа длины, большей чем l .

Приведем оценку верхней границы t -длины вполне разложимой группы конечного ранга. Для этого потребуется следующее понятие.

Семейством Шпернера множества E называется семейство подмножеств F множества E , в котором ни один элемент не является подмножеством другого. Другими словами, если $X, Y \in F$, то $X \not\subset Y$ и $Y \not\subset X$.

Теорема Шпернера [13]. Для любого семейства Шпернера F подмножеств множества мощности n справедливо

$$|F| \leq C_n^m, \text{ где } m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Рассмотрим теперь данный результат в контексте вопроса о t -длине вполне разложимой группы конечного ранга.

Лемма 1. Пусть $G = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ — вполне разложимая группа ранга n , $r(A_i) = 1$. То-

гда $k_t(G) \leq C_n^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

Доказательство. Действительно, пусть для некоторого $k \in N$ имеется кортеж элементов группы G $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Для t -независимости кортежа X необходимо, чтобы индексное множество $I(x_i)$ не являлось подмножеством множества $I(x_j)$ для всех $j \neq i$. Другими словами, необходимо, чтобы индексные множества $I(x_i)$, $i = \overline{1, k}$, образовывали семейство Шпернера для множества $\{1, 2, \dots, n\}$. По теореме Шпернера, наибольшее число таких множеств для вполне разложимой группы G ранга n равно $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Таким образом, $k_t(G) \leq C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. ■

Замечание. Верхняя оценка достигается, например, для групп вида $G = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, где $A_i \cong \mathcal{Q}_{p_i}$.

Поскольку вполне разложимая группа k -вполне транзитивна при $k > k_t(G)$, далее в тексте для вполне разложимых групп ранга n , в силу теоремы Шпернера, полагаем $k \leq C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Рассмотрим вопрос о k -вполне транзитивности вполне разложимых групп из некоторых классов.

Теорема 2. Пусть $G = A_1 \oplus A_2$, где $r(A_1) = r(A_2) = 1$. Тогда G является k -вполне транзитивной для всех $k > 1$.

Доказательство. Ясно, что при $k > 2$ в группе G нет t -независимого кортежа длины k . Поэтому при $k > 2$ группа G является k -вполне транзитивной по определению.

Пусть $k = 2$. В случае если типы $t(A_1)$ и $t(A_2)$ сравнимы, в группе G нет t -независимых кортежей длины 2, тогда G по определению 2-вполне транзитивна.

Пусть $t(A_1)$ и $t(A_2)$ несравнимы. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ элементов группы G , удовлетворяющие условиям (1), (2) определения 1. В силу того, что кортеж X t -независим, заключаем, что x_1 и x_2 принадлежат различным прямым слагаемым A_i , $i = 1, 2$, ранга 1. Не умаляя общности, можно считать, что $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$. Тогда для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ справедливо $\chi(a_1 + a_2) \leq \chi(x_1)$ и $\chi(a_1 + a_2) \leq \chi(x_2)$. Поэтому из выполнения условия (1) определения 1 для кортежей X , Y и из несравнимости типов $t(A_1)$ и $t(A_2)$ заключаем, что $y_1 \in A_1$, $y_2 \in A_2$.

Поскольку всякая группа ранга 1 является вполне транзитивной, существуют эндоморфизмы $\theta_1 \in E(A_1)$, $\theta_2 \in E(A_2)$ со свойствами $\theta_i(x_i) = y_i$ ($i = 1, 2$). Рассмотрим эндоморфизм θ группы G , действующий по правилу: для любого $g \in G$, $g = a_1 + a_2$, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ полагаем $\theta(g) = \theta_1(a_1) + \theta_2(a_2)$. Тогда получаем: $\theta(x_i) = \theta_i(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Таким образом, искомый эндоморфизм найден. ■

Для произвольной вполне разложимой группы ранга 3 уже нет однозначного ответа о k -вполне транзитивности. Приведем примеры.

1. Рассмотрим группу $G = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, где $r(A_1) = r(A_2) = r(A_3) = 1$ и $t(A_1) = (0, \infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$; $t(A_2) = (\infty, 0, \infty, \dots, \infty, \dots)$; $t(A_3) = (\infty, \infty, 0, \dots, \infty, \dots)$. Покажем, что G не является 3-вполне транзитивной. Пусть элементы $a \in A_1, b \in A_2, c \in A_3$ имеют наименьшие характеристики в соответствующих группах. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3)$, элементов группы G , где $x_1 = a + b, x_2 = b + c, x_3 = a + c, y_1 = x_1, y_2 = b + x_2, y_3 = x_3$. Запишем характеристики элементов кортежа X :

$$\chi(x_1) = \chi(a + b) = (0, 0, \infty, \infty, \infty, \dots);$$

$$\chi(x_2) = \chi(b + c) = (\infty, 0, 0, \infty, \infty, \dots);$$

$$\chi(x_3) = \chi(a + c) = (0, \infty, 0, \infty, \infty, \dots).$$

Видим, что кортеж X удовлетворяет условию (2) определения 1. Кортежи X, Y по построению удовлетворяют условию (1).

Предположим, группа G 3-вполне транзитивна. Тогда существует $\theta \in E(G)$, что $\theta(x_i) = y_i, i = \overline{1, 3}$. Поскольку прямые слагаемые $\{A_1; A_2; A_3\}$ образуют жесткую систему, получаем, что $\theta(a) \in A_1, \theta(b) \in A_2, \theta(c) \in A_3$. Но тогда $\theta(x_1) = \theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b) = y_1 = a + b$, откуда $\theta(b) = b$ и $\theta(x_2) = \theta(b + c) = \theta(b) + \theta(c) = y_2 = 2b + c$, откуда $\theta(b) = 2b$. Приходим к противоречию. ■

2. Рассмотрим теперь группу $G = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, где $r(B_1) = r(B_2) = r(B_3) = 1$ и $t(B_1) = (\infty, 0, 0, \dots, 0, \dots)$; $t(B_2) = (0, \infty, 0, \dots, 0, \dots)$; $t(B_3) = (0, 0, \infty, 0, \dots, 0, \dots)$. Заметим, что для любых ненулевых элементов $a \in B_1, b \in B_2, c \in B_3$ имеет место равенство $t(a + b) = t(a + c) = t(b + c) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$. Таким образом, если кортеж $X = (x_1, x_2, x_3)$ является t -независимым, то, не умаляя общности, можем считать, что $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2, x_3 \in B_3$.

Пусть кортежи $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3)$ элементов группы G удовлетворяют условиям определения 1. В силу приведенных рассуждений, заключаем, что $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2, x_3 \in B_3$. Тогда из выполнения условия (1) определения 1 следует, что $y_1 \in B_1, y_2 \in B_2, y_3 \in B_3$.

Таким образом, получаем, что $\chi(x_i) \leq \chi(y_i), i = \overline{1, 3}; x_1, y_1 \in B_1, x_2, y_2 \in B_2, x_3, y_3 \in B_3$. Из вполне транзитивности групп $B_1; B_2; B_3$ следует существование эндоморфизмов $\theta_1 \in E(B_1); \theta_2 \in E(B_2); \theta_3 \in E(B_3)$, со свойствами: $\theta_i(x_i) = y_i, i = \overline{1, 3}$.

Рассмотрим эндоморфизм $\theta \in E(G)$ группы G , действующий по правилу: для любого элемента $g = a_1 + a_2 + a_3, a_1 \in B_1, a_2 \in B_2, a_3 \in B_3$, имеем $\theta(g) = \theta_1(a_1) + \theta_2(a_2) + \theta_3(a_3)$.

Тогда для элементов кортежей X, Y получаем $\theta(x_i) = \theta_i(x_i) = y_i, i = \overline{1, 3}$. Искомый эндоморфизм найден, следовательно, группа G – 3-вполне транзитивна. ■

Приведем критерий вполне транзитивности для однородно разложимых (в частности, вполне разложимых) групп. Для этого понадобится следующее определение:

Определение 2 [4]. Будем говорить, что однородно разложимая группа $G = \bigoplus_{i \in T} G_i$ удовлетворяет условию контрастности для типов, если для всяких двух типов $t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2$ и любого простого числа p , такого, что $pG_{t_1} \neq G_{t_1}$, имеет место $pG_{t_2} = G_{t_2}$.

Предложение 3 [15]. Однородно разложимая редуцированная абелева группа $G = \bigoplus_{i \in T} G_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда каждая однородная компонента ее канонического разложения вполне транзитивна и G удовлетворяет условию контрастности для типов.

Следствие 4 [15]. Вполне разложимая группа $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию контрастности для типов.

Далее, нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольной группы без кручения G обозначим $\pi(G) = \{p \in \Pi; pG \neq G\}$.

Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – прямая сумма групп без кручения $A_i, \pi_i \in E(G)$ – проекция группы G на прямое слагаемое $A_i, i \in I$. Для любого элемента $g \in G$ введем следующее множество индексов: $I(g) = \{i \in I : \pi_i(g) \neq 0\}$.

Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – однородно разложимая группа. Для всякого $J \subset I$ обозначим $t_J = \inf_{i \in J} t(A_i)$. В частности, если $J = \{i\}, i \in I$, то $t_J = t_i = t(A_i)$.

Рассмотрим вопрос о k -вполне транзитивности вполне разложимых групп, имеющих следующую структуру. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне разложимая группа, $r(A_i) = 1$, причем типы $t(A_i)$ и $t(A_j)$ несравнимы при $i \neq j$. Другими словами, множество прямых слагаемых ранга 1 $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему групп.

Для вполне разложимых групп с указанной структурой справедливы следующие результаты.

Теорема 5. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне разложимая группа, $r(A_i) = 1$, множество $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему. Если группа G является k -вполне транзитивной для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то для любых конечных подмножеств $J_1, J_2, \dots, J_k \subset I$, таких, что тип t_{J_n} несравним с типом t_{J_m} , выполнено $J_n \cap J_m = \emptyset$ при $m \neq n$.

Доказательство. Пусть подмножества $J_1, J_2, \dots, J_k \subset I$ конечны и таковы, что тип t_{J_n} несравним с типом t_{J_m} при $m \neq n$. Для всех $i = \overline{1, k}$ обозначим $G_i = \bigoplus_{j \in J_i} A_j$ и $x_i \in G_i$, такой, что $I(x_i) = J_i$. Предположим, для некоторых $m, n = \overline{1, k}$ $J_m \cap J_n \neq \emptyset$. Тогда найдется $r \in J_m \cap J_n$. В силу выбора элементов x_i получаем, что $x_m = a_r + \bar{a}$; $x_n = b_r + \bar{b}$, где $a_r, b_r \in A_r$ и $r \notin I(\bar{a}); r \notin I(\bar{b})$. Тогда существуют $u, v \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$ua_r = vb_r. \quad (*)$$

Рассмотрим кортеж $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ элементов группы G . Из условий теоремы следует, что X t -независим. Выберем элементы кортежа $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ следующим образом: при $i \neq m, i \neq n$ полагаем $y_i = x_i$, $y_m = a_r$, $y_n = 2b_r$. Ясно, что кортежи X и Y удовлетворяют условиям определения 1. Тогда, в силу k -вполне транзитивности группы G , существует эндоморфизм $\theta \in E(G)$, такой, что $\theta(x_i) = y_i, i = \overline{1, k}$. Рассмотрим данные равенства подробнее при $i = m, i = n$:

$$\theta(x_m) = \theta(a_r + \bar{a}) = \theta(a_r) + \theta(\bar{a}) = y_m = a_r,$$

$$\theta(x_n) = \theta(b_r + \bar{b}) = \theta(b_r) + \theta(\bar{b}) = y_n = 2b_r.$$

Поскольку семейство прямых слагаемых $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему, заключаем, что

$$\theta(a_r) = a_r \text{ и } \theta(b_r) = 2b_r. \quad (**)$$

Из равенств (*) и (**) получаем

$$ua_r = u\theta(a_r) = \theta(ua_r) = \theta(vb_r) = v\theta(b_r) = 2vb_r.$$

Приходим к противоречию, то есть $J_n \cap J_m = \emptyset$ при $m \neq n$. ■

Следствие 6. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне разложимая группа, $r(A_i) = 1$, множество $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему. Если группа G 2-вполне транзитивна, то для любых различных индексов $m, n, k \in I$ тип $t(A_m) \cap t(A_n)$ сравним с типом $t(A_m) \cap t(A_k)$.

Доказательство. Предположим противное, то есть для некоторых $m, n, k \in I$ типы $t(A_m) \cap t(A_n)$ и $t(A_m) \cap t(A_k)$ несравнимы. Тогда типы элементов $a_m + a_n$ и $a_m + a_k$, где $a_i \in A_i, a_j \in A_j, a_l \in A_l$, также несравнимы. Причем $I(a_m + a_n) \cap I(a_m + a_k) = m$, что противоречит утверждению теоремы 5. ■

Предложение 7. Если вполне разложимая группа $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $r(A_i) = 1$, множество $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему, вполне транзитивна, то для любых элементов $a, b \in G$, из $\chi(a) \leq \chi(b)$ следует $I(b) \subset I(a)$.

Доказательство. Пусть $a, b \in G$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$. Из вполне транзитивности группы G следует существование $\theta \in E(G)$, такого, что $\theta(a) = b$.

Получаем $b = \theta(a) = \theta(\sum_{i \in I(a)} a_i) = \sum_{i \in I(a)} \theta(a_i) \in \bigoplus_{i \in I(a)} A_i$, то есть $I(b) \subset I(a)$. ■

Учитывая приведенные выше результаты, получаем следующие факты.

Теорема 8. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне разложимая группа, $r(A_i) = 1$, множество $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему. Группа G k -вполне транзитивна для всех $k \in N$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

(А) группа G удовлетворяет условию контрастности для типов;

(Б) для любых двух элементов $a, b \in G$ с несравнимыми типами выполнено $I(a) \cap I(b) = \emptyset$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G является k -вполне транзитивной для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда, так как G является вполне транзитивной, в силу утверждения предложения 3 G удовлетворяет условию контрастности для типов, и, так как G является 2-вполне транзитивной, из теоремы 5 при $k=2$ следует выполнение условия (Б).

Достаточность. Пусть для группы G выполнено (А) и (Б). Из предложения 3 следует, что G является вполне транзитивной. Докажем, что G k -вполне транзитивна для всех $k \geq 2$.

Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ – кортежи элементов группы G , удовлетворяющие условиям определения 1. Из условия (1) определения 1 и условия (Б) теоремы следует, что при $i \neq j$ $I(x_i) \cap I(x_j) = \emptyset$. Обозначим через

$$I_i = I(x_i), G_i = \bigoplus_{j \in I(x_i)} A_j, \bar{I} = I \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k I_i \right), \bar{G} = \bigoplus_{i \in \bar{I}} A_i. \text{ Тогда } G = \bigoplus_{i=1}^k G_i \oplus \bar{G}.$$

Из вполне транзитивности группы G следует, что всякая G_i также вполне транзитивна и, из условия (2) определения 1 и по предложению 7, что $I(y_i) \subset I(x_i)$, то есть $y_i \in G_i$. Тогда существуют $\theta_i \in E(G_i)$ со свойством

$$\theta_i(x_i) = y_i, i = \overline{1, k}. \text{ Рассмотрим эндоморфизм } \theta = \sum_{i=1}^k \theta_i \pi_i \in E(G), \text{ где } \pi_i \in E(G) -$$

проекция группы G на прямое слагаемое $G_i, i = \overline{1, k}$. Тогда по построению имеем $\theta(x_i) = \theta_i(x_i) = y_i$. ■

Теорема 9. Пусть $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – вполне разложимая группа, $r(A_i) = 1$, множество $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему и $k \in \mathbb{N}$. Группа G k -вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых конечных множеств $J_1, J_2, \dots, J_k \subset I$, таких, что типы t_{J_m} и t_{J_n} несравнимы при $m \neq n$, выполнены условия

(I) $J_n \cap J_m = \emptyset$ при $m \neq n$;

(II) Группы $G_m = \bigoplus_{i \in J_m} A_i$ удовлетворяют условию контрастности для типов

$(m = \overline{1, k})$;

(III) Если для конечного множества индексов $J \subset I$ и натурального $m = \overline{1, k}$ справедливо $t_J \geq t_{J_m}$ то $J \subset J_m$.

Доказательство. Необходимость. Выполнение условия (I) следует из теоремы 5.

Докажем, что группы $G_m = \bigoplus_{i \in J_m} A_i$ вполне транзитивны. Пусть $a, b \in G_m$ и $\chi(a) \leq \chi(b)$. Построим кортежи $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ следующим образом. При $i \neq m$ выберем $x_i \in G_i$ так, чтобы $I(x_i) = J_i$; $y_i = x_i$, $x_m = a$, $y_m = b$. Поскольку группа G является k -вполне транзитивной, существует $\theta \in E(G)$, что $\theta(x_i) = y_i$. Рассмотрим сужение $\theta_m = \theta|_{G_m}$. Так как $\{A_i\}_{i \in I}$ образует жесткую систему, $\theta_m \in E(G_m)$. Получаем, что $\theta_m(a) = b$, то есть G_m вполне транзитивна.

Покажем, что условие (III) также выполнено. Пусть для некоторых $J \subset I$ и $m = \overline{1, k}$ справедливо $t_J \geq t_{J_m}$. Тогда существуют элементы $x \in G_m, y \in \bigoplus_{i \in J} A_i, I(x) = J_m; I(y) = J$, для которых выполнено $\chi(x) \leq \chi(y)$. Построим кортежи $X = (x_1, x_2, \dots, x_k), Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$. При $i \neq m$ выберем $x_i \in G_i$ так, чтобы $I(x_i) = J_i, y_i = x_i, x_m = x, y_m = y$. Ясно, что X и Y удовлетворяют условиям определения 1. Тогда, из k -вполне транзитивности группы G следует существование эндоморфизма $\theta \in E(G)$ со свойством $\theta(x_i) = y_i$. Но тогда $y = \theta(x) \in G_m$, то есть $J = I(y) \subset I(x) = J_m$.

Достаточность. Пусть условия (I), (II) и (III) выполнены. Покажем, что G является k -вполне транзитивной. Рассмотрим кортежи $X = (x_1, x_2, \dots, x_k), Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ элементов группы G , удовлетворяющие условиям определения 1. Для всякого $m = \overline{1, k}$ обозначим $J_m = I(x_m), \overline{J_m} = I(y_m), G_m = \bigoplus_{i \in J_m} A_i, \overline{G_m} = \bigoplus_{i \in \overline{J_m}} A_i$. Из условия (II) следует, что группы G_m вполне транзитивны. Значит, существуют $\theta_m \in E(G_m)$, такие, что $\theta_m(x_m) = y_m, m = \overline{1, k}$. Рассмотрим эндоморфизм $\theta = \sum_{m=1}^k \theta_m \pi_m$ группы G , где $\pi_m \in E(G)$ – проекция группы G на прямое слагаемое G_m . Тогда получаем

$$\theta(x_i) = \sum_{m=1}^k \theta_m \pi_m(x_i) = \theta_i(x_i) = y_i,$$

значит искомым эндоморфизм найден. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplansky I.* Infinite Abelian Groups. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.
2. *Крылов П.А.* О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник асп. работ по матем. Томск, 1973. С. 15–20.
3. *Гриншпон С.Я., Мисяков В.М.* О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. – Томск, 1986. – С. 12–27.
4. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. №2. С. 407–473.
5. *Гриншпон С.Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск. 1982. С. 56–92.
6. *Крылов П.А.* Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 5. С. 549–560.
7. *Чехлов А.Р.* О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 714–719.
8. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
9. *Grinshpon S.Ya., Krylov P.A.* Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. 2005. V. 128. No. 3. P. 2894–2997.
10. *Carroll D.* Multiple transitivity in abelian groups // Arch. Math. 1994. V. 63. P. 9–16.
11. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.

12. *Рогозинский М.И.* k -полная транзитивность абелевых групп без кручения // Наука и образование: 13 Всерос. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 2009. С. 14–17.
13. *Engel K.* Sperner theory. Camb. Univ. Press, 1997.
14. *Рогозинский М.И.* k -полные транзитивные абелевы группы без кручения // Современные проблемы математики и механики: Материалы II Всерос. мол. науч. конф. Томск, 2011. С. 41–44.
15. *Гриншпон С.Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1982. С. 56–92.

Статья поступила 02.07.2012г.

Rogozinsky M. I. ON k -FULL TRANSITIVITY OF COMPLETELY DECOMPOSABLE TORSION FREE ABELIAN GROUPS. In this work, we define the notion of k -fully transitive torsion free abelian groups. The problem of multiple transitivity of completely decomposable torsion free abelian groups from some classes is studied.

Keywords: abelian group, k -full transitivity

ROGOZINSKY Mikhail Ivanovich (Tomsk State University)

E-mail: Rogozinsky_mikhail@mail.ru