

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ, ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИЙ

Работа выполнена при финансовой государственной поддержке ведущих научных школ РФ, грант № 96-15-96095 «Исследования по комплексному анализу и алгебре» и РФФИ, грант № 97-01-00795.

Вводится понятие абелевой группы A , вполне транзитивной относительно функции $\varphi_L: A \rightarrow L$, где L – нижняя полурешетка. С помощью этого понятия получены результаты о вполне характеристических подгруппах и их решетках.

Рассматриваются функции, отображающие абелеву группу в нижнюю полурешетку и обладающие рядом естественных свойств, обобщающих свойства индикаторов элементов p -групп, характеристик элементов групп без кручения и высотных матриц элементов смешанных групп. С помощью введенных понятий (групп, вполне транзитивных относительно рассматриваемых функций и φ_L -групп) получены результаты о строении вполне характеристических подгрупп и их решеток для φ_L -групп. Применяя эти результаты к абелевым p -группам и группам без кручения, получаем информацию о вполне характеристических подгруппах и их решетках для исследуемых групп.

Пусть A – абелева группа, L – нижняя полурешетка и $\varphi_L: A \rightarrow L$ – функция со следующими свойствами:

- 1) $\varphi_L(\eta a) \geq \varphi_L(a)$ для всякого $a \in A$ и любого эндоморфизма η группы A ;
- 2) $\varphi_L(a + b) \geq \varphi_L(a) \wedge \varphi_L(b)$ для любых $a, b \in A$;
- 3) $\varphi_L(0) \geq l$ для всякого $l \in L$.

Пусть $l \in L$ и $A(l) = \{a \in A \mid \varphi_L(a) \geq l\}$.

Лемма 1. $A(l)$ – вполне характеристическая подгруппа группы A , и если существует

$$l_1 = \inf_L \{\varphi_L(a) \mid a \in A(l)\}, \text{ то } A(l) = A(l_1).$$

Доказательство. Если $a, b \in A(l)$, то $-b \in A(l)$, так как существует $\gamma \in E(A)$ такой, что $\gamma g = -g$ для всякого элемента $g \in A$. Поэтому $\varphi_L(-b) \geq \varphi_L(b) \geq l$. Имеем

$$\varphi_L(a - b) \geq \varphi_L(a) \wedge \varphi_L(-b) \geq \varphi_L(a) \wedge \varphi_L(b) \geq l.$$

Значит, $A(l)$ – подгруппа группы A . Если $\eta \in E(A)$, то $\varphi_L(\eta a) \geq \varphi_L(a) \geq l$, и поэтому $\eta a \in A(l)$. Итак, $A(l)$ – вполне характеристическая подгруппа группы A . Пусть существует $l_1 = \inf_L \{\varphi_L(a) \mid a \in A(l)\}$. Очевидно, $A(l) \subset A(l_1)$. Покажем обратное включение. Так как для всякого $a \in A(l)$ $\varphi_L(a) \geq l$, то $l_1 \geq l$. Пусть $a \in A(l_1)$, тогда $\varphi_L(a) \geq l_1 \geq l$, и, значит, $a \in A(l)$. Итак, $A(l_1) \subset A(l)$, и поэтому $A(l_1) = A(l)$.

Пусть для абелевой группы A и нижней полурешетки L задана функция $\varphi_L: A \rightarrow L$, удовлетворяющая свойствам 1)–3), и пусть для каждого непустого подмножества A' множества A существует элемент $m_{A'} \in L$ такой, что $m_{A'} = \inf_L \{\varphi_L(a') \mid a' \in A'\}$.

Пусть $M_L(A) = \{m_{A'} \mid A' \subset A \text{ и } A' \neq \emptyset\}$.

Лемма 2. $M_L(A)$ – полная решетка.

Доказательство. Покажем, что всякое непустое подмножество множества $M_L(A)$ имеет точную нижнюю грань. Пусть $M' \subset M_L(A)$, $M' \neq \emptyset$. Запишем M' в виде $M' = \{m_{A_i}\}_{i \in I}$, где для всякого $i \in I$ A_i – непустое подмножество множества A .

Пусть $A' = \bigcup_{i \in I} A_i$. Тогда

$$\{\varphi_L(a') \mid a' \in A'\} = \bigcup_{i \in I} \{\varphi_L(a_i) \mid a_i \in A_i\},$$

причем

$$m_{A'} = \inf_L \{\varphi_L(a_i) \mid a_i \in A_i\}$$

и существует

$$m = \inf_L \{\varphi_L(a') \mid a' \in A'\}.$$

Тогда $m = \inf_L \{m_{A_i}\}_{i \in I}$ [1. С. 10, теорема 4], и так как $m \in M_L(A)$, то $m = \inf_{M_L(A)} \{m_{A_i}\}_{i \in I}$. $M_L(A)$ имеет наибольший элемент $\varphi_L(0)$. Поэтому $M_L(A)$ – полная решетка [1, С. 37, теорема 1].

Определение 1. Назовем абелеву группу A φ_L -группой, если всякая ее вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(l)$, где $l \in L$.

Определение 2. Абелеву группу A назовем вполне транзитивной относительно функции φ_L , если для любых двух ее элементов a, b , для которых $\varphi_L(a) \leq \varphi_L(b)$, существует эндоморфизм η группы A такой, что $\eta a = b$.

Предложение 1. Всякая φ_L -группа вполне транзитивна относительно функции φ_L .

Доказательство. Пусть A – φ_L -группа. Предположим, что A не является вполне транзитивной относительно функции φ_L . Тогда существуют элементы $a, b \in A$ такие, что $\varphi_L(a) \leq \varphi_L(b)$, но для всякого $\eta \in E(A)$ $\eta a \neq b$. Рассмотрим подгруппу $S = \{\eta a \mid \eta \in E(A)\}$. Имеем $b \notin S$. S – вполне характеристическая подгруппа группы A , и поэтому $S = A(l)$ для некоторого $l \in L$. Тогда $\varphi_L \geq l$, а, значит, $\varphi_L(b) \geq l$. Отсюда $b \in A(l)$, и так как $A(l) = S$, то $b \in S$. Противоречие.

Напомним, что частично упорядоченные множества P и P' называются изоморфными (антиизоморфными), если существует биективное отображение φ множества P на множество P' такое, что $a \leq b$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ ($\varphi(a) \geq \varphi(b)$).

Рассмотрим понятие изоморфизма (антиизоморфизма) полных решеток.

Определение 3. Полные решетки L и L' будем называть изоморфными (антиизоморфными), если существует биективное отображение φ множества L на множество L' такое, что для всякого непустого подмножества A множества L имеем

$$\varphi(\sup_L A) = \sup_{L'} \varphi A \text{ и } \varphi(\inf_L A) = \inf_{L'} \varphi A$$

$$(\varphi(\sup_L A) = \inf_{L'} \varphi A \text{ и } \varphi(\inf_L A) = \sup_{L'} \varphi A).$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 4 из [1. С. 53–54], получим лемму 3.

Лемма 3. Если φ – изоморфизм (антиизоморфизм) частично упорядоченного множества L на частично упорядоченное множество L' и одно из этих множеств является полной решеткой, то другое множество – также полная решетка и φ является изоморфизмом (антиизоморфизмом) полных решеток.

Замечание 1. Пусть L и L' – полные решетки и φ – изоморфизм (антиизоморфизм) решетки L на L' в обычном смысле, т.е. φ – биективное отображение L

на L' такое, что для любых двух элементов $a, b \in L$ $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ и $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ ($\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ и $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$).

Используя то, что в любой решетке L следующие свойства элементов $a, b \in L$ эквивалентны:

а) $a \leq b$; б) $a \vee b = b$; в) $a \wedge b = a$,

получаем, что φ – изоморфизм (антиизоморфизм) частично упорядоченных множеств L и L' . Тогда по лемме 3 φ – изоморфизм (антиизоморфизм) полной решетки L на полную решетку L' (в смысле определения 3 изоморфизма (антиизоморфизма) полных решеток).

Продолжим рассмотрение φ_L -групп.

Обозначим через $\Phi(A)$ решетку вполне характеристических подгрупп группы A . Для любой абелевой группы A $\Phi(A)$ – полная решетка.

Теорема 1. Пусть A – φ_L -группа и для каждого непустого подмножества A' множества A существует элемент $m_{A'} \in L$, такой, что $m_{A'} = \inf_L \{\varphi_L(a') \mid a' \in A'\}$. Пусть $M_L(A) = \{m_{A'} \mid A' \subset A \text{ и } A' \neq \emptyset\}$. Тогда решетка вполне характеристических подгрупп группы A антиизоморфна решетке $M_L(A)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\sigma: \Phi(A) \rightarrow M_L(A)$, где для всякой вполне характеристической подгруппы S группы A $\sigma S = m_S$ ($m_S = \inf_L \{\varphi_L(s) \mid s \in S\}$). Покажем, что σ – биективное отображение. Пусть $l \in M_L(A)$. Тогда существует непустое подмножество A' множества A такое, что $l = \inf_L \{\varphi(a') \mid a' \in A'\}$. Рассмотрим элементы группы A вида $\psi_1 a'_1 + \dots + \psi_k a'_k$, где $k \in \mathbb{N}$; $a'_1, \dots, a'_k \in F(A)$ $\psi_1, \dots, \psi_k \in E(A)$. Обозначим множество всех таких элементов через S' . S' – вполне характеристическая подгруппа группы A . Учитывая условия 1) и 2) для функции φ_L , получаем, что $l = \inf_L \{\varphi_L(s') \mid s' \in S'\}$. Итак, $\sigma S' = l$, и, значит, σ – сюръективное отображение.

Покажем, что σ – инъективное отображение. Пусть S_1, S_2 – вполне характеристические подгруппы группы A , $\sigma S_1 = m_{S_1}$, $\sigma S_2 = m_{S_2}$ и $m_{S_1} = m_{S_2}$. Учитывая, что A – φ_L -группа, и используя лемму 1, получаем $S_1 = A(m_{S_1})$, $S_2 = A(m_{S_2})$. Отсюда $S_1 = S_2$.

Если S_1 и S_2 – вполне характеристические подгруппы группы A , то $S_1 \subset S_2$ тогда и только тогда, когда $\sigma S_1 \geq \sigma S_2$ (учитываем, что $S_1 = A(\sigma S_1)$; $S_2 = A(\sigma S_2)$). Значит, полные решетки $\Phi(A)$ и $M_L(A)$ антиизоморфны.

Замечание 2. Пусть $\mu = \sigma^{-1}$, где σ – отображение $\Phi(A)$ на $M_L(A)$, рассмотренное в доказательстве теоремы 1 и являющееся решеточным антиизоморфизмом. Из доказательства теоремы вытекает, что если $l \in M_L(A)$, то $\mu l = A(l)$.

Частично упорядоченное множество назовем полной нижней полурешеткой, если всякое его непустое подмножество имеет точную нижнюю грань.

Если L – полная нижняя полурешетка, то всякой φ_L -группе A , для которой задана функция φ_L , удовлетворяющая свойствам 1)–3), можно поставить в соответствие полную решетку $M_L(A) = \{m_{A'} \mid A' \subset A \text{ и } A' \neq \emptyset\}$, где $m_{A'} = \inf_L \{\varphi_L(a') \mid a' \in A'\}$.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть A – φ_L -группа, где L – полная нижняя полурешетка. Тогда решетки $\Phi(A)$ и $M_L(A)$ антиизоморфны.

Определение 4. Пусть L – полная нижняя полурешетка. Будем говорить, что множество $M \subset L$ обладает свойством конечной сравнимости в L , если для всякого бесконечного подмножества $M_1 \subset M$ из того, что $u \in M$ и $u \geq \inf_L M_1$, следует существование в M_1 такого конечного подмножества M_2 , для которого $u \geq \inf_L M_2$.

Пусть A – абелева группа, L – нижняя полурешетка и $\varphi_L: A \rightarrow L$ – функция со свойствами 1)–3). Если M' – некоторое подмножество множества L , то обозначим через $A(M')$ подгруппу группы A , порожденную всеми такими элементами $a \in A$, для которых существует $m \in M'$, что $\varphi_L(a) \geq m$. Понятно, что $A(M)$ – вполне характеристическая подгруппа группы A . Пусть $\varphi_L(A) = \{\varphi_L(a) \mid a \in A\}$.

Теорема 2. Если абелева группа A является φ_L -группой, где L – полная нижняя полурешетка, то множество $\varphi_L(A)$ обладает свойством конечной сравнимости в L .

Доказательство. Пусть A – φ_L -группа, $M = \varphi_L(A)$, $M_1 \subset M$, $|M_1| \geq \aleph$, $u \in M$ и $u \geq \inf_L M_1$. Существует элемент $b \in A$, такой, что $\varphi_L(b) = u$. Рассмотрим вполне характеристическую подгруппу $A(M_1)$ группы A . Так как A – φ_L -группа, то $A(M_1) = A(v)$, где $v \in L$, причем по лемме 1 в качестве v можно взять $\inf_L \{\varphi_L(s) \mid s \in A(M_1)\}$. Имеем $\inf_L \{\varphi_L(s) \mid s \in A(M_1)\} = \inf_L M_1$. Тогда $A(M_1) = A(\inf_L M_1)$. Так как $\varphi_L(b) \geq \inf_L M_1$, то $b \in A(M_1)$, и поэтому $b = b_1 + \dots + b_n$, где $\varphi_L(b_i) \geq v_i$, $v_i \in M_1$, $i = 1, \dots, n$. Отсюда получаем $u = \varphi_L(b) \geq \inf_{i=1, \dots, n} \{\varphi_L(b_i)\} \geq v_i$. Значит, в M_1 есть

конечное подмножество $M_2 = \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ такое, что $u \geq \inf_L M_2$.

Рассмотрим абелевы p -группы. Пусть A – абелева p -группа. Обозначим через H_A множество всех возрастающих последовательностей порядковых чисел, меньших длины группы A и символов ∞ , полагая, что ∞ больше любого порядкового числа (если $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \in H_A$ и $\alpha_n \neq \infty$, то $\alpha_n < \min\{\alpha_{n+1}, \lambda\}$, где λ – длина группы A ; если же $\alpha_n = \infty$, то $\alpha_{n+1} = \infty$). На множестве H_A введем отношение частичного порядка естественным образом: $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \leq (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \dots)$ тогда и только тогда, когда для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0$ – множество всех целых неотрицательных чисел) $\alpha_k \leq \beta_k$. Относительно этого порядка H_A является полной нижней полурешеткой (так как в H_A есть наибольший элемент $(\infty, \infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$), то H_A является даже полной решеткой).

Пусть φ_{H_A} – функция, отображающая A в H_A , такая, что $\varphi_{H_A}(a) = H(a)$ для всякого $a \in A$ ($H(a)$ – индикатор элемента a). Из свойств обобщенных p -высот [2. Р. 182] вытекает: $\varphi_{H_A}(\eta a) \geq \varphi_{H_A}(a)$ для всякого $a \in A$ и любого $\eta \in E(A)$; $\varphi_{H_A}(a + b) \geq \varphi_{H_A}(a) \wedge \varphi_{H_A}(b)$ для любых $a, b \in A$; $\varphi_{H_A}(0) \geq \alpha$ для всякой последовательности $\alpha \in H_A$. Поэтому в рассматриваемой ситуации мы можем использовать результаты, полученные ранее в этой статье.

Говорят, что последовательность $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots)$ из H_A имеет скачок между α_k и α_{k+1} , если $\alpha_k + 1 < \alpha_{k+1}$ [3. С. 58]. Последовательность $\alpha \in H_A$ называется U -последовательностью (для группы A), если каждый раз, когда существует скачок между α_k и α_{k+1} α_k -й инвариант Ульма–Каплана группы A $f_{\alpha_k}(A)$ отличен от нуля.

Если A' – непустое подмножество множества A , то через $\alpha_{A(k)}$ обозначим $\inf_{H_A} \{H(a') \mid a' \in A'\}$ (индикаторы

элементов рассматриваются в группе A) и пусть $M_H(A) = \{\alpha_A \mid A' \subset A \text{ и } A' \neq \emptyset\}$.

Лемма 4. Для любой абелевой p -группы A $M_H(A)$ совпадает с множеством всех U -последовательностей для группы A .

Доказательство. Пусть $\alpha \in M_H(A)$. Существует непустое подмножество A' множества A такое, что $\alpha = \alpha_{A'} = \inf_{H_A} \{H(a') \mid a' \in A'\}$. Каждый индикатор $H(a')$ является U -последовательностью [3. Р. 59]. Так как $\inf$ произвольного множества последовательностей в H_A берется почленно (покоординатно), то $\alpha_{A(k)}$ – U -последовательность. Пусть теперь α является U -последовательностью, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots)$ и $N_1 = \{n \in N_0 \mid \alpha_n + 1 < \alpha_{n+1}\}$. Для всякого $n \in N_1$ существует элемент α_n порядка p^{n+1} , индикатор которого имеет единственный скачок между α_n и ∞ , т.е. $H(\alpha_n) = (\alpha_n - n, \alpha_n - n + 1, \dots, \alpha_m, \infty, \infty, \dots)$ [4. С. 9, лемма 65.3].

Пусть $A' = \{\alpha_n\}_{n \in N_1}$. Имеем $\alpha_{A'} = \inf_{H_A} \{H(a) \mid n \in N_1\} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots) = \alpha$. Значит, $\alpha \in M_H(A)$.

Обозначим множество всех U -последовательностей для группы A через $U(A)$. Из лемм 2 и 4 следует, что $U(A)$ является полной решеткой. Напомним, что редуцированная абелева p -группа называется вполне транзитивной, если для любых двух ее элементов a, b , для которых $H(a) \leq H(b)$, существует эндоморфизм η этой группы такой, что $\eta(a) = b$ [4. С. 11]. Класс вполне транзитивных абелевых p -групп включает в себя такие важные классы групп, как класс сепарабельных p -групп и класс тотально проективных p -групп.

Пусть $H(A) = \{H(a) \mid a \in A\}$. Если $\alpha \in H_A$, то обозначим через $A(\alpha)$ следующую подгруппу группы A : $A(\alpha) = \{a \in A \mid H(a) \geq \alpha\}$. $A(\alpha)$ – вполне характеристическая подгруппа группы A .

Определение 5. Редуцированную абелеву p -группу A назовем H -группой, если всякая ее вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(\alpha)$, где $\alpha \in H_A$.

Всякая вполне транзитивная абелева p -группа A является H -группой (причем в представлении любой вполне характеристической подгруппы S этой группы в виде $A(\alpha)$ можно выбрать α , принадлежащим $U(A)$ [4. С. 17, теорема 67.1]).

Из предложения 1 (полагая $L = H_A$, $\varphi_L = \varphi_{H_A}$) вытекает, что справедливо и обратное утверждение. Используя также лемму 4, теорему 1 и теорему 2, получаем результат.

Теорема 3. Пусть A – абелева p -группа.

1. A является H -группой тогда и только тогда, когда A – вполне транзитивная группа.

2. Возрастающая последовательность α ординальных чисел, меньших длины группы A , и символов ∞ является U -последовательностью для группы A тогда и только тогда, когда $\alpha = \inf_{H_A} \{H(a') \mid a' \in A'\}$, где A' – некоторое непустое подмножество множества A .

3. Если A – H -группа, то решетка вполне характеристических подгрупп этой группы антиизоморфна решетке $U(A)$.

4. Если A – H -группа, то множество $H(A)$ обладает свойством конечной сравнимости в H_A .

Перейдем теперь к рассмотрению абелевых групп без кручения.

Прежде чем формулировать дальнейшие результаты, приведем необходимые обозначения и термины, используемые в [5].

Пусть X – множество, состоящее из всех последовательностей $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, где $v^{(i)}$ – целое неотрицательное число или символ ∞ ($i \in N$). Такие последовательности будем называть характеристиками.

Во множестве X естественным образом вводится частичный порядок, а именно $v \leq w$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in N$ $v^{(i)} \leq w^{(i)}$. Относительно этого частичного порядка X является полной решеткой. Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_m, \dots\}$ – множество всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Если A – абелева группа без кручения, $x \in A$, то характеристика $\chi(x)$ элемента x в группе A – это такая характеристика $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, в которой каждое $v^{(i)}$ есть p_i -высота $h_{p_i}(x)$ элемента x в группе A (согласно определению характеристика нулевого элемента есть последовательность $(\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$).

Пусть φ_X – функция, отображающая A в X такая, что $\varphi_X(a) = \chi(a)$ для всякого $a \in A$. Из свойств p -высот вытекает: $\varphi_X(\eta a) \geq \varphi_X(a)$ для всякого $a \in A$ и любого $\eta \in E(A)$; $\varphi_X(a+b) \geq \varphi_X(a) \wedge \varphi_X(b)$ для любых $a, b \in A$; $\varphi_X(0) \geq v$ для всякой $v \in X$. Поэтому в рассматриваемой ситуации мы можем использовать результаты этой статьи, полагая $L = X$ и $\varphi_L = \varphi_X$.

Определение 6. Редуцированная абелева группа A без кручения называется вполне транзитивной, если для любых двух ее элементов a и b , для которых $\chi(a) \leq \chi(b)$, существует эндоморфизм φ этой группы такой, что $\varphi(a) = b$.

В [5] такие группы были названы транзитивными.

Вполне транзитивными группами без кручения являются алгебраически компактные, квазисервантно инъективные [6], сильно однородные [7, 8] и другие абелевы группы без кручения.

Пусть A – абелева группа без кручения. Если $v \in X$, то обозначим через $A(v)$ следующую подгруппу группы A : $A(v) = \{a \in A \mid \chi(a) \geq v\}$. $A(v)$ – вполне характеристическая подгруппа группы A .

Определение 7. Редуцированную абелеву группу A без кручения назовем χ -группой, если всякая ее вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(v)$, где $v \in X$.

Из предложения 1 вытекает

Предложение 2. Всякая χ -группа является вполне транзитивной группой.

χ -группы в некоторых классах абелевых групп без кручения были охарактеризованы в [5, 9, 10]. Если A – абелева группа без кручения, то для всякого непустого подмножества A' множества A через $v_{A(k)}$ обозначим $\inf_{\chi} \{\chi(a') \mid a' \in A'\}$, и пусть

$$M_X(A) = \{v_A \mid A' \subset A \text{ и } A' \neq \emptyset\}, \chi(A) = \{\chi(a) \mid a \in A\}.$$

Так как X – полная решетка, то из леммы 2, следствия 1 и теоремы 2 вытекает такой результат.

Теорема 4. Пусть A – абелева группа без кручения. Тогда

- 1) $M_X(A)$ – полная решетка;
- 2) если A – χ -группа, то решетки $\Phi(A)$ и $M_X(A)$ антиизоморфны;
- 3) если A – χ -группа, то множество $\chi(A)$ обладает свойством конечной сравнимости в X .

Рассмотрим теперь однородные абелевы группы без кручения.

Тип t (класс эквивалентных характеристик) будем называть p_k -делимым ($p_k \in \Pi$), если для всякой характеристики v , принадлежащей этому типу, имеем $v^{(k)} = \infty$. Пусть t – некоторый тип. Рассмотрим характеристики v , удовлетворяющие следующим условиям:

- а) $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots) \leq w$, для некоторой $w \in t$;
- б) $v^{(k)} = \infty$, если тип t p_k -делим.

Обозначим через $F(t)$ множество, состоящее из всех характеристик, удовлетворяющих свойствам а), б), и характеристики, членами которой являются только символы ∞ .

Лемма 5. Для любой однородной абелевой группы без кручения A типа t $M_X(A)$ совпадает с $F(t)$.

Доказательство. Пусть $v \in M_X(A)$. Существует непустое подмножество A' множества A , что $v = v_A = \inf_{\chi} \{\chi(a') \mid a' \in A'\}$. Если $A' = \{0\}$, то $v^{(k)} = \infty$ для всех $k \in N$, и поэтому $v \in F(t)$. Пусть $A' \neq \{0\}$. Имеем $v \leq \chi(a')$ для всякого $a' \in A'$, и если $a' \neq 0$, то $\chi(a') \in t$. Так как для любого элемента $a' \in \chi^{(k)}(A') = \infty$ для всех k , для которых $p_k A = A$, то $v^{(k)} = \infty$ для всех k , для которых тип t p_k -делим. Значит, $v \in F(t)$.

Пусть $v \in F(t)$. Если $v^{(k)} = \infty$ для всякого $k \in N$, то, полагая $A' = \{0\}$, получаем $v = v_A$. Пусть существует $k \in N$ такое, что $v^{(k)} \neq \infty$. Если $v \in t$, то выбираем в группе A элемент a такой, что $\chi(a) = v$. Тогда, полагая $A' = \{a\}$, получаем $v = v$. Пусть $v \notin t$. Зафиксируем некоторую характеристику $w \in t$ такую, что $v < w$, и пусть $M = \{k \in N \mid p^k A \neq A\}$. Для всякого $k \in M$ существует элемент $a_k \in A$ такой, что $(\chi(a))^{(k)} = v^{(k)}$ и $(\chi(a_k))^{(r)} = w^{(r)}$ для любого $r \neq k$ ($r \in N$). Пусть $A' = \{a_k \mid k \in M\}$. Имеем $v_A = \inf_{\chi} \{\chi(a_k) \mid k \in M\} = v$.

Замечание 3. Так как $M_X(A)$ – полная решетка, то и $F(t)$ – полная решетка. Пусть F_1 – некоторое множество характеристик из $F(t)$. Рассмотрим характеристики $w_1, w_2 \in \in X$ такие, что $w_1^{(k)} = \inf \{v^{(k)} \mid v \in F_1\}$, $w_2^{(k)} = \sup \{v^{(k)} \mid v \in F_1\}$ (эти $\inf$ и $\sup$ рассматриваются во множестве $N \cup \{0, \infty\}$, упорядоченном естественным образом). Учитывая свойства характеристик, из $F(t)$ имеем $w_1 \in F(t)$, а если F_1 – конечное множество, то и $w_2 \in F(t)$. Отсюда $w_1 = \inf_{F(t)} F_1$, а если $|F_1| < \aleph_0$, то $w_2 = \sup_{F(t)} F_1$. Итак, $\inf$ любого множества характеристик в $F(t)$ берется почленно, а в случае, когда множество характеристик из $F(t)$ конечно, то и его $\sup$ в $F(t)$ берется почленно. Покажем, что в случае бесконечного множества F_1 характеристик из $F(A)$ $\sup_{F(t)} F_1$ может не совпадать с характеристикой w_2 .

Пусть t – тип, которому принадлежит характеристика, состоящая только из нулей. Для каждого $n \in N$ рассмотрим следующие характеристики $v_n: v_n^{(n)} = 1, v_n^{(m)} = 0$ для всякого $m \neq n$. Для всякого $n \in N$ имеем $v_n \in t$, и поэтому $v_n \in F(t)$. Пусть $F_1 = \{v_n \mid n \in N\}$. Беря почленно $\sup$ характеристик из множества F_1 , получим характеристику $w_2(1, 1, \dots, 1, \dots)$, так как не существует характеристик $w \in t$ такой, что $w_2 \leq w$, то $w_2 \notin F(t)$. Итак, $w_2 \neq \sup_{F(t)} F_1$. В нашем примере имеем $\sup_{F(t)} F_1 = (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$.

Учитывая, что однородная редуцированная абелева группа A без кручения является χ -группой тогда и только тогда, когда A – вполне транзитивная группа [5, следствие 3.14], лемму 5, следствие 1, замечание 2 и предложение 2, получаем такой результат.

Теорема 5. Пусть A – однородная абелева группа без кручения типа t .

1) A является χ -группой тогда и только тогда, когда A – вполне транзитивная группа.

2) $M_X(A) = F(t)$.

3) Если A – вполне транзитивная группа, то соответствие $\mu: v \mapsto A(v)$, где $v \in F(t)$, определяет антиизоморфизм решеток $F(t)$ и $\Phi(A)$.

Если A – вполне транзитивная группа, то множество $\chi(A)$ обладает свойством конечной сравнимости в X .

ЛИТЕРАТУРА

1. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1970. 147 с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.
3. Kaplansky I. Infinite abelian groups. Michigan: Ann. Arbor, 1954. 90 p.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 414 с.
5. Гриншпон С.Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1982. С. 56–92.
6. Reid J.D. Quasi-pure-injectivity and quasi-pure-projectivity // Lect. Notes Math. 1977. V. 616. P. 219–227.
7. Arnold D.M. Strongly homogeneity torsion free abelian groups of finite rank // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 56. P. 67–72.
8. Крылов П.А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 77–84.
9. Гриншпон С.Я. Вполне характеристические подгруппы K -прямых сумм абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1996. Вып. 13–14. С. 54–61.
10. Гриншпон С.Я. Вполне транзитивные однородно сепарабельные абелевы группы // Матем. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 471–474.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 23 ноября 1998 г.