

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ГРАДИЕНТА

Для некоторого подкласса отображений с ограниченным потенциалом градиента доказывается, что «обобщенный принцип длины и площади» является характеристическим свойством этих отображений.

Основным методом исследования метрических и граничных свойств отображений из классов $BL^{p,\alpha}(k)$, $BL^{p,\alpha}$, как плоских, так и пространственных, является метод, основанный на систематическом использовании неравенств типа «длины и площади» [1–3]. Возникает вопрос: в какой мере этот метод соответствует природе этих отображений? Для отображений с ограниченными интегралами Дирихле доказано [1, 4], что «обобщенный принцип длины и $BL^{p,\alpha}(k)$, $BL^{p,\alpha}$ площади» является характеристическим свойством этих отображений. Аналогичный результат имеет место для пространственных гомеоморфизмов шара с ограниченным потенциалом градиента [5]. В данной статье мы распространяем соответствующее утверждение на ACL-гомеоморфизмы областей класса K_γ [6].

Пусть R^n – евклидово n -мерное пространство, $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$; B – шар $|x| < 1$; S – его граница в R^n . Если D – область в пространстве R^n , то через ∂D и $\bar{D}$ обозначим соответственно границу и замыкание области D в R^n . Пусть

$$D_r(y) = \{x \in D : |x - y| < r\},$$

$$S_r(y) = \{x \in D : |x - y| = r\}.$$

Область $D \subset R^n$ называется жордановой, если ее граница ∂D гомеоморфна $(n-1)$ -мерной сфере пространства R^n . Область D называется односвязной, если любую замкнутую жорданову кривую, лежащую в D , непрерывным преобразованием можно стянуть в точку.

Можно показать, что каждая компонента множества $S_r(y)$, $S_r(y) \neq \emptyset$ делит односвязную область D ровно на две подобласти. Если $a \in D$, $y \in \partial D$ и $r < |a - y|$, то через $d(y, r)$ обозначим максимальную из компонент множества $D \setminus S_r(y)$, не содержащих точку a и имеющих на своей границе точку y . Пусть $\Gamma_r(y)$ – относительная граница области $d(y, r)$ в D .

Определение 1. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная односвязная жорданова область. Будем говорить, что область D принадлежит классу областей K_γ , $0 < \gamma < 1$, если выполнены следующие условия:

1) для некоторой точки $a \in D$ и каждой точки $y \in \partial D$ существуют такие числа $\alpha(\gamma, y) > 0$ и β , $0 < \beta < \rho(a, \partial D)$, что

$$\int_{\Gamma_r(y)} \frac{ds}{\rho^\gamma(x, \partial D)} \leq c(\gamma, y) r^{n-1-\gamma}, \quad \forall r \in (0, \beta),$$

где $\rho(x, \partial D)$ – евклидово расстояние от точки x до границы области ∂D ; ds – элемент площади сферы;

2) существует натуральное число N такое, что для почти всех $r \in (0, \beta)$ любые две точки $x', x'' \in \Gamma_r(y)$ можно связать на $\Gamma_r(y)$ цепочкой сферических кругов $K_1, K_2, \dots, K_m$ в том смысле, что $K_i \subset \Gamma_r(y)$, $K_i \cap K_{i+1} \neq \emptyset$ для $i=1, 2, \dots, m-1$, $x' \in K_1$, $x'' \in K_m$ и $m \leq N$.

Если $S_r(y) = \Gamma_r(y)$ и коэффициент $\alpha(\gamma, y)$ равномерно ограничен по $y \in \partial D$, то будем говорить, что область D принадлежит классу K_γ^0 .

Теорема 1. Класс K_γ^0 не пуст; шар $B \in K_\gamma^0$, $\forall \gamma \in (0, 1)$.

Доказательство. Очевидно, что условие 2) определения 1 для шара B выполнено. Проверим условие 1).

Пусть $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ – координаты точки $x \in B$ в сферической системе координат с центром в произвольной точке $y \in S$, причем угол φ_1 отсчитывается от направления $\vec{oy}$, $0 < \varphi_1 < \pi/2$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, $i=2, 3, \dots, n-1$.

Легко видеть, что если $x \in S_r(y) = \{x \in B : |x - y| = r\}$, то $\varphi_1 \in [0, \psi)$, где $\psi = \psi(r)$ таково, что

$$|x(r, \psi, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})| = 1 \text{ и } 0 < \psi < \pi/2.$$

Так как при $r \in (0, 1)$ функция

$$|x(r, \psi, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})|^2 = 1 + r^2 - 2r \cos \varphi_1$$

выпукла по $\varphi_1 \in [0, \psi)$ и $\cos \psi = r/2$, то при $0 < \varphi_1 < \psi(r)$

$$|x(r, \psi, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})|^2 \leq (1-r)^2 + \frac{\varphi_1}{\psi} r(2-r) = g(r, \varphi_1).$$

Поэтому, полагая $t = 1 - \sqrt{g}$, получим

$$\int_{S_r(y)} \frac{ds}{\rho^\gamma(x, \partial B)} = \int_{S_r(y)} \frac{ds}{(1-|x|)^\gamma} \leq (2\pi)^{n-1} r^{n-1} \times$$

$$\times \int_0^\psi \frac{d\varphi_1}{(1-\sqrt{g})^\gamma} = (2\pi)^{n-1} r^{n-1} \frac{2\psi}{r(2-r)} \times$$

$$\times \int_0^r \frac{1-t}{t^\gamma} dt \leq \frac{2^{n-1} \pi^n}{1-\gamma} r^{n-1-\gamma},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Легко видеть, что если область $D \subset R^n$ представима как объединение конечного числа шаров из R^n , то $D \in K_\gamma^0$.

Определение 2. Функцию $k(t): (0, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ будем называть ядром, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $k(t)$ непрерывна, не возрастает и $\lim_{t \rightarrow 0+} k(t) = \infty$;

2) $\int_0^\infty k(t) t^{n-1} dt < \infty$.

Определение 3. Будем говорить, что отображение $f: D \rightarrow R^n$, $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ принадлежит классу $BL_M^{p,\alpha}(k)$, $1 < p < \infty$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$, если f непрерывно в области $D \subset R^n$ и имеет в D первые обобщенные производные $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ в смысле С.Л. Соболева, для которых

$$I_{p,\alpha}(f, k, D) = \int_D \Lambda^p(f, x) \rho^\alpha(x, \partial D) k(|x-y|) dx \leq M < \infty$$

для всех точек $y \in \bar{D}$, где

$$\Lambda(f, x) = \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right]^{1/2},$$

ядро $k(t)$ удовлетворяет условию $\int_0^1 k(t) t^{n+\alpha-p-1} dt = \infty$.

Назовем отображение $f: D \rightarrow R^n$ отображением с ограниченным потенциалом градиента, $f \in BL^{p,\alpha}(k)$, если $f \in BL_M^{p,\alpha}(k)$ в D при каком-либо конечном M .

При надлежащем выборе ядер $k(t)$ классы $BL^{p,\alpha}(k)$ включают в себя ограниченные квазиконформные отображения и отображения с ограниченными интегралами Дирихле [3]. Мы опираемся на следующее утверждение, представляющее собой модификацию хорошо известного неравенства [2].

Теорема 2. Пусть

$$f \in BL^{p,\alpha}(D), D \in K_\gamma, p > (n-1)\left(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right), \alpha \geq 0, 0 < \gamma < 1$$

и пусть $\Gamma_r = \Gamma_r(y)$, $y \in \partial D$, $0 < r_1 \leq r \leq r_2 < \rho(a, D)$.

Тогда для почти всех $r \in [r_1, r_2]$

$$\omega^p(f, \Gamma_r) \leq C r^{p+1-n-\alpha} \int_{\Gamma_r} \Lambda^p(f, x) \rho^\alpha(x, \partial D) ds,$$

где $\omega(f, \Gamma_r)$ – колебание отображения f на множестве Γ_r , постоянная $C = C(n, p, \alpha, \gamma, y)$.

Следствие 1. Если $k(t)$ – измеримая неотрицательная почти всюду на $(0, 1)$ функция, то в условиях и обозначениях теоремы

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\omega^p(f, \Gamma_r) k(r)}{r^{p+1-n-\alpha}} \leq C \int_{D_{r_1 r_2}} \Lambda^p(f, x) \rho^\alpha(x, \partial D) k(|x-y|) dx,$$

где $D_{r_1 r_2} = \bigcup_{r \in [r_1, r_2]} \Gamma_r$.

Пусть ядро $k(t)$ таково, что для некоторых чисел α, β , $\alpha \geq 0, 0 < \beta < n t^{-\alpha} \leq k(t) \leq t^{-\beta}$.

Тогда имеет место следующая

Теорема 3. Пусть f – ACL-гомеоморфизм области $D \subset R^n$ класса K_γ ($0 < \gamma < 1$) на ограниченную область $G \subset R^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$1) f \in BL^{p,\alpha}(k), p > (n-1)\left(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right), \alpha \geq 0, 0 < \gamma < 1;$$

2) найдется аддитивная функция множества $\Phi(D')$, заданная на подмножествах $D' \subset D$, такая, что $\Phi(D') < \infty$, и для любой подобласти $D_{r_1 r_2} = \bigcup_{r \in [r_1, r_2]} \Gamma_r$ существует

$$\bar{r} \in [r_1, r_2], \text{ при котором } \omega^p(f, \Gamma_{\bar{r}}) \leq \frac{\Phi(B_{r_1 r_2})}{r_2^{n-p} - r_1^{n-p}}.$$

Это утверждение можно доказать с помощью неравенства (1), используя схему доказательства теоремы 2 [5] для ACL-гомеоморфизмов шара.

Замечание 2. Условие $k(t) \leq t^{-\beta}$ ($0 < \beta < n$) можно заменить условием на функцию множества Φ :

$$\int_D \Phi'(x) k(|x-x_0|) dx < \infty \text{ для почти всех } x_0 \in D.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Суворов Г.Д. Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений. Киев: Наукова думка, 1985.
2. Овчинников И.С., Суворов Г.Д. Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Сиб. мат. ж. 1965. Т. 6, № 6. С. 1292–1314.
3. Куфарев Б.П., Соколов Б.В. О соответствии границ при отображениях шара // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка, 1975. Вып. 7. С. 93–104.
4. Иванов О.В. Характеристическое свойство отображений класса $BL^{n,2}$ // Сиб. мат. ж. 1978. Т. 19, № 6. С. 1403–1405.
5. Соколов Б.В. Характеристическое свойство отображений с ограниченным потенциалом градиента // Актуальные проблемы современной математики. Т. 4. (в печати).
6. Куфарев Б.П., Соколов Б.В. О граничном соответствии при отображениях областей из R^n // ДАН. 1978. Т. 243, № 3. С. 568–571.

Статья представлена лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 25 октября 1999 г.