

# АБЕЛЕВЫ $p$ -ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ УЛЬМА-КАПЛАНСКОГО, ПОЧТИ ИЗОМОРФНЫЕ ПО ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОДГРУППАМ

Работа выполнена при финансовой государственной поддержке ведущих научных школ РФ, грант № 96-15-96095 «Исследования по комплексному анализу и алгебре»

Для некоторых классов абелевых  $p$ -групп выясняется, будет ли верен аналог известной теоретико-множественной теоремы Кантора – Шредера – Бернштейна в рассматриваемой ситуации или нет.

Две группы называются почти изоморфными по вполне характеристическим подгруппам, если каждая из них изоморфна вполне характеристической подгруппе другой группы [1]. Известно, что любая вполне характеристическая подгруппа редуцированной сепарабельной  $p$ -группы  $G$  однозначно задается некоторой  $U$ -последовательностью  $\alpha$  для группы  $G$  [2]; будем обозначать эту вполне характеристическую подгруппу через  $G(\alpha)$ .

**Определение.** Будем говорить, что пара последовательностей  $(\alpha, \beta)$  задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп, если существуют такие группы  $G$  и  $G'$  из данного класса, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G'$  и  $G$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ .

Возникают два вопроса:

1) какие пары последовательностей задают почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма – Капланского;

2) будет ли из этого почти изоморфизма следовать изоморфизм самих групп, т.е. будет ли верен аналог известной теоретико-множественной теоремы Кантора – Шредера – Бернштейна?

В данной работе эта задача решается для пар последовательностей, имеющих конечное число скачков. Ответ на первый вопрос дает теорема 5. В теореме 7 показано, для каких пар последовательностей аналог теоремы Кантора – Шредера – Бернштейна всегда имеет место.

Приведем используемые в работе понятия и факты.

Пусть  $G$  – редуцированная сепарабельная  $p$ -группа,  $\sigma$  – порядковое число. Через  $p^\sigma G$  обозначается подгруппа группы  $G$ , определяемая по индукции:  $p^0 G = G$ ,  $p^{\sigma+1} G = p(p^\sigma G)$  и  $p^\sigma G = \bigcap_{\rho < \sigma} p^\rho G$ , если  $\sigma$  – предельное порядковое число. Наименьшее порядковое число  $\sigma$ , для которого  $p^{\sigma+1} G = p^\sigma G$ , называется длиной группы  $G$  [3],  $\sigma$ -м инвариантом Ульма–Капланского группы  $G$  называется кардинальное число [4]

$$f_G(\sigma) = r(p^\sigma G) [p] / (p^{\sigma+1} G) [p].$$

Будем обозначать множество целых неотрицательных чисел через  $Z_0$ . Пусть  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$  – возрастающая последовательность ординалов и символов  $\infty$  (для любой пары индексов  $(i, j)$ , где  $i < j$ ,  $\alpha_i < \alpha_j$ , если  $\alpha \neq \infty$ , и  $\alpha_i = \alpha_j$ , если  $\alpha = \infty$ ). Если  $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$ , то будем говорить, что последовательность имеет скачок в  $\alpha_{i+1}$ . Длиной  $\lambda(\alpha)$  последовательности  $\alpha$  называется  $\inf\{i \in Z_0 \mid \alpha_i = \infty\}$ ; причем  $\lambda(\alpha) = \infty$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_i < \infty$  для всех  $i \in Z_0$  [4].

**Определение** [2]. Возрастающая последовательность ординалов и символов  $\infty$   $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$  называется  $U$ -последовательностью для группы  $G$ , если для любого  $\alpha_i \neq \infty$  имеем  $\alpha_i < \tau$  ( $\tau$  – длина группы  $G$ ) и всякий раз, когда существует скачок в  $\alpha_n$ ,  $\alpha_{n-1}$ -й инвариант Ульма–Капланского группы  $G$  отличен от нуля.

Пусть  $G$  – редуцированная сепарабельная  $p$ -группа,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$  –  $U$ -последовательность для группы  $G$ . Тогда вполне характеристическая подгруппа группы  $G$ , соответствующая данной последовательности, имеет следующий вид [2]:

$$G(\alpha) = \{g \in G \mid (h^*(g), h^*(pg), \dots, h^*(p^n g), \dots) \geq \alpha\},$$

где  $h^*(g)$  – обобщенная  $p$ -высота элемента  $g$ .

Следующая теорема будет существенно использоваться в данной работе.

**Теорема 1** [5]. Пусть  $S = G(\alpha)$  – неограниченная вполне характеристическая подгруппа редуцированной сепарабельной  $p$ -группы  $G$ , где  $\alpha$  –  $U$ -последовательность для группы  $G$ . Тогда для всех  $i \in Z_0$   $f_S(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j)$ ,  $i \in Z_0$ , где  $k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i$ .

Приступим к решению поставленной задачи.

Обозначим через  $W$  множество, состоящее из всех возрастающих последовательностей целых неотрицательных чисел и символов  $\infty$ , имеющих конечное число скачков. Так как редуцированные сепарабельные  $p$ -группы не содержат элементов бесконечной высоты, то легко показать, что пара последовательностей, из которых хотя бы одна не принадлежит множеству  $W$ , не задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского.

Если пара  $(\alpha, \beta)$  задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп, то выполняется одно из двух следующих условий:

1)  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in Z_0$ ,  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  и каждая последовательность имеет только один скачок;

2)  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$  [6]. Случай, когда  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in Z_0$ ,  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  и каждая последовательность имеет только один скачок, рассматривается в теореме 2. Случай, когда  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$ , – в теореме 3 (обе последовательности начинаются с нуля) и теореме 4 (только одна из последовательностей начинается с нуля). В оставшемся случае, т.е. когда обе последовательности начинаются с положительного числа, имеют бесконечную длину и конечное число скачков, всегда существуют такие неизоморфные редуцированные сепарабельные

$p$ -группы  $G$  и  $G'$  с конечными инвариантами Ульма – Капланского, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G'$  и  $G$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$  [7].

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных ситуаций, заметим, что если последовательности, задающие почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам, имеют бесконечную длину, то группы  $G$  и  $G'$  – неограниченные; если же они имеют конечную длину, то группы  $G$  и  $G'$  – ограниченные (следует из определения  $U$ -последовательности).

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha, \beta \in W$ ,  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in \mathbb{Z}_0$ ,  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  и каждая последовательность имеет только один скачок.

1. Пара  $(\alpha, \beta)$  задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского.

2. Если  $G$  и  $G'$  – такие редуцированные сепарабельные  $p$ -группы с конечными инвариантами Ульма–Капланского, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G'$  и  $G$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ , то  $G \cong G'$ .

**Доказательство.**

1. Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – произвольные натуральные числа. Обозначим через  $G$  и  $G'$  такие прямые суммы циклических  $p$ -групп, что  $f_G(i) = f_{G'}(i) = m_i$  для всех  $i \leq n$ . Очевидно, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G'$  и  $G$  соответственно,  $G \cong G'$ ,  $G' = G'(\alpha)$ ,  $G = G(\beta)$ , откуда  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ , т.е. пара  $(\alpha, \beta)$  задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского.

2. Так как обе последовательности начинаются с нуля и имеют только по одному скачку, то  $G' = G'(\alpha)$ ,  $G = G(\beta)$ , откуда  $G \cong G'$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha, \beta \in W$ ,  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$  и  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ .

1. Пара  $(\alpha, \beta)$  задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского тогда и только тогда, когда обе последовательности не имеют скачков.

2. Если  $G$  и  $G'$  – такие редуцированные сепарабельные  $p$ -группы с конечными инвариантами Ульма–Капланского, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G'$  и  $G$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ , то  $G \cong G'$ .

**Доказательство.**

1. Пусть в  $\alpha$  и  $\beta$  нет скачков. Обозначим через  $G'$  и  $G$  такие прямые суммы циклических  $p$ -групп, что  $f_{G'}(i) = f_G(i) = m_i$ , где  $m_i$  – произвольное натуральное число для всех  $i \in \mathbb{Z}_0$ . Очевидно, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G'$  и  $G$  соответственно,  $G \cong G'$ ,  $G' = G'(\alpha)$ ,  $G = G(\beta)$ , откуда  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ , т.е. пара  $(\alpha, \beta)$  задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского.

2. Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из последовательностей имеет скачок. Предположим, что существуют такие редуцированные сепарабельные  $p$ -группы

$G$  и  $G'$  с конечными инвариантами Ульма–Капланского, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G$  и  $G'$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ . Тогда возможны следующие два случая:

– в  $\alpha$  и  $\beta$  скачок впервые встречается на разных местах;

– скачок впервые встречается на одном и том же месте.

а) Будем считать, что  $\beta$  имеет первый скачок в  $\beta_{k+1}$ , а  $\alpha$  не имеет скачков в  $\alpha_i$  для всех  $i: 0 \leq i \leq k+1$ . Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  имеют следующий вид:

$$\alpha = (0, \dots, k, 1, k+2+n_1, \dots, k+m+n_{m-1}, \dots),$$

$$\beta = (0, \dots, k, k+2+l_1, k+3+l_2, \dots, k+m+1+l_m, \dots),$$

где  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots$  и  $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots$ .

По теореме 1 инварианты Ульма–Капланского групп  $G$  и  $G'$  связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} f_G(0) = f_{G'}(0), \\ \dots \\ f_G(k) = f_{G'}(k), \\ f_G(k+1) = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+n_1), \\ f_G(k+2) = f_{G'}(k+2+n_1) + \dots + f_{G'}(k+2+n_2), \\ \dots \\ f_G(k+m) = f_{G'}(k+m+n_{m-1}) + \dots + f_{G'}(k+m+n_m), \\ \dots \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_G(0) = f_{G'}(0), \\ \dots \\ f_G(k-1) = f_{G'}(k-1), \\ f_G(k) = f_{G'}(k) + f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+l_1), \\ f_G(k+1) = f_{G'}(k+2+l_1) + \dots + f_{G'}(k+2+l_2), \\ \dots \\ f_G(k+m) = f_{G'}(k+m+1+l_m) + \dots + f_{G'}(k+m+1+l_{m+1}), \\ \dots \end{cases} \quad (2)$$

Подставим  $(k+1)$ -е равенство из (1) в  $(k+1)$ -е равенство из (2). Получаем, что  $f_G(k) = f_{G'}(k) = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+l_1)$ , т.е.  $(k+1)$ -е равенство из (2) имеет следующий вид:

$$0 = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+l_1), \quad (3)$$

откуда  $f_{G'}(k+1) = 0$ . Тогда  $(k+2)$ -е равенство из (1) принимает вид  $0 = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+n_1)$ , откуда  $f_{G'}(k+1) = 0$ . Таким образом,  $f_G(k+1) = 0$  и  $f_{G'}(k+1) = 0$ . Покажем, что  $f_G(k+m) = 0$  и  $f_{G'}(k+m) = 0$  для всех натуральных  $m$ . Используем метод математической индукции. Допустим, что

$$f_G(k+i) = 0 \text{ и } f_{G'}(k+i) = 0 \quad (4)$$

для всех  $i: 1 \leq i \leq m$ . Покажем, что  $f_G(k+m+1) = 0$  и  $f_{G'}(k+m+1) = 0$ . Запишем первые  $(k+m+1)$  равенств из (2), учитывая (3) и (4):

$$\begin{cases} f_G(0) = f_{G'}(0), \\ \dots \\ f_G(k-1) = f_{G'}(k-1), \\ 0 = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+l_1), \\ 0 = f_{G'}(k+2+l_1) + \dots + f_{G'}(k+2+l_2), \\ \dots \\ 0 = f_{G'}(k+m+1+l_m) + \dots + f_{G'}(k+m+1+l_{m+1}). \end{cases} \quad (5)$$

$f_G(k+m+1)$  входит в правую часть некоторого равенства из (5), имеющего нулевую левую часть, следовательно,  $f_G(k+m+1) = 0$ . Тогда первые  $(k+m+2)$  равенств из (1) принимают вид, из которого следует, что  $f_{G'}(k+m+1) = 0$ . Таким образом, доказано, что  $f_G(k+m) = 0$  и  $f_{G'}(k+m) = 0$  для всех натуральных  $m$ . А это противоречит тому, что группы  $G$  и  $G'$  – неограниченные:

$$\begin{cases} f_G(0) = f_{G'}(0), \\ \dots \\ f_G(k) = f_{G'}(k), \\ 0 = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+n_1), \\ 0 = f_{G'}(k+2+n_1) + \dots + f_{G'}(k+2+n_2), \\ \dots \\ 0 = f_{G'}(k+m+n_{m-1}) + \dots + f_{G'}(k+m+n_m), \\ 0 = f_{G'}(k+m+1+n_m) + \dots + f_{G'}(k+m+1+n_{m+1}). \end{cases}$$

б) Рассмотрим случай, когда в  $\alpha$  и  $\beta$  скачок впервые встречается на одном и том же месте, будем считать, что в  $\alpha_{k+1}$  и  $\beta_{k+1}$ . Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  имеют следующий вид:

$$\alpha = (0, \dots, k, k+2+n_1, \dots, k+m+n_{m-1}, \dots),$$

$$\beta = (0, \dots, k, k+2+l_1, \dots, k+m+l_{m-1}, \dots),$$

где  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots$  и  $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots$ .

По теореме 1 инварианты Ульма–Капланского групп  $G$  и  $G'$  связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} f_G(0) = f_G(0), \\ \dots \\ f_G(k-1) = f_G(k-1), \\ f_G(k) = f_G(k) + f_G(k+1) + \dots + f_G(k+1+n_1), \\ f_G(k+1) = f_G(k+2+n_1) + \dots + f_G(k+2+n_2), \\ \dots \\ f_G(k+m) = f_G(k+m+n_m) + \dots + f_G(k+m+1+n_{m+1}), \\ \dots \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} f_{G'}(0) = f_G(0), \\ \dots \\ f_{G'}(k-1) = f_G(k-1), \\ f_{G'}(k) = f_G(k) + f_G(k+1) + \dots + f_G(k+1+l_1), \\ f_{G'}(k+1) = f_G(k+2+l_1) + \dots + f_G(k+2+l_2), \\ \dots \\ f_{G'}(k+m) = f_G(k+m+1+l_m) + \dots + \\ + f_G(k+m+1+l_{m+1}), \\ \dots \end{cases} \quad (7)$$

Подставим  $(k+1)$ -е равенство из (6) в  $(k+1)$ -е равенство из (7). Получаем, что  $0 = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+n_1) + \dots + f_G(k+1) + \dots + f_G(k+1+l_1)$ , откуда  $f_G(k+1) = 0, \dots, f_G(k+1+n_1) = 0$  и  $f_G(k+1) = 0, \dots, f_G(k+1+l_1) = 0$ . Тогда  $(k+1)$ -е равенство из (6) и  $(k+1)$ -е равенство из (7) имеют следующий вид:

$$f_G(k) = f_{G'}(k). \quad (8)$$

Итак, получено, что  $f_G(k+1) = 0$  и  $f_{G'}(k+1) = 0$ . Покажем, что  $f_G(k+m) = 0$  и  $f_{G'}(k+m) = 0$  для всех натуральных  $m$ . Для этого воспользуемся методом математической индукции. Допустим, что

$$f_G(k+i) = 0 \text{ и } f_{G'}(k+i) = 0 \quad (9)$$

для всех  $i: 1 \leq i \leq m$ . Покажем, что  $f_G(k+m+1) = 0$  и  $f_{G'}(k+m+1) = 0$ . Запишем первые  $(k+m+1)$  равенства из (6), учитывая (8) и (9):

$$\begin{cases} f_G(0) = f_{G'}(0), \\ \dots \\ f_G(k-1) = f_{G'}(k-1), \\ 0 = f_{G'}(k+1) + \dots + f_{G'}(k+1+n_1), \\ 0 = f_{G'}(k+2+n_1) + \dots + f_{G'}(k+2+n_2), \\ \dots \\ 0 = f_{G'}(k+m+1+n_m) + \dots + f_{G'}(k+m+1+n_{m+1}). \end{cases} \quad (10)$$

$f_G(k+m+1)$  входит в правую часть некоторого равенства из (10), имеющего нулевую левую часть, следовательно,  $f_G(k+m+1) = 0$ . Рассматривая (7), аналогично полу-

чаем, что  $f_{G'}(k+m+1) = 0$ . Таким образом,  $f_G(k+m) = 0$  и  $f_{G'}(k+m) = 0$  для всех натуральных  $m$ . А это противоречит тому, что группы  $G$  и  $G'$  – неограниченные.

2) Так как обе последовательности начинаются с нуля и не имеют скачков, то  $G' = G'(\alpha)$ ,  $G = G(\beta)$ , откуда  $G \cong G'$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha, \beta \in W$ ,  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$ ,  $\alpha_0 \neq 0$  и  $\beta_0 = 0$ .

1. Пара  $(\alpha, \beta)$  задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского.

2. Если  $G$  и  $G'$  – такие редуцированные сепарабельные  $p$ -группы с конечными инвариантами Ульма–Капланского, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G$  и  $G'$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ , то  $G \cong G'$  тогда и только тогда, когда в  $\beta$  нет скачков.

**Доказательство.**

1. Так как в  $\alpha$  и  $\beta$  конечное число скачков, они имеют следующий вид:

$$\alpha = (s+n_0, s+1+n_1, \dots, s+k+n_k, s+k+1+n_k, \dots),$$

$$\beta = (0+l_0, 1+l_1, \dots, m+l_m, m+1+l_m, m+2+l_m, \dots),$$

где  $s > 0$ ,  $n_0 = 0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$ ,  $l_0 = 0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_m$ .

Найдем такие группы  $G$  и  $G'$  с конечными инвариантами Ульма–Капланского, разложимые в прямую сумму циклических групп, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G$  и  $G'$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ . Для этого достаточно найти все инварианты Ульма – Капланского этих групп. По теореме 1 имеем следующие системы уравнений для нахождения инвариантов Ульма–Капланского:

$$\begin{cases} f_G(0) = f_G(s) + \dots + f_G(s+n_1), \\ \dots \\ f_G(k-1) = f_G(s+k-1+n_{k-1}) + \dots + f_G(s+k-1+n_k), \\ f_{G'}(k) = f_{G'}(s+k+n_k), \\ f_{G'}(k+1) = f_{G'}(s+k+1+n_k); \\ \dots \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} f_{G'}(0) = f_G(0) + \dots + f_G(l_1), \\ \dots \\ f_{G'}(m-1) = f_G(m-1+l_{m-1}) + \dots + f_G(m-1+l_m), \\ f_G(m) = f_G(m+l_m), \\ f_G(m+1) = f_G(m+1+l_m). \\ \dots \end{cases} \quad (12)$$

Обозначим через  $t = \max\{m, k\}$ . Запишем системы (11) и (12), отбросив первые  $t$  уравнений:

$$\begin{cases} f_G(t) = f_{G'}(s+t+n_k), \\ \dots \\ f_G(t+t') = f_{G'}(s+t+t'+n_k); \\ \dots \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} f_{G'}(t) = f_G(t+l_m), \\ \dots \\ f_{G'}(t+t') = f_G(t+t'+l_m). \\ \dots \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим первые  $(t+1)$  уравнений системы (11), учитывая (12),  $(t+1)$ -м уравнением полученной системы будет  $f_G(t) = f_G(s+t+n_k+l_m)$ . Решим эту систему относительно  $f_G(0), \dots, f_G(t)$ , полагая остальные неизвестные свободными. Так как каждое  $i$ -е уравнение данной системы не содержит справа слагаемых  $f_G(j)$  для всех  $j \leq i$ , матрица этой системы является верхнетреугольной причем на главной диагонали находятся только единицы, т.е. ее определитель отличен от нуля. Таким образом, данная система имеет решение. Легко показать, что существует такое реше-

ние, что  $f_G(i)$  – натуральное число для всех  $i: 0 \leq i \leq s + t + n_k + l_m$ .

Найдем остальные инварианты Ульма–Капланского группы  $G$ , т.е.  $f_G(i)$  для всех  $i > s + t + n_k + l_m$ . Запишем систему (13), учитывая (14):

$$\begin{cases} f_G(t+1) = f_G(t+1+j(s+n_k+l_m)), j>0; \\ f_G(t+2) = f_G(t+2+j(s+n_k+l_m)), j>0; \\ \dots \\ f_G(t+s+n_k+l_m) = f_G(t+s+n_k+l_m+j(s+n_k+l_m)), j>0. \end{cases}$$

Из этой системы находим  $f_G(i)$  для всех  $i > s + t + n_k + l_m$ . Очевидно, что они также все натуральные. Инварианты Ульма–Капланского группы  $G'$  находим из системы (12).

Все инварианты Ульма–Капланского групп  $G$  и  $G'$  – натуральные числа, следовательно  $\alpha$  является  $U$ -последовательностью для группы  $G'$ , а  $\beta$  – для группы  $G$ .

2. Пусть  $G$  и  $G'$  – такие редуцированные сепарабельные  $p$ -группы с конечными инвариантами Ульма–Капланского, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G$  и  $G'$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ .

Если в  $\beta$  нет скачков, то  $G = G(\beta)$ , откуда  $G \cong G'$ .

Если в  $\beta$  есть скачок, то существует такое наименьшее  $j$  ( $0 < j \leq m$ ), что  $l_j \neq 0$ . Покажем, что существует  $i \geq 0$ , что  $f_G(i) \neq f_{G'}(i)$ , этим будет доказано, что группы  $G$  и  $G'$  – неизоморфные.

Допустим, что  $f_G(i) = f_{G'}(i)$  для всех  $i \geq 0$ . Тогда инварианты Ульма–Капланского группы  $G$  связаны следующими соотношениями (следует из теоремы 1):

$$\begin{cases} f_G(0) = f_{G'}(0), \\ \dots \\ f_G(j-2) = f_{G'}(j-2), \\ f_G(j-1) = f_{G'}(j-1) + \dots + f_{G'}(j-1+l_j), \\ f_G(j) = f_{G'}(j+l_j) + \dots + f_{G'}(j+l_{j+1}), \\ \dots \\ f_G(m-1) = f_{G'}(m-1+l_{m-1}) + \dots + f_{G'}(m-1+l_m), \\ f_G(m) = f_{G'}(m+l_m), \\ f_G(m+1) = f_{G'}(m+1+l_m). \end{cases}$$

Из  $i$ -го равенства следует, что  $f_G(j) = 0, \dots, f_G(j-1+l_j) = 0$ . Тогда  $f_G(j+l_j) = 0$ , так как входит в правую часть  $(j+1)$ -го равенства, а  $f_{G'}(j) = 0$ . Покажем, применяя метод математической индукции, что  $f_G(i) = 0$  для всех  $i > j + l_j$ . Пусть  $f_G(i) = 0$  для всех  $i: j + l_j \leq i \leq m-1$ .  $f_G(m)$  входит в правую часть некоторого  $k$ -го равенства, где  $j+1 \leq k < m$ . Это равенство имеет нулевую левую часть,

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Jonson B. On direct decomposition of torsion free abelian groups // Math. Scand. 1959. № 2. P. 361–371.
2. Kaplansky I. Infinite abelian groups. Michigan: Ann. Arbor, 1954. 90 p.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.
4. Moor D.J., Hewey E.J. On fully invariant subgroups of abelian  $p$ -groups // Comment. math. Univ. St. Pauli. 1972. № 2. P. 97–106.
5. Щерстнева (Ботыгина) А.И., Гринишон С.Я. Об инвариантах Ульма–Капланского вполне характеристических подгрупп абелевых  $p$ -групп // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. С. 227–231.
6. Ботыгина А.И., Гринишон С.Я. Абелевы группы, почти изоморфные по вполне характеристическим подгруппам // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной памяти Д.К. Фаддеева. СПб. 1997. С. 171–172.
7. Гринишон С.Я. Прямые абелевы группы, эквивалентные по вполне характеристическим подгруппам // Абелевы группы и модули. Томск, 1979. С. 29–36.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 23 ноября 1998 г.

следовательно,  $f_G(m) = 0$ . Таким образом,  $f_G(i) = 0$  для всех  $i > j + l_j$ , а это противоречит тому, что группа  $G$  – неограниченная.

Из вышеизложенного вытекают такие результаты.

**Теорема 5.** Пара последовательностей  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha, \beta \in W$ , задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех следующих условий:

- 1)  $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$ ,  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$ ;
- 2)  $\alpha_0 + \beta_0 = 0$ ,  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$  и каждая последовательность не имеет скачков;
- 3)  $\alpha_0 + \beta_0 = 0$ ,  $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in \mathbb{Z}_0$  и каждая последовательность имеет только один скачок.

**Теорема 6.** Пусть пара последовательностей  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha, \beta \in W$ , задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных  $p$ -групп с конечными инвариантами Ульма–Капланского.

1. Если одна из последовательностей начинается с нуля и имеет конечную длину, то группы  $G$  и  $G'$  – ограниченные и  $G \cong G'$ .

2. Если одна из последовательностей начинается с нуля и в ней нет скачков, то группы  $G$  и  $G'$  – неограниченные и  $G \cong G'$ .

3. Если одна из последовательностей начинается с нуля, имеет бесконечную длину и хотя бы один скачок, то группы  $G$  и  $G'$  – неограниченные и неизоморфные.

4. Если же каждая из последовательностей  $\alpha, \beta$  не удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то

- а) группы  $G$  и  $G'$  – неограниченные;
- б) существуют неизоморфные редуцированные сепарабельные  $p$ -группы  $G$  и  $G'$  с конечными инвариантами Ульма–Капланского, такие, что  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $U$ -последовательностями для групп  $G'$  и  $G$  соответственно,  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ .

**Теорема 7.** Пусть  $G$  и  $G'$  – редуцированные сепарабельные  $p$ -группы с конечными инвариантами Ульма–Капланского, почти изоморфные по вполне характеристическим подгруппам, т.е.  $G \cong G'(\alpha)$ ,  $G' \cong G(\beta)$ , где  $\alpha, \beta \in W$  –  $U$ -последовательности для групп  $G'$  и  $G$  соответственно. Если хотя бы одна из последовательностей начинается с нуля, то  $G \cong G'$  тогда и только тогда, когда эта последовательность не имеет скачков или имеет конечную длину.