

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрен класс обратных отображений к классу голоморфных однолистных нормированных в круге функций, имеющих p -кратную симметрию вращения относительно начала координат. Для этого класса, используя метод параметрических продолжений, получены оценки тейлоровских коэффициентов.

Пусть $D, 0 \in D$, — конечная односвязная область в C_w , обладающая p -кратной симметрией вращения относительно точки $w = 0$, $\beta_0, 0 < \beta_0 < \infty$, — конформный радиус области D относительно точки $w = 0$ и $TS_p(D, \beta)$ — совокупность плоских односвязных областей $B, 0 \in B$, принадлежащих D , имеющих фиксированный конформный радиус $\beta, 0 < \beta \leq \beta_0$, относительно точки $w = 0$ и обладающих p -кратной симметрией вращения относительно точки $w = 0$. Обозначим через

$$z = q(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kp+1}^{(p)} w^{kp+1}, \quad b_1^{(p)} = \frac{1}{\beta} > 0$$

функцию, однолистно и конформно отображающую область $B \in TS_p(D, \beta)$ на $E = \{z: |z| < 1\}$.

Совокупность функций $q(w)$, изоморфную множеству областей $B \in TS_p(D, \beta)$, каждая из которых обратна некоторой функции класса $S_p(D, \beta)$, будем также обозначать $TS_p(D, \beta)$. Если $q(w) \in TS_p(D, \beta)$, то она голоморфна в некоторой содержащей начало координат подобласти области D и при надлежащем выборе подобласти однолистно отображает ее на круг E , причем $q(0) = 0, q'(0) = 1/\beta > 0$.

Каждую область $B \in TS_p(D, \beta)$ можно рассматривать как ядро (относительно точки $w = 0$) семейства областей, получающихся проведением в D переменных разрезов по непроходящим через начало координат простым дугам Жордана, один из концов которых принадлежит границе области D , и обладающих p -кратной симметрией вращения относительно точки $w = 0$. В силу этого оценка $|b_{np+1}|$ ($n = 1, 2, \dots$) на классе $TS_p(D, \beta)$ совпадает с оценкой $|b_{np+1}|$ на подмножестве функций из $TS_p(D, \beta)$, отображающих однолистно и конформно такое аппроксимирующее семейство областей на E .

Известно [1], что для каждой функции $q(w)$, входящей в это семейство при D , отличной от C_w , существует кусочно-непрерывная функция $\mu(\tau), 0 < \tau < \tau^0, |\mu(\tau)| = 1$, такая, что $q(w)$ можно представить в виде

$$q(w) = \varphi(h(w), \tau^0), \quad (1)$$

где

$$h(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{kp+1}^{(p)} w^{kp+1}, \quad \gamma_1^{(p)} = \frac{1}{\beta_0} > 0 \quad (2)$$

однолистно и конформно отображает D на E и $\varphi(w, \tau)$ — интеграл уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial w} w \frac{\mu^p(\tau) + w^p}{\mu^p(\tau) - w^p}, \quad 0 < \tau < \tau^0, w \in E \quad (3)$$

удовлетворяет условию $\varphi(w, 0) = w, |w| < 1$.

Пусть

$$\varphi(w, \tau) = e^{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} c_{kp+1}^{(p)}(\tau) w^{kp+1}, \quad c_1^{(p)}(\tau) = 1. \quad (4)$$

Подставляя разложение (4) в (3), нетрудно получить, что коэффициенты $c_{kp+1}^{(p)}(\tau)$ образуют ре-

шение бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$c_{kp+1}^{(p)'} = (kp) c_{kp+1}^{(p)} + 2 \sum_{r=0}^{k-1} (rp+1) c_{rp+1}^{(p)} (\overline{\mu(\tau)})^{\frac{k-r}{p}}, \quad k=1, 2, \dots \quad (5)$$

Из условия $\varphi(w, 0) = w$ находим начальные условия для системы (5): $c_{kp+1}^{(p)}(0) = 0$.

После введения в (5) обозначения

$$(e^{-\tau} \overline{\mu(\tau)})^p = v(\tau) \quad (6)$$

и замены переменных по формулам

$$y_{kp+1}^{(p)}(\tau) = e^{-kp\tau} c_{kp+1}^{(p)}(\tau), \quad k=1, 2, \dots \quad (7)$$

получим для $y_{kp+1}^{(p)}(\tau)$ на $0 < \tau < \tau^0$ бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$y_{kp+1}^{(p)'} = 2 \sum_{r=0}^{k-1} (rp+1) v^{k-r}(\tau) y_{rp+1}^{(p)}, \quad k=1, 2, \dots \quad (8)$$

с начальными условиями $y_{kp+1}^{(p)}(0) = 0, k=1, 2, \dots$, в которой $y_1^{(p)}(\tau) = 1$.

В дальнейшем будем обозначать через $\{\lambda(w)\}_m$ коэффициент при w^m в разложении в ряд Тейлора некоторой голоморфной в окрестности точки $w = 0$ функции $\lambda(w)$.

Из (1) с использованием (2), (4) и разложения в ряд $q(w)$ получаются формулы

$$b_{np+1}^{(p)} = \sum_{k=0}^n \{h^{kp+1}(\tau)\}_{np+1} e^{(kp+1)\tau^0} y_{kp+1}^{(p)}(\tau^0), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

представляющие коэффициенты функции $q(w)$ через решение системы (8).

Таким образом, задача об оценке $|b_{np+1}|$ ($n=1, 2, \dots$) на классе $TS_p(D, \beta)$ сведена к следующей задаче оптимального управления.

Пусть в трехмерном вещественном евклидовом пространстве (x_1, x_2, x_3) задана поверхность вращения $H = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 = e^{-x_3}, 0 \leq x_3 \leq \tau^0\}$, и пусть N — совокупность кусочно-непрерывных кривых на H , любая из которых пересекается с каждой плоскостью $x_3 = \tau \equiv \text{const}, 0 < \tau < \tau^0$, в единственной точке.

Необходимо найти (при фиксированном n)

$$\sup_{q \in TS_p(D, \beta)} |b_{np+1}| = \sup_{w \in N} \left| \sum_{k=0}^n \{h^{kp+1}(w)\}_{np+1} e^{(kp+1)\tau^0} y_{kp+1}^{(p)}(\tau^0) \right|, \quad (9)$$

где $y_1^{(p)}(\tau) = 1, (y_{rp+1}^{(p)}(\tau), \dots, y_{np+1}^{(p)}(\tau))$ — решение задачи Коши

$$y_{kp+1}^{(p)'} = 2 \sum_{r=0}^{k-1} (rp+1) v^{k-r}(\tau) y_{rp+1}^{(p)}, \\ y_{kp+1}^{(p)}(0) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n$$

с начальными данными на левом конце промежутка $(0, \tau^0)$.

Опираясь на вариационные методы, в частности на теоремы, аналогичные 6,7 п. 37 [1] для класса S_p , докажем теорему существования экстремального управления. Это позволяет заменить в (9) точную верхнюю грань по множеству N на максимум по этому же множеству.

Теорема. Пусть $D \neq \emptyset$ и обладает p -кратной симметрией вращения относительно точки $w = 0$ и функция $h(w)$, $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$ однолистно и конформно отображает D на E . Тогда для коэффициентов функции

$$q(w) = \beta^{-1} w + \sum_{n=1}^{\infty} b_{np+1}^{(p)} w^{np+1} \in TS_p(D, \beta), \quad h'(0) < 1$$

справедливы оценки

$$\sup_{q \in TS_p(D, \beta)} \left| b_{np+1}^{(p)} \right| \leq \sum_{k=0}^n \left| \{ h^{kp+1}(w) \}_{np+1} \right| \left| \left\{ B^{\frac{1}{p}}(w) \right\}_{kp+1} \right|, \quad (10)$$

где

$$B(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m \frac{2(-1)^{m+k} (m+k-1)!}{(k-1)!(k+1)!(m-k)!} e^{kp\tau^0} \right] w^{mp}.$$

Доказательство. Из (8) с учетом начальных условий $y_{kp+1}^{(p)}(0) = 0$, $(k=1, 2, \dots)$ приходим к интегральным уравнениям

$$y_{kp+1}^{(p)}(\tau) = 2 \int_0^{\tau} \sum_{r=0}^{k-1} (rp+1) v^{k-r}(\tau) y_{rp+1}^{(p)}(\tau) d\tau, \quad k=1, 2, \dots,$$

в которых $y_1^{(p)}(\tau) = 1$. Отсюда с учетом (6) следует, что

$$\left| y_{kp+1}^{(p)}(\tau^0) \right| \leq 2 \int_0^{\tau^0} \sum_{r=0}^{k-1} (rp+1) \left| e^{-\tau} \mu(\tau) \right|^{p(k-r)} \left| y_{rp+1}^{(p)}(\tau) \right| d\tau. \quad (11)$$

В оценках (11) знак равенства достигается, если $\mu(\tau) = 1$. Действительно, в этом случае $v(\tau) = |v(\tau)| = e^{-\tau}$ и, как легко установить методом индукции,

$$y_{rp+1}^{(p)}(\tau) = \left| y_{rp+1}^{(p)}(\tau) \right|, \quad r=1, 2, \dots$$

Обозначим через $\varphi_1(w, \tau)$ интеграл уравнения Левнера (3), в котором управляющей функцией является $\mu(\tau) = 1$. Пусть $c_{1, kp+1}^{(p)}(\tau) = \left\{ e^{-\tau} \varphi_1(w, \tau) \right\}_{kp+1}$. Из (7)

вытекает, что для нахождения $\max \left| y_{kp+1}^{(p)}(\tau^0) \right|$ нужно найти $c_{1, kp+1}^{(p)}(\tau^0)$.

Пусть $w = f_1(z, \tau)$ – функция, обратная $\varphi_1(w, \tau)$ при каждом фиксированном τ , $0 \leq \tau < \tau^0$. Функция $w = f_1(z, \tau)$ есть интеграл уравнения

$$\frac{dw}{d\tau} = -w \frac{1+w^p}{1-w^p}, \quad 0 < \tau < \tau^0, \quad (12)$$

с начальным условием $f_1(z, 0) = z$.

Проинтегрируем уравнение (12), устремим τ к τ^0 и найдем функцию $\left[\varphi_1(w, \tau^0) \right]^p$. Повторив рассуждения, изложенные в [2], получим разложение по степеням w :

$$\left[\varphi_1(w, \tau^0) \right]^p = z^p = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m \frac{2(-1)^{m+k+1} (m+k-1)!}{(k-1)!(k+1)!(m-k)!} e^{-kp\tau^0} \right] w^{mp}.$$

Извлекая из $\left[\varphi_1(w, \tau^0) \right]^p$ корень p -й степени, найдем коэффициент при w^{np+1} в разложении его решения $\varphi_1(w, \tau)$ при $\tau = \tau^0$:

$$c_{1, kp+1}^{(p)}(\tau^0) = e^{-\tau^0} \left\{ B^{\frac{1}{p}}(w) \right\}_{kp+1},$$

$$\text{где } B(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m \frac{2(-1)^{m+k} (m+k-1)!}{(k-1)!(k+1)!(m-k)!} e^{kp\tau^0} \right] w^{mp}.$$

Для фиксированных p и n значения $\{B^{1/p}(w)\}_{kp+1}$ ($k=0, 1, \dots, n$) вычисляются с использованием формулы бинома Ньютона. Используя (7), (9) и (11), приходим к неравенствам (10). Теорема доказана.

Из приведенного доказательства видно, что если числа $\{h^{kp+1}(w)\}_{np+1}$ и $\{B^{1/p}(w)\}_{kp+1}$ ($k=0, 1, \dots, n$) вещественны и одинаковых знаков, то оценка (10) является точной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
2. Садритдинова Г.Д. Свойства решений уравнения Левнера с постоянным управлением // Исследования по математическому анализу и алгебре: Сборник научных трудов. Томск: Изд. ТГУ, 2000. С. 129–134.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 5 декабря 1999 г.