УДК 517.54

Т.В. Касаткина

ОБ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА КЛАССЕ С НЕКОТОРОЙ СТРУКТУРНОЙ ФОРМУЛОЙ

Даны оценки коэффициентов на классе функций более общем, чем ограниченные однолистные в единичном круге функции с симметрией вращения. Обобщается теорема Бранжа, дающая положительный ответ относительно гипотезы Бибербаха о коэффициентах.

Пусть M, $M>1$, – некоторое фиксированное число или бесконечность и p – натуральное число. Множество всех голоморфных однозначных в круге $E=\{z: |z|<1\}$ функций $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} C_{kp+1}^{(p)} z^{kp+1}$, $C_1^{(p)}=1$, с p-кратной симметрией вращения вокруг начала и ограниченных в нем, $|f(z)|<M$, обозначают через $S_p(M)$.

Пусть $Q(w)=2\sum_{k=1}^{\infty} Q_k w^k$ – фиксированная голоморфная в точке $w=0$ функция. Рассмотрим множество $T_p(Q, M)$ всех голоморфных функций со структурной формулой $g(z)=f(z)e^{Q(f^p(z))}$, $z\in E$. Множество $T_p(Q, M)$ получается, когда $f(z)$ пробегает $S_p(M)$. При $Q=0$ множество $T_p(Q, M)$ совпадает с классом $S_p(M)$. Функция $g(z)\in T_p(Q, M)$ имеет следующее разложение в окрестности точки $z=0$: $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g_{np+1}^{(p)} z^{np+1}$, $g_1^{(p)}=1$.

Нами найдена оценка сверху для функционала $I(g)=\left|g_{np+1}^{(p)}\right|$ на множестве $T_p(Q, M)$ при произвольно фиксированном $n\in N$. Поскольку $T_1(0,\infty)=S(\infty)=S$, то решенная задача более общая, чем задача о коэффициентах, с которой была связана гипотеза Бибербаха [1].

Теорема. Пусть даны число $M>1$ и голоморфная в точке $w=0$ функция $Q(w)=2\sum_{k=1}^{\infty} Q_k w^k$. Тогда для коэффициентов $g_{np+1}^{(p)}$, $n\in N$ любой функции

$$g(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} g_{np+1}^{(p)} z^{np+1} \in T_p(Q, M)$$

имеют место оценки

$$\left|g_{np+1}^{(p)}\right| \le$$

$$\le (n+1)\exp\left\{-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(1-k^2|Q_k|^2\right)M^{2kp}Y_{n-k+1,\, n+1}(\ln M)\right\},$$

где
$$Y_{s,n+1}(t)=\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{s-r}}{n+1-r}\binom{2n-2r+2}{s-r}\times$$
$$\times\binom{2n-r+2}{r-1}e^{-(n+1-r)pt},\ s=1,\dots,n.$$

Доказательство. Обозначим через $S_p'(M)\subset S_p(M)$ подмножество функций, каждая из которых отображает E на круг $G_M=\{w: |w|<M\}$ с разрезами по p попарно непересекающимся простым дугам $L_1, \dots, L_p$, которые не проходят через точку $w=0$ и оканчиваются на границе круга G_M. Множество $S_p'(M)$ всюду плотно в $S_p(M)$ в топологии равномерной сходимости внутри E. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать ее для функций $g(z)=f(z)e^{Q(f^p(z))}$, $f(z)\in S_p'(M)$.

Пусть $f(z)\in S_p'(M)$. Простую дугу L_κ ($\kappa=1, \dots, p$) зададим уравнением

$$w=e_\kappa\varphi(t),\ (0\le t\le \ln M),\ e_\kappa=e^{2\pi(\kappa-1)/p}.$$

Началу дуги L_κ соответствует $t=0$, а концу этой дуги, принадлежащему окружности $\{w: |w|<M\}$, соответствует $t=\ln M$. Можно считать, что области $G_M(t)=\{w: w\in G_M\backslash L(t)\}$, где $L(t)=\bigcup_{k=1}^{p} L_k(t)$, $L_\kappa(t)=\{w: w=\varphi(\tau), 0\le\tau<t, 0\le t\le \ln M\}$, образуют стандартное семейство областей Левнера. Очевидно, $G_M(t_1)\subset G_M(t_2)$, если $0<t_1<t_2<\ln M$. Обозначим через $\psi(z, t)$ функцию, однолистно и конформно отображающую круг E на $G_M(t)$, $\psi(0,t)=0$, $\psi_z'(0,t)=e^t$. По теореме Каратеодори о ядре семейства областей $\psi(0, t)=f(z)$, $\psi(z, \ln M)=Mz$.

Функция $\psi(z, t)$ дифференцируема по t равномерно относительно z внутри E и удовлетворяет уравнению Левнера $\frac{\partial\psi}{\partial t}=z\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\mu^p+z^p}{\mu^p-z^p}$, где $\mu(t)e_\kappa$ ($\kappa=1, \dots, p$) – прообраз точки $w=\varphi_\kappa(t)$ при отображении функцией $\psi(z, t)$ круга E на область $G_M(t)$. Следовательно, $|\mu(t)|=1$ $(0\le t\le \ln M)$.

Введем функцию

$$\Phi(z,t)=\frac{1}{2}\ln\frac{\psi(z,t)}{e^t z}+\frac{1}{2}Q(\psi^p(z,t)).$$

Разложением по степеням z функции $\frac{1}{2}\ln\frac{\psi(z,t)}{e^t z}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{kp}^{(p)}t(\cdot)z^{kp}$ определяются логарифмические коэффициенты функции $e^{-t}\psi(z,t)\in S_p'(M)$, а при $t=0$ – логарифмические коэффициенты $\gamma_{kp}^{(p)}(0)$ функции $f(z)\in S_p'(M)$. Легко видеть, что $\gamma_{kp}^{(p)}(\ln M)=0$ $(k=1,\dots)$. Коэффициенты разложения в ряд по степеням z функции $\frac{1}{2}Q(\psi^p(z,t))=\sum_{k=1}^{\infty}q_{kp}^{(p)}(t)z^{kp}$ связаны с коэффициентами функции $Q(w)$ формулами $q_{kp}^{(p)}(\ln M)=Q_k M^{kp}$.

Функция $\Phi(z,t)$ в окрестности $z=0$ имеет разложение

$$\Phi(z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{kp}^{(p)}(t)z^{kp},$$

где
$$\Phi_{kp}^{(p)}(t)=\gamma_{kp}^{(p)}(t)+q_{kp}^{(p)}(t);$$

в частности
$$\Phi_{kp}^{(p)}(\ln M)=Q_k M^{kp}.$$

Используя уравнение Левнера, получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\Phi(z, t)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}=\left[z\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{2}\right]\frac{\mu^p+z^p}{\mu^p-z^p}.$$

Отсюда, переходя к разложениям левой и правой частей по степеням z, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{kp}^{(p)\prime}(t)z^{kp}+\frac{1}{2}=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{\infty}kp\Phi_{kp}^{(p)}(t)z^{kp}+\frac{1}{2}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}(z\bar{\mu})^{kp}+\sum_{k=1}^{\infty}(z\bar{\mu})^{kp}\right].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, находим

$$\Phi_{kp}^{(p)\prime}(t)=\sum_{l=1}^{k} pl\Phi_{lp}^{(p)}\bar{\mu}^{(k-l)p}+\sum_{l=1}^{k-1} pl\Phi_{lp}^{(p)}\bar{\mu}^{(k-l)p}+\bar{\mu}^{kp}.$$

Пусть $\beta_k(t)=\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{k} pl\Phi_{lp}^{(p)}\mu^{lp}$, $\beta_0=\frac{p}{2}$. Отсюда следует, что $kp\Phi_{kp}^{(p)}(t)\mu^{kp}(t)=\beta_k(t)-\beta_{k-1}(t)$

и $\Phi_{kp}^{(p)\prime}\mu^{kp}(t)=\beta_k(t)+\beta_{k-1}(t), (k=1,2,\ldots)$.

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений с заданным управлением $\mu(t)$ для коэффициентов $\Phi_{kp}^{(p)}(t)$ в разложении функции $\Phi(z, t)$ при каждом фиксированном $k\in N$.

Введем в рассмотрение систему

$$y_0'=0,$$
$$y_1'=-p(n-1)y_1,$$
$$y_s'=2p\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s+j+1}(n-j)y_j-p(n-s)y_s$$
$$(s=2,\ldots,n-1)$$

линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Обозначим через $Y_n(t)=\{Y_{0,n}(t),\ldots,Y_{s,n}(t),\ldots,Y_{n-1,n}(t)\}$ ее решение, удовлетворяющее начальному условию

$$Y_n(0)=\left\{0,\frac{1}{n-1},\ldots,\frac{s}{n-s},\ldots,\frac{n-1}{n-(n-1)}\right\}.$$

Очевидно, $Y_{0,n}(t)=0$ на $[0;\infty)$. Остальные компоненты общего решения находим обычным образом. В силу формулы суммирования обобщенной гипергеометрической функции ${}_4F_3$ в точке $z=1$

$${}_4F_3\left(\begin{matrix}-k, m-1, m-\frac{1}{2}, 2m+k; 1\\ m, m+\frac{1}{2}, 2m-1\end{matrix}\right)=\frac{(k+1)!}{(2m)_k},$$

следующей из формулы (33) [2. С. 556], получаем представление:

$$Y_{s,n}(t)=\sum_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{s-r}}{n-r}\binom{2n-2r}{s-r}\binom{2n-r}{r-1}e^{-(n-r)pt}$$
$$(s=0,\ldots,n-1).$$

Укажем на свойства функций $Y_{s,n}(t)$. Два из них выражаются равенствами

$$p(k+1)Y_{n-k-1,n}(t)-kpY_{n-k,n}(t)=$$
$$=Y_{n-k-1,n}'(t)+Y_{n-k,n}'(t), k=1,\ldots,n-1;$$
$$Y_{s,n}(\infty)=0\ (s=0,\ldots,n-1),$$

которые легко проверяются. Кроме того, имеет место неравенство $Y_{s,n}'\le 0$ $t\in[0,\infty), s=1,\ldots,n-1$. Доказательство этого неравенства проведено с использованием обобщенных гипергеометрических функций [3]. Неравенство $Y_{s,n}'(t)\le 0$ указывает на монотонное убывание функции $Y_{s,n}(t)$ от $s/(n-s)$ до 0 при возрастании t от 0 до ∞.

Введем функцию

$$B_n(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-k^2\left|\Phi_{kp}^{(p)}(t)\right|^2\right)Y_{n-k,n}(t).$$

В граничных точках промежутка $0\le t\le \ln M$ функция $B_n(t)$ имеет значения

$$B_n(0)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k}\left(1-k^2\left|\Phi_{kp}^{(p)}(0)\right|^2\right),$$
$$B_n(\ln M)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-k^2|Q_k|^2M^{2kp}\right)Y_{n-k,n}(\ln M).$$

Производная $B_n'(t)=\frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\Phi_{kp}^{(p)\prime}(t)\right|^2 Y_{n-k,n}'(t)$ неположительна при любом допустимом управлении $\mu(t)$. Следовательно, с ростом t функция $B_n(t)$ монотонно убывает от значения $B_n(0)$ до значения $B_n(\ln M)$.

Для завершения доказательства теоремы применим к коэффициентам функции $g(z)$ неравенство типа Лебедева–Милина [4], которое устанавливает связь между тейлоровскими и логарифмическими коэффициентами функции $g(z)\in T_p(Q, M)$. Имеем:

$$g_{np+1}^{(p)}\le(n+1)\exp\left\{-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{k}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-k^2\left|\gamma_{kp}^{(p)}(0)+q_{kp}^{(p)}\right|^2\right)\right\}$$

или $$g_{np+1}^{(p)}\le(n+1)\exp\left\{-\frac{1}{n+1}B_{n+1}(0)\right\}.$$

Чтобы получить в правой части этого неравенства величину, не зависящую от выбора $f(z)\in S_p'(M)$, используем неравенство $-B_{n+1}(0)\le -B_{n+1}(\ln M)$ и получим

$$g_{np+1}^{(p)}\le(n+1)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(1-k^2|Q_k|^2M^{2kp})Y_{n+1-k<n+1}(\ln M).\right.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если

$$g(z)=z+C_{p+1}^{(p)}z^{p+1}+\ldots+C_{np+1}^{(p)}z^{np+1}+\ldots\in S_p(M),$$

то

$$C_{np+1}^{(p)}\le(n+1)\exp\left\{-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}Y_{n+1-k,n+1}\ln(M)\right\}(n=1,2,\ldots).$$

Из следствия 1 при $M=\infty$ имеем

Следствие 2. Если

$$g(z)=z+C_{p+1}^{(p)}z^{p+1}+\ldots+C_{np+1}^{(p)}z^{np+1}+\ldots\in S_p,$$

то $$\left|C_{np+1}^{(p)}\right|\le(n+1)\ (n=1,2,\ldots).$$

При $p=1$ это неравенство анонсировалось в [1].

Следствие 3. Если

$$g(z)=z+C_2z^2+\ldots+C_nz^n+\ldots\in S,$$

то $$|C_n|\le n\,(n=2, 3, \ldots).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. V. 154. P. 137–152.
2. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
3. *Александров И.А.* Доказательство Л. де Бранжа гипотезы И.М. Милина и гипотезы Бибербаха // Сиб. мат. ж. 1987. Т. 28, № 2. С. 7–20.
4. *Касаткина Т.В.* О функциях с симметрией вращения // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: Изд-во ТГУ, 1998. С. 23–24.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 20 декабря 1999 г.