

УДК 532.516

К.Б. Джакупов

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПУЛЬСАЦИЙ  
НА ВИХРЕВЫЕ СЛЕДЫ ЗА ПЛАСТИНАМИ**

Исследовано влияние пульсаций на течение в следе. Представлены поля актуальных и пульсационных скоростей при обтекании вязкой несжимаемой жидкостью ортогонально и с наклоном к направлению потока поставленных пластин. Численное моделирование осуществлено уравнениями Навье – Стокса, и уравнениями Рейнольдса совместно с уравнениями для пульсаций. Установлена связь между безразмерным периодом осреднения и масштабами случайных возмущений скоростей во внешнем потоке.

**Ключевые слова:** гидродинамика, турбулентность, ламинарное, пульсации, скорость, давление.

Расчет турбулентных течений полуэмпирическими моделями, содержащими множество констант, универсальность и физическая содержательность которых подвергается сомнению в [1, 2] и др., дает информацию только относительно осредненных величин. Наряду с этим несомненный интерес представляют поля пульсаций гидродинамических величин и их распределение в потоке. Кроме того, для дальнейшего развития методов математического моделирования турбулентных течений необходимым является исследование возможностей тех теоретических моделей, которые заведомо не содержат эмпирических или полуэмпирических констант. В качестве таких в настоящей работе приняты уравнения Навье – Стокса и уравнения Рейнольдса в системе с уравнениями для пульсаций [3]. Объектами для численного экспериментирования выбраны течения в следе за пластинами. Представлены поля актуальных и пульсационных скоростей плоского обтекания несжимаемой вязкой жидкостью пластин, имеющих толщину геометрической точки (нанопластины) и различным образом ориентированных к направлению потока. Выбор такого рода течений связан с тем, что в вихревом следе за такими телами пульсации имеют резко выраженный характер.

Для проведения намеченных расчетов целесообразным оказалось применение уравнений в физических переменных «скорость – давление» [4].

**1. Постановка задачи**

Для моделирования численно решаются соответствующие начально-краевые задачи для уравнений Навье – Стокса

$$\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \rho^{-1}\nabla p = \vec{F} + \nu\Delta\vec{v}, \nabla \cdot \vec{v} = 0, \vec{v}|_{t=0} = \vec{d}, \vec{v}|_S = \vec{\varphi} \tag{1.1}$$

и для осредненных по времени уравнений Рейнольдса

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_t \rangle + \langle (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \rangle + \langle \rho^{-1} \nabla p \rangle = \langle \vec{F} \rangle + \nu \Delta \langle \vec{v} \rangle, \\ \nabla \cdot \langle \vec{v} \rangle = 0, \langle \vec{v} \rangle|_{t=0} = \langle \vec{d} \rangle, \langle \vec{v} \rangle|_S = \langle \vec{\varphi} \rangle. \end{aligned} \tag{1.2}$$

По О. Рейнольдсу актуальная физическая субстанция  $f = \langle f \rangle + f'$  представляется как сумма осредненной  $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t f(\vec{r}, t) dt$  и пульсационной  $f'$  составляющих. Тем самым О. Рейнольдс ввел понятие времени осреднения  $T$  как существенную характеристику турбулентных течений.

Из систем (1.1) и (1.2) естественным образом получаются уравнения для пульсаций [3]:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_t + (\langle \bar{v} \rangle \cdot \nabla) \bar{v}' + (\bar{v}' \cdot \nabla) \langle \bar{v} \rangle + (\bar{v}' \cdot \nabla) \bar{v}' - \langle v'_j \bar{v}' \rangle_{x_j} + \rho^{-1} \nabla p' = \rho \bar{F}' + \nu \Delta \bar{v}', \\ \nabla \cdot \bar{v}' = 0, \bar{v}'|_{t=0} = \bar{d}', \bar{v}'|_S = \bar{\phi}'. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Соответствующее суммирование систем (1.2) и (1.3) приводит к исходным уравнениям Навье – Стокса. Постулируется существование такого периода времени  $T$ , в течение которого осредненные пульсации компонент скоростей, давления и др.

обращаются в нули  $\langle f' \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t f'(\vec{r}, t) dt = 0$  во всех точках потока. Как в системе уравнений Рейнольдса (1.2), так и в систему (1.3) входят пульсационные напряжения  $\langle v'_j \bar{v}' \rangle$ , в силу чего обе системы являются незамкнутыми. Для преодоления данного очевидного парадокса в работе [3] предложено приближенное вычисление интеграла по простой формуле прямоугольника с уточнением:

$$\langle v'_j \bar{v}' \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t v'_j(\vec{r}, t) \bar{v}'(\vec{r}, t) dt = v'_j(\vec{r}, t) \bar{v}'(\vec{r}, t) - \frac{T}{2} \frac{\partial v'_j(\vec{r}, t) \bar{v}'(\vec{r}, t)}{\partial t},$$

обладающей погрешностью порядка квадрата периода осреднения  $O(0,5T^2)$ , т.е. приемлемая точность данной формулы зависит от величины периода осреднения  $T$ .

В результате такой замены выводится замкнутая система, которая в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \bar{v} \rangle_t + (\langle \bar{v} \rangle \cdot \nabla) \langle \bar{v} \rangle + (v'_j \bar{v}')_{x_j} - \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'_j \bar{v}'}{\partial x_j} \right) + \nabla \langle p \rangle = \frac{\langle \bar{F} \rangle}{Fr} + \frac{1}{Re} \Delta \langle \bar{v} \rangle, \\ \bar{v}'_t + (\langle \bar{v} \rangle \cdot \nabla) \bar{v}' + (\bar{v}' \cdot \nabla) \langle \bar{v} \rangle + \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'_j \bar{v}'}{\partial x_j} \right) + \nabla \langle p' \rangle = \frac{\langle \bar{F}' \rangle}{Fr} + \frac{1}{Re} \Delta \langle \bar{v}' \rangle, \\ \nabla \cdot \langle \bar{v} \rangle = 0, \nabla \cdot \bar{v}' = 0, \langle \bar{v} \rangle|_{t=0} = \langle \bar{d} \rangle, \langle \bar{v} \rangle|_S = \langle \bar{\phi} \rangle, \bar{v}'|_{t=0} = \bar{d}', \bar{v}'|_S = \bar{\phi}'. \end{aligned}$$

В эти уравнения кроме известных критериев подобия – чисел Рейнольдса и Фруда  $Re = U_\infty L / \nu$ ,  $Fr = U_\infty^2 / (gL)$  – входит безразмерный период осреднения  $Dg = TU_\infty / L$ , что было неизбежно. Следовательно, при моделировании турбулентных течений должно иметь место подобие и по *периоду осреднения*.

Численные эксперименты с двумерным обтеканием пластин производились следующим образом. Предполагается (для оформления рисунков применены безындексные обозначения  $u \equiv v_1, v \equiv v_2$ ), что в начальный момент времени  $t = 0$  жидкость находится в состоянии покоя:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0;$$

набегающий поток имеет скорости

$$x = 0, u(0, y, t) = U_\infty \exp(-b'/t), v(0, y, t) = 0, b' = \text{const} > 0;$$

на пластинах – условия прилипания и непроницаемости

$$u = 0, u' = 0, \langle u \rangle = 0, v = 0, v' = 0, \langle v \rangle = 0;$$

на выходе потока ставятся «мягкие граничные условия»

$$f_{xx} = 0, \langle f \rangle_{xx} = 0, f'_{xx} = 0, f = u; v; p;$$

на горизонтальных участках границы – условия равномерности потока

$$f_y = 0, \langle f \rangle_y = 0, f'_y = 0, f = u; v;$$

Считается, что начиная с некоторого момента времени  $t^*$  на входе  $x = 0$  появляются пульсационные скорости

$$u'(0, y, t) = \zeta(y, t), v'(0, y, t) = \xi(y, t), |\zeta(y, t)| \ll U_\infty, t \geq t^*,$$

где  $\zeta = \zeta(y, t), \xi = \xi(y, t)$  – заданные функции, имитирующие входящие в поток начальные возмущения (задаются с помощью датчика случайных чисел «random» [3]), осредненные скорости равны скоростям набегающего потока

$$\langle u(0, y, t) \rangle = U_\infty \exp(-b'/t), \langle v(0, y, t) \rangle = 0.$$

Применяются неравномерные сетки  $\bar{\Omega}_h = \{x_i, i = 0, \dots, N_x; y_j, j = 0, 1, \dots, N_y\}$  с шагами  $h_{xi} = x_i - x_{i-1} > 0, i = \overline{1, N_x}, h_{yj} = y_j - y_{j-1} > 0, j = \overline{1, N_y}$ , сочетающиеся с сеткой по времени  $\bar{\Omega}_\tau = \{t_n, n = 0, 1, \dots, N_\tau\}$  с шагом  $\tau, t_n = n\tau$ .

В уравнениях динамики конвективные члены аппроксимируются со 2-м порядком точности с учетом направления потока, в полаявных монотонных разностных схемах для производных уравнения неразрывности и градиентов давления применяется принцип взаимосогласованной аппроксимации. Разностные уравнения для давления решаются итерационным методом [3, 4].

## 2. Некоторые результаты расчетов

### Продольное обтекание пластины

На эюре рис. 1, а представлен укрупненный фрагмент поля актуальной скорости  $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$  в носовой части пластины на момент безразмерного времени  $t_n = n\tau$ , полученный совместным решением уравнений Рейнольдса и уравнений для пульсаций на сетке  $140 \times 40$  с шагом  $\tau = 0,001, n = 11170$ , при значениях безразмерного периода времени  $Dg = 3\tau$  и числа Рейнольдса  $Re = 3\,000\,000$ . На эюре рис. 1, б отображено поле пульсационной скорости  $\vec{v}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$  на тот же момент времени и безразмерных критериев подобия. Течение является сугубо не стационарным и пульсационные поля  $\vec{v}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$  стохастично меняют свои направления и величины. При моделировании течений совместным решением уравнений Рейнольдса и уравнений для пульсаций безразмерные пульсационные скорости

$$u'(0, y, t) = \zeta(y, t), v'(0, y, t) = \xi(y, t), t \geq t^*, |\zeta(y, t)| \approx 10^{-3}, |\xi(y, t)| \approx 10^{-5}$$

вводились с момента времени, как только безразмерная скорость однородного потока достигала значения равного 0,3:  $\langle u(0, y, t^*) \rangle = 0,3$ .

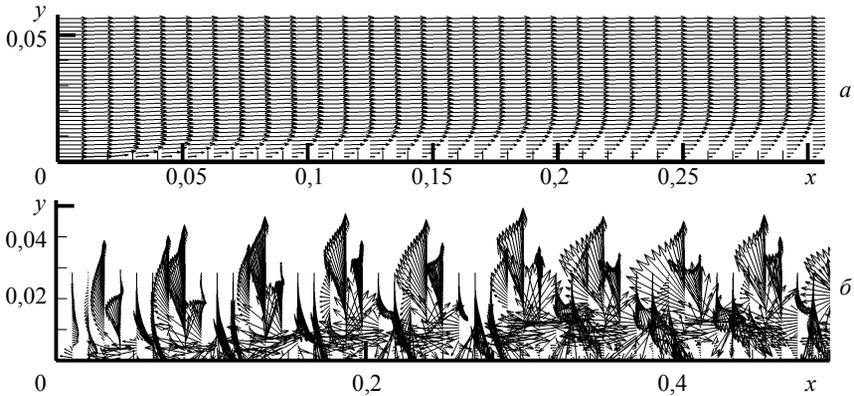


Рис. 1

**Поперечное обтекание двух параллельных пластин**

На рис. 2 эпюра *a* отображает поле скоростей, полученное решением уравнений Навье – Стокса, эпюра *б* представляет актуальное поле скоростей  $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$ , полученное совместным решением уравнений Рейнольдса и уравнений для пульсаций двух вертикально поставленных параллельных пластин при одних и тех же данных  $F_x = 0, F_y = 0, Re = 3000000, N_x = 250, N_y = 150, \tau = 0,001, n = 166500$  с безразмерным периодом осреднения  $Dg = 10\tau$ . Очевидно явное различие линий тока (эпюры *a* и *б*) между этими течениями, что объясняется влиянием пульсационных членов

$$\left\{ \frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} - \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} \right) \right\}_{ij}^n, \left\{ \frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} - \frac{Dg}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} \right) \right\}_{ij}^n.$$

На эпюре рис. 2, *в* нанесены значения пульсационных скоростей.

В начальные моменты времени между пластинами образуются два вихря (рис. 3), которые затем разрушаются и переходят в течения типа рис. 2, *a* и *б*, затем снова появляются и т.д.

На рис. 4 представлены статистические характеристики турбулентного обтекания двух параллельных пластин: на эпюре *a* поле осредненных пульсаций  $\sqrt{\langle u'u' \rangle}$ , на эпюре *б* – поле осредненных пульсаций  $\sqrt{\langle v'v' \rangle}$ , причем осреднение проведено с начала запуска возмущений в поток до момента времени  $t = n\tau, n = 216388, \tau = 0,001$ .

На эпюрах рис. 5 представлены картины обтекания одиночной наклоненной под углом  $45^\circ$  тонкой пластины, полученные совместным решением уравнений Рейнольдса и уравнений для пульсаций при параметрах  $F_x = 0, F_y = 0, Re = 3000000, N_x = 250, N_y = 150, \tau = 0.001, n = 145600$  для безразмерного периода осреднения  $Dg = 100\tau$ . На рис. 5, *a* представлены векторы осредненных скоростей  $\langle \vec{v} \rangle = \langle u \rangle \vec{i} + \langle v \rangle \vec{j}$ , на рис. 5, *б* – векторы пульсационных скоростей  $\vec{v}' = u'\vec{i} + v'\vec{j}$ . Максимальные значения пульсаций в следе пластины достигают порядка  $10^{-2}$ .

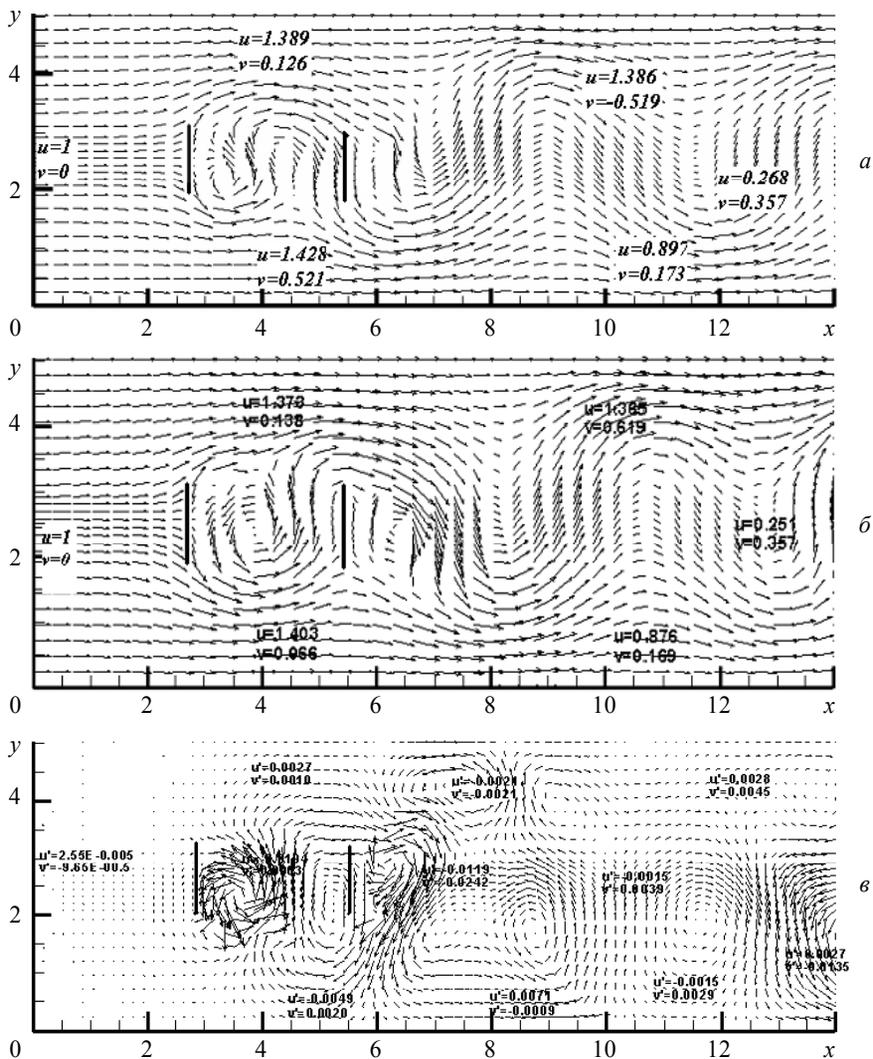


Рис. 2

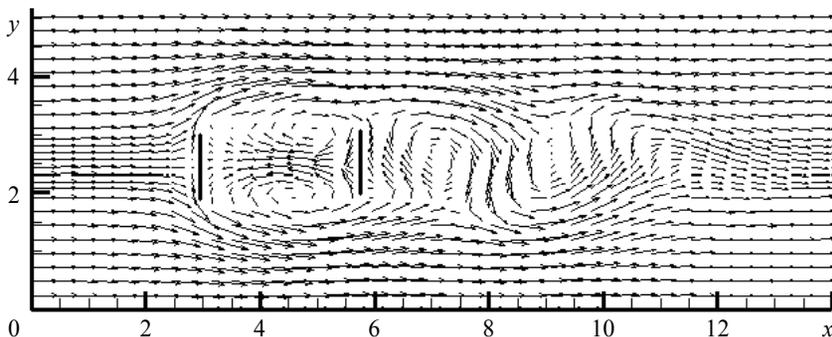
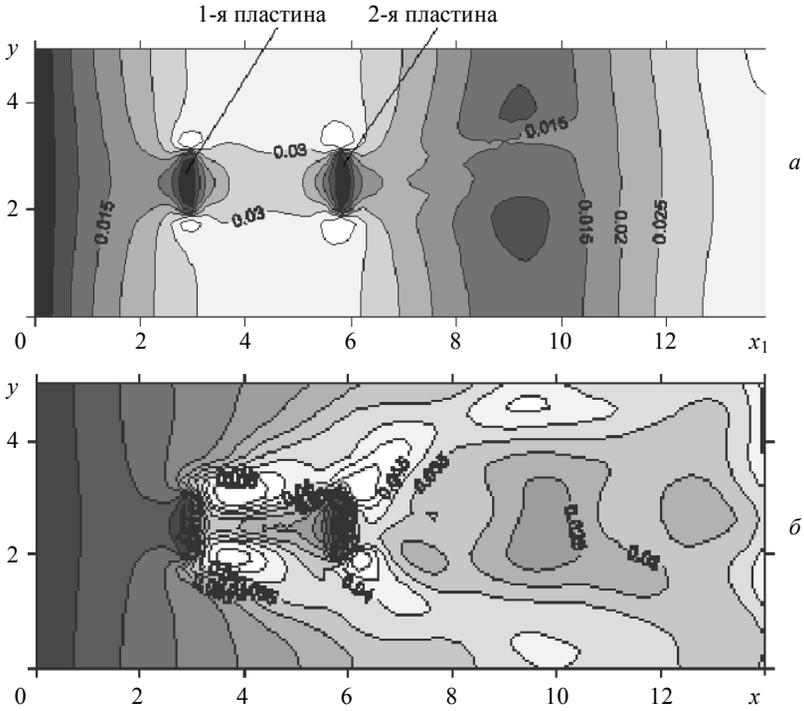


Рис. 3



Фиг. 4

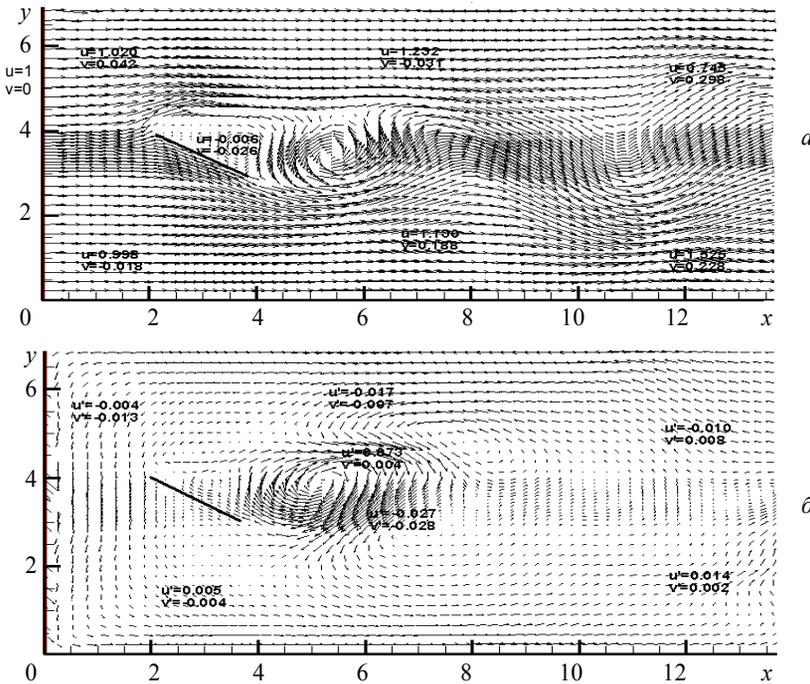


Рис. 5

### Выводы

При совместном решении уравнений Рейнольдса и уравнений для пульсаций влияние пульсаций на увеличение коэффициента сопротивления пластины было установлено в [3]. Точность вычисления  $O(0,5T^2)$  рейнольдсовых напряжений определяется безразмерным периодом осреднения  $Dg$ . Численные эксперименты показывают, что величины возникающих в потоке пульсаций пропорциональны  $Dg$ , крупномасштабным пульсациям соответствует больший период времени  $T$ , мелкомасштабным – меньший. Очевидное преимущество применения для моделирования турбулентных течений уравнений Рейнольдса совместно с уравнениями для пульсаций заключается в отсутствии полуэмпирических констант [1] и в возможности исследования влияния пульсаций на осредненные характеристики течения. Численное экспериментирование с вариацией критерия  $Dg$  и масштабов имеющихся во внешнем потоке возмущений  $\zeta$  и  $\xi$  обеспечивают возможность моделирования конкретных физических процессов, обосновываясь на выводах [2], [6]: «...Турбулентность обнаруживается новыми физическими силами – напряжениями пульсаций. ... Правомерно любое физически оправданное осреднение пульсаций. ... Возникновение турбулентности происходит за короткое время...»

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Турбулентность* (принципы и применения). М.: Мир, 1980. С. 535.
2. Белоцерковский О.М., Конохов А.В., Опарин А.М. и др. О структурировании хаоса // ЖВММФ. 2011. Т. 51. № 2. С. 237–250.
3. Джакупов К.Б. Численный расчет турбулентного обтекания пластины с применением уравнений для пульсаций // Известия СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1985. Вып. 1. № 4. С. 61–67.
4. Джакупов К.Б. Численный расчет течений газа при малых числах Маха во входной секции и камере охлаждения топочного модуля // Известия СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1985. Вып. 2. № 10. С. 27–33.
5. Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. Алматы: Типография «К-2», 2011. С. 300.
6. Академик С.С. Кутателадзе. Избранные труды. Новосибирск: Наука, 1989. С. 423.

Статья поступила 03.09.2012 г.

*Jakupov K.B.* NUMERICAL SIMULATION OF THE INFLUENCE OF PULSATIONS ON VORTEX TRACES AFTER PLATES. Influence of pulsations on the flow in a trace is investigated. Fields of actual and pulsation velocities are presented for the case of a flow of a viscous incompressible liquid along plates mounted orthogonally to the direction of the flow and with an inclination to it. Numerical modeling is carried out by the Navier-Stokes and Reynolds equations together with the equations for pulsations. The connection between the dimensionless period of averaging and scales of random perturbations of velocities in an external stream is established.

Keywords: hydrodynamics, turbulence, laminar, pulsations, speed, pressure

*JAKUPOV Kenes Bajkenovich*

(Institut of Matematik, Informatik, Mechanik, Almaty, Kazakstan)

E-mail: jakupovKB@mail.ru