УДК 515.12

С.П. Гулько

КЛАССЫ КОМПАКТОВ, ИМЕЮЩИХ ПОЛУРЕШЕТКИ РЕТРАКЦИЙ

Рассматриваются топологические пространства, на которых может быть введена структура разрешающей полурешетки ретракций. Доказывается ряд структурных теорем о пространствах, имеющих такие полурешетки. В частности, доказано, что непрерывный образ компакта Вальдивиа снова является таким же компактом, если на некотором Σ-подпространстве заданное отображение является факторным.

§1. Базисные понятия и конструкции

В работах автора [1, 2] рассматривались системы ретракций на топологических пространствах с операцией композиции в качестве умножения. Напомним, что ретракциями называются непрерывные отображения $r : X \to X$ такие, что $r = r\,r$. Если ретракции r_1 и r_2 коммутируют, то их композиция будет также ретракцией на пересечение $r_1(X)\cap r_2(X)$. Следовательно, любая система $\mathfrak{R}$ попарно коммутирующих ретракций будет образовывать алгебраическую структуру с этой бинарной операцией. Легко видеть, что эта операция, кроме коммутативности, является также ассоциативной и идемпотентной. Такие структуры принято называть полурешетками [3]. Всякая полурешетка допускает некоторое естественное отношение порядка [3], которое в нашем случае может быть определено следующим образом: $r_1 \le r_2$ тогда и только тогда, когда $r_1(X)$ является подмножеством в $r_2(X)$. Будем рассматривать эти структуры с некоторыми дополнительными свойствами, описанные в следующих определениях.

Определение 1. Пусть X – топологическое пространство. Семейство $\mathfrak{R}(X)$, элементами которого являются ретракции пространства X, будет называться разрешающей полурешеткой ретракций при выполнении условий:

($\mathfrak{R}1$) если $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}(X)$, то $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1 \in \mathfrak{R}$;

($\mathfrak{R}2$) для любых $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}(X)$ существует $r_3 \in \mathfrak{R}(X)$ такое, что $r_1 \le r_3$ и $r_2 \le r_3$;

($\mathfrak{R}3$) совокупность всех открытых множеств G в X, являющихся r-отмеченными (т.е. такими, что $G = r^{-1}(G)$), по крайней мере, для одного $r \in \mathfrak{R}$ образует базу топологии в X.

Кроме перечисленных базовых свойств, мы будем рассматривать также следующие дополнительные свойства семейства $\mathfrak{R}(X)$:

($\mathfrak{R}4$) полурешетка $\mathfrak{R}(X)$ называется накрывающей, если $X = \cup\{r(X);\ r \in \mathfrak{R}\}$;

($\mathfrak{R}5$) пусть Λ – некоторое семейство компактных подмножеств в пространстве X. Полурешетка (X) называется Λ-непрерывной, если для всякой возрастающей трансфинитной последовательности $\{r_\alpha;\ \alpha \le \beta\}$ в $\mathfrak{R}(X)$, для которой существует точная верхняя грань $r = \sup_{\alpha<\beta} r_\alpha$, для всякого компакта $K \in \Lambda$ и для всякого открытого множества G, содержащего в себе $r(K)$, найдется α_0 такое, что $r_\alpha(K) \subset G$ для всех α таких, что $\alpha_0 < \beta$.

В последнем условии мы всегда будем предполагать, что $\mathfrak{R}(\Lambda) \subset \Lambda$, т.е. $r(K) \in \Lambda$, если $r \in \mathfrak{R}$, $K \in \Lambda$. Если Λ состоит из всех одноточечных подмножеств, мы будем употреблять термин «точечно непрерывная полурешетка», а если Λ состоит из всех метризуемых компактов, то термин «m-непрерывная полурешетка». Если это условие выполняется для всех компактных подмножеств, то полурешетку $\mathfrak{R}(X)$ будем называть K-непрерывной. В §3 этой статьи мы определим также понятие просто непрерывной полурешетки, которое связано с известным определением непрерывной сходимости последовательностей функций.

Пусть λ – некоторый бесконечный кардинал.

($\mathfrak{R}6$) полурешетка $\mathfrak{R}(X)$ называется λ-полурешеткой, если сетевой вес $nw(r(X)) \le \lambda$ для каждого $r \in \mathfrak{R}$;

($\mathfrak{R}7$) полурешетка $\mathfrak{R}(X)$ называется λ-полной, если любое подмножество в $\mathfrak{R}(X)$ мощности $\le\lambda$ имеет в нем верхнюю грань. Полурешетка, которая является λ-полной для любого кардинала λ, будет называться просто полной.

Будем рассматривать точечно непрерывные полурешетки. В этом случае для точной верхней грани r трансфинитной возрастающей последовательности $\{r_\alpha;\ \alpha<\beta\}$ элементов в $\mathfrak{R}(X)$ множество $r(X)$ будет равно замыканию объединения $\cup_{\alpha<\beta} r_\alpha(X)$. Условие точечной непрерывности системы $\mathfrak{R}$ можно определить и иначе. Для этого заметим, что $\mathfrak{R}$ есть подмножество в пространстве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений $f: X \to Y$. Если это пространство наделить топологией поточечной сходимости, то на систему $\mathfrak{R}$ индуцируется именно та топология, которая обеспечивает нужную нам сходимость монотонно возрастающих последовательностей. О других топологиях на множестве ретракций $\mathfrak{R}$ будем говорить в §3.

Описанные выше системы ретракций существуют на подмножествах тихоновских произведений R^Γ или I^Γ, где $I = [0, 1]$ – сегмент на вещественной прямой R, которые «хорошо» расположены в этих произведениях. В частности, к ним относятся Σ-произведения произвольных семейств $X_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ сепарабельных метрических пространств, которые состоят из всех точек $x=(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ тихоновского произведения $\prod\{X_\gamma;\ \gamma\in\Gamma\}$, у которых носитель $\operatorname{supp} x = \{\gamma\in\Gamma;\ x_\gamma \ne a_\gamma\}$ не более чем счетен, где $a=\{a_\gamma; \gamma\in\Gamma\}$ – некоторая фиксированная точка, называемая центром в Σ. Будем также в этом случае говорить, что Σ является Σ-оболочкой точки a в соответствующем тихоновском произведении. Символом $\Sigma(X, \Gamma)$ будем обозначать такие Σ-произведения, в которых все сомножители совпадают с X. Особое значение имеют подпространства $c_0(\Gamma)$ и $\sigma(\Gamma)$ в $\Sigma(R, \Gamma)$. Первое из них состоит из всех точек x, для которых конечны множества $\{\gamma\in\Gamma;\ |x_\gamma| \le \varepsilon\}$, каково бы ни было $\varepsilon>0$, а второе – все точки с конечным носителем. Компактные подмножества $\Sigma(I, \Gamma)$ называются компактами Корсона, а компакты X в I^Γ, для которых пересечение $X\cap\Sigma(\Gamma)$ всюду плотно в X, – компактами Вальдивиа. Остальные определения стандартны и могут быть найдены в [4–6].

Теорема 1. Произведение R^{Γ} имеет K-непрерывную полную разрешающую полурешетку ретракций $\mathfrak{R}$, которая может быть стратифицирована (т.е. представлена в виде объединения своих частей) на подполурешетке $\mathfrak{R}$, которые являются λ-полурешетками для каждого бесконечного кардинала λ, меньшего мощности $|\Gamma|$.

Доказательство. Для произвольного подмножества A в Γ обозначим через r_A ретракцию, заданную формулами: $(r_A(x))_\gamma = x_\gamma$ если $\gamma \in A$, и $(r_A(x))_\gamma = a_\gamma$ – в противном случае. Определим $\mathfrak{R}_\lambda = \{r_A; A \subset \Gamma, |A| \leq \lambda\}$ и $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\lambda$. Легко проверить, что эти семейства являются искомыми.

Описанную в теореме 1 систему ретракций будем далее называть стандартной.

Определение 2. Пусть пространство X имеет полурешетку ретракций $\mathfrak{R}$. Подпространство Y в X называется почти $\mathfrak{R}$-инвариантным, если существует подмножество $\mathfrak{R}'$ в $\mathfrak{R}$ такое, что для каждого $r \in \mathfrak{R}$ существует $r' \in \mathfrak{R}'$такое, что $r' \geq r$ и $r'(Y) \subset Y$. Если это условие выполняется для $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$, то подпространство Y называется просто инвариантным. Подмножество $\mathfrak{R}'$ назовем замкнутым, если оно содержит все верхние грани возрастающих трансфинитных последовательностей, которые существуют в $\mathfrak{R}$.

Замечание 1. Легко видеть, что дополняя семейство $\mathfrak{R}'$ всевозможными композициями его элементов, мы получаем разрешающую полурешетку ретракций на подпространстве Y.

Благодаря этому замечанию непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть пространство X имеет разрешающую полурешетку ретракций $\mathfrak{R}(X)$ и Y – почти $\mathfrak{R}$-инвариантное подпространство в X (относительно некоторого подмножества $\mathfrak{R}'$ в $\mathfrak{R}$). Тогда пространство X также имеет разрешающую полурешетку ретракций $\mathfrak{R}(Y)$. При этом система $\mathfrak{R}(Y)$ будет являться накрывающей, λ-полурешеткой, λ-полной полурешеткой каждый раз, когда аналогичным свойством обладает полурешетка $\mathfrak{R}(X)$. Если $\mathfrak{R}'$ замкнуто в $\mathfrak{R}(X)$ и последняя система является Λ-непрерывной, то $\mathfrak{R}(Y)$ будет также $\Lambda(Y)$-непрерывной системой ретракций относительно системы $\Lambda(Y)$ всех компактов из системы Λ, содержащихся в Y.

Очевидны также следующие утверждения.

Теорема 3. В произведении R^{Γ} инвариантными подпространствами (относительно стандартной системы ретракций) являются $\Sigma(R, \Gamma)$, $c_0(\Gamma)$ и $\sigma(\Gamma)$. Следовательно, каждое из этих подпространств имеет K-непрерывную полную разрешающую полурешетку ретракций, которая дополнительно является поглощающей.

Теорема 4. Произведение семейства сепарабельных метрических пространств является почти $\mathfrak{R}$-инвариантным подпространством в произведении R^{Γ} относительно системы ретракций, соответствующей замкнутому подмножеству в стандартной полурешетке ретракций в R^{Γ}. Следовательно, любое Σ-произведение (а также σ-произведение и c_0-произведение) сепарабельных метрических пространств имеет K-непрерывную полную поглощающую разрешающую полурешетку ретракций.

Последняя теорема избавляет нас от необходимости раздельного изучения разного типа произведений – достаточно обходиться случаем произведения R^{Γ} и различных его подпространств. Наше следующее утверждение дает возможность обходиться некоторой минимальной ω-полурешеткой ретракций на «малые» подпространства, которую можно при необходимости «насытить» до полной системы ретракций. Напомним, что i-весом $iw(X)$ пространства X называется наименьший кардинал λ, для которого на X существует более слабая хаусдорфова топология веса λ (иначе говоря, это есть наименьший из весов пространств, на которые пространство X можно уплотнить).

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{R}$ является накрывающей точечно непрерывной (соотв. m-непрерывной) ω-полной разрешающей ω-полурешеткой ретракций на пространстве X. Тогда для каждого бесконечного кардинала λ на этом пространстве существует накрывающая точечно непрерывная (соотв. m-непрерывная) λ-полная разрешающая λ-полурешетка ретракций $\mathfrak{R}$, причем выполнены условия: (1) при $r \in \mathfrak{R}_\lambda$; (2) $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\omega \subset \mathfrak{R}_\lambda \subset \mathfrak{R}_{\lambda'}$ при $\omega \leq \lambda \leq \lambda'$; (3) если $r \in \mathfrak{R}_{\lambda'}$ и $iw(r(X)) \leq d(r(X)) \leq \lambda d(r(X)) \leq \lambda$ при $\lambda \leq \lambda'$, то $r \in \mathfrak{R}_\lambda$.

Доказательство. Пусть K – метризуемый компакт в X. В силу ($\mathfrak{R}4$) и ω-полноты системы $\mathfrak{R}$ найдется $r \in \mathfrak{R}$, для которого $r(X)$ содержит всюду плотное подмножество из K. Так как ретракты всегда являются замкнутыми подмножествами, то $K \subset r(X)$. Из ($\mathfrak{R}6$) заключаем, что для каждого $r \in \mathfrak{R}$ пространство $r(X)$ имеет счетный сетевой вес и это позволяет считать, что условия (1)–(3) теоремы выполнены при $\lambda = \omega$. Далее предположим, что для всех кардиналов, меньших λ, уже построены семейства ретракций, которые удовлетворяют всем необходимым требованиям. Пусть $\mathfrak{R}'$ есть объединение всех этих семейств. Если рассмотреть теперь произвольную возрастающую систему $\{r_\alpha; \alpha < \beta\}$ в $\mathfrak{R}'$ и взять $r \in \mathfrak{R}$, то семейство композиций $\{r\, r_\alpha; \alpha < \beta\}$ содержит не более счетного числа попарно различных элементов. В противном случае множество $r(X)$ содержит несчетную строго возрастающую последовательность замкнутых подпространств $r(r_\alpha(X))$, что несовместимо со счетностью сетевого веса пространства $r(X)$. Отсюда следует, что для каждой точки $x \in X$ существует предел последовательности $r_\alpha(x)$ при $\alpha \to \beta$. Это однозначно определяет отображение r_β. Докажем непрерывность этого отображения.

Пусть G – окрестность точки $r_\beta(x)$. В силу ($\mathfrak{R}3$) можем считать, что $G = r^{-1}(G)$. Это влечет $r(r_\beta(x)) \in G$ и, значит, $r(r_a(x)) \in G$ для всех достаточно больших α, что и требовалось доказать. Равенство $r_\beta^{\,2} = r_\beta$ очевидно. Таким образом, некоторое семейство ретракций построено, обозначим его $\mathfrak{R}_\lambda$. Если последовательность $\{r_\alpha{:}\alpha < \beta\}$ имеет длину $\beta \leq \lambda$, точечно непрерывна и $iw(r_\alpha(X)) \leq$ $\leq d(r_\beta X) \leq \lambda$ для каждого α, $\alpha < \beta$, то условие точечной непрерывности влечет неравенства $d(r_\beta(X)) \leq \lambda$ и $iw(r_\beta(X)) \leq \lambda$. Первое из этих неравенств очевидно, а если зафиксировать уплотнение φ_α: $r_\alpha(X) \to Z_\alpha$ на пространство веса $\leq \lambda$, то обычное диагональное произведение отображений $\varphi_\alpha\, r_\alpha$, $\alpha < \beta$ является в силу точечной непрерывности уплотнением пространства $r_\beta(X)$ на подпространство в произведении $\Pi\{Z_\alpha;\ \alpha < \beta\}$, имеющем вес $\leq \lambda$. На этом завершим до-казательство теоремы.

Таким образом, для топологических пространств, в которых i-вес или плотность их замкнутых подпространств равны их сетевому весу (таковы, например, все компактные хаусдорфовы пространства и все монолитные пространства), разрешаемая полурешетка ретракций всегда может быть «раздута».

§2. Полурешетки ретракций и уплотнения

В этом параграфе мы развиваем известный метод Д. Амира и Дж. Линденштраусса [7] построения уплотнений в произведения. При этом мы видоизменяем этот метод и придаем ему топологический характер. И нас интересуют не только уплотнения в пространство $c_0(\Gamma)$, но и в другие тестовые пространства, например в Σ-произведения. Суть метода, о котором мы ведем здесь речь, заключается в том, что вместо структур типа полурешеток ретракций строятся «длинные последовательности» ретракций, структура которых описана в следующем определении.

Определение 3. Пусть X – пространство i-веса λ. Семейство ретракций $\{r_\alpha;\ \omega \leq \alpha \leq \lambda\}$ в пространстве X называется проекционным разложением единицы, если выполнены условия:

(*а*) $r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha = r_\alpha$ при $\omega \leq \alpha \leq \beta \leq \lambda$;

(*б*) r_λ – тождественное отображение на X;

(*в*) $iw\,(r_\alpha(X)) \leq \alpha$ для каждого α, $\omega \leq \alpha \leq \lambda$;

(*г*) (точечная непрерывность) для каждого предельного ординала α и любой точки $x \in X$ выполнено $r_\alpha(x) = \lim_{\beta<\alpha} r_\beta(x)$.

Теорема 6. Пусть $\{r_\alpha;\ \omega \leq \alpha \leq \lambda\}$ – проекционное разложение единицы на топологическом пространстве X. Тогда если теснота $t(X)$ пространства X счетна, то выполнено условие: (*) – множество $\{r_\alpha;\ \omega \leq \alpha \leq \lambda,\ r_\alpha(x) \neq r_{\alpha+1}(x)\}$ не более чем счетно для каждой точки $x \in X$.

Доказательство. Предположим, что множество, указанное в (*), не является счетным. Тогда оно очевидным образом гомеоморфно несчетному отрезку ординалов со стандартной порядковой топологией, откуда сразу следует несчетность тесноты пространства X.

Теорема 7. Пусть в пространстве X каждое замкнутое подпространство допускает проекционное разложение единицы, удовлетворяющее условию (*). Тогда существует уплотнение пространства X на некоторое подпространство в $\Sigma(R, \Gamma)$. В частности, если X компактно, то X – компакт Корсона.

Доказательство. Утверждение очевидно при $iw(X) \leq \omega$. Предположим, что оно уже доказано для всех пространств i-веса $< \lambda$ и пусть $iw(X) = \lambda$. Рассмотрим проекционное разложение единицы $\{r_\alpha;\ \omega \leq \alpha \leq \lambda\}$ в X, удовлетворяющее условию (*). Так как каждый ретракт $r_\alpha(X)$ является замкнутым подпространством в X и его i-вес $< \lambda$, то по предположению индукции существует уплотнение $\varphi_\alpha\colon r_\alpha(X) \to \Sigma(R, \Gamma_\alpha)$, $\omega \leq \alpha < \lambda$, причем можно считать, что $\Gamma_\omega = N$ и все множества в семействе $\{\Gamma_\alpha;\ \omega \leq \alpha < \lambda\}$ попарно дизъюнктны. Положим $\Gamma = N\{\Gamma_{\alpha+1};\ \omega \leq \alpha < \lambda\}$. Определим отображение $\varphi\colon X \to R^\Gamma$ формулами: $\varphi(x)(n) = \varphi_\omega(r_\omega(x))(n)$, при $n \in N$ $\varphi(x)(\beta) = \varphi_{\alpha+1}(r_{\alpha+1}(x))(\beta)$ при $\beta \in \Gamma_{\alpha+1}$, $\omega \leq \alpha < \lambda$.

Это отображение непрерывно, так как является диагональным произведением семейства непрерывных отображений. Проверим его инъективность. Пусть x, y – различные точки. Обозначим через γ наименьший ординал такой, что $r_\gamma(x) \neq r_\gamma(y)$. Случай $\gamma = \omega$ очевиден, предположим $\gamma > \omega$. В силу точечной непрерывности системы ретракций ординал γ не может быть предельным, поэтому $\gamma = \alpha + 1$. Тогда $r_\alpha(x) = r_\alpha(y)$ и $r_{\alpha+1}(x) \neq r_{\alpha+1}(y)$. По предыдущим предположениям отображение $\varphi_{\alpha+1}\, r_{\alpha+1}$ обязано различить последние две точки, что с учетом предшествующего равенства влечет $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Осталось только заметить, что образ X при отображении φ лежит в $\Sigma(R, \Gamma)$ в силу условия (*).

Поскольку компакты Корсона имеют счетную тесноту, то мы видим, что в случае компактных пространств условие (*) фактически эквивалентно счетной тесноте рассматриваемого пространства.

Замечание 2. Уплотнение в пространство $\sigma(R^\omega, \Gamma)$ вместо рассмотренного выше мы получим, если заменим условие (*) на следующее (*′): множество $\{\alpha;\ \omega \leq \alpha < \lambda,\ r_\alpha(x) \neq r_{\alpha+1}(x)\}$ конечно для каждого $x \in X$.

Для произвольного отображения $\varphi : X \to Y$ обозначим через φ^* отображение пространств непрерывных функций $C(Y) \to C(X)$, заданное формулой.

Теорема 8. Пусть X – компакт Вальдивиа. Тогда существует линейное уплотнение $T\colon C(X) \to c_0(\Gamma)$ с нормой $\|T\| = 1$, причем это отображение будет непрерывным и при наделении обоих пространств топологией поточечной сходимости.

Доказательство этой теоремы хорошо известно [4,7], поэтому мы его опускаем. Заметим только, что условие (*) надо заменить на (**) ниже и вести рассуждения по примерно той же схеме, что и в предыдущей теореме.

(**) Для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $f \in C(X)$ множество $\{\alpha;\ \omega \leq \alpha < \lambda,\ \|r^*_\alpha(f) - r^*_{\alpha+1}(f)\| > \varepsilon\}$ конечно.

Разумеется, через r^*_α обозначены ретракции (проекции) в пространстве $C(X)$, которые являются дуальными к проекционному разложению единицы на пространстве X. Существование такого разложения легко следует из утверждений в следующем параграфе этой статьи.

Теорема 9. Если пространство X имеет накрывающую точечно непрерывную ω-полную разрешающую ω-полурешетку ретракций, то X имеет проекционное разложение единицы, удовлетворяющее условию (*). Следовательно, X уплотняется в $\Sigma(R, \Gamma)$ для некоторого Γ.

Доказательство. Произведем «насыщение» заданной полурешетки ретракций до цепочки систем $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\omega \subset \ldots \subset \mathfrak{R}_1$, где λ равно плотности $d(X)$ пространства X, как это сделано в теореме 5. Зафиксируем также некоторое всюду плотное в X подмножество $\{x_\alpha;\ \omega \leq \alpha \leq \lambda\}$. Затем выберем r_ω в $\mathfrak{R}$ произвольным образом. Если, далее, $\beta = \alpha + 1$, то в силу ($\mathfrak{R}$2) и ($\mathfrak{R}$4) можно найти $r_\beta \geq r_\alpha$ такое, что $x_\alpha \in r_\beta(X)$. Если же β – предельный ординал, то полагаем $r_\omega = \sup_{\alpha<\beta} r_\alpha$. Из теоремы 5 и последующих утверждений этого параграфа легко следует, что получившаяся система ретракций $\{r_\alpha;\ \omega \leq \alpha \leq \lambda\}$ является проекционным разложением единицы на пространстве X. По условию ($\mathfrak{R}$4) для каждой точки $x \in X$

найдется $r\in\mathfrak{R}$, для которого $x = r(x)$. Из этого, из ($\mathfrak{R}$1), из неравенства $nw(r(X))\leq\omega$ повторением рассуждения доказательства теоремы 5 следует, что число попарно различных элементов в трансфинитной последовательности точек $r_\alpha(x) = r_\alpha(r(x))$ не более чем счетно. Следовательно, наша «длинная последовательность» ретракций удовлетворяет условию (*). Осталось сослаться на теорему 7.

§3. Полурешетки и топологические операции

В этой части мы установим, что наличие полурешеток ретракций на топологических пространствах является свойством, устойчивым при естественных топологических операциях – таких, как переход к замкнутому подпространству и фактор-пространству, оно переносится на пространства непрерывных функций на данном пространстве и некоторых других подобных операциях.

Обозначим через $C_A(X, Y)$ пространство всех непрерывных отображений $f: X\to Y$ с топологией равномерной сходимости на элементах из семейства Λ. Если $\pi: X\to Z$ – непрерывное отображение, то пусть $\pi^*: C_A(Z, Y)\to C_A(X, Y)$ – отображение, заданное формулой $\pi^*: (f) = f\pi$. Если класс компактов $\pi(\Lambda)$ содержится в классе Λ', то отображение π^* является непрерывным. Рутинная проверка показывает, что верна следующая теорема.

Теорема 10. Пусть пространство X имеет Λ-непрерывную ω-полную разрешающую ω-полурешетку ретракций $\mathfrak{R}$ и Y-сепарабельное метрическое пространство. Тогда семейство $\mathfrak{R}^* = \{r^*;\ r\in\mathfrak{R}\}$ является точечно непрерывной ω-полной разрешающей ω-полурешеткой ретракций в пространстве $C_A(X, Y)$.

Система $\mathfrak{R}^*$ будет накрывающей тогда и только тогда, когда для любого непрерывного отображения $f: X\to Y$ найдется $r\in\mathfrak{R}$ такое, что $f = f\,r$. Это свойство является аналогом хорошо известного свойства «зависимость функции от счетного числа координат» для функций на декартовом произведении. Если семейство Λ является семейством всех метризуемых компактов, т.е. для случая пространства $C_m(X, Y)$, теорема 10 может быть усилена, как показывает следующая теорема.

Теорема 11. Предположим, что в условиях предыдущей теоремы Λ является семейством всех метризуемых компактов в X. Тогда семейство $\mathfrak{R}$ является $\mathfrak{m}$-непрерывной полурешеткой.

Доказательство. Основные рассуждения инициированы рассуждениями Э. Майкла из статьи [8]. Детали могут быть найдены в [2], и мы их опускаем.

Определение 4. Полурешетку $\mathfrak{R}$ назовем непрерывной, если для каждой сходящейся направленности $\{x_i\}$ точек пространства X и возрастающей трансфинитной последовательности r_α ретракций из $\mathfrak{R}$ направленность $r_\alpha(x_i)$ является сходящейся. Последнее означает, что если x и r – пределы этих направленностей, то для каждой окрестности O точки $r(x)$ найдутся индексы α_0 и i_0 такие, что $r_\alpha(x_i)\in$ O для всех $\alpha\geq\alpha_0$, $i\geq i_0$.

Теорема 12. Пусть Y – замкнутое подпространство в пространстве X, имеющем накрывающую непрерывную ω-полную разрешающую ω-полурешетку ретракций $\mathfrak{R}$. Тогда Y является почти $\mathfrak{R}$-инвариантным подпространством в X относительно замкнутого подмножества $\mathfrak{R}'$ в $\mathfrak{R}$. Следовательно, пространство Y также имеет накрывающую непрерывную ω-полную разрешающую ω-полурешетку ретракций.

Доказательство. Пусть $r\in\mathfrak{R}$ выбрано произвольно. Обозначим $r_1 = r$ и по индукции выберем последовательность ретракций r_n из $\mathfrak{R}$ и счетных подмножеств M_n из Y таким образом, чтобы $r_n(M_n)$ было плотным в $r_n(Y)$, $r_{n+1}\geq r_n$ и $r_{n+1}(M_n) = M_n$. Это следует из ($\mathfrak{R}$4), ($\mathfrak{R}$6) и ($\mathfrak{R}$7). Обозначим $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ и $r = sup_{n\in N}r_n$ (существование последнего супремума следует из ($\mathfrak{R}$2) и из ω-полноты системы $\mathfrak{R}$). Из непрерывности r легко следует, что $r(M)$ плотно в $r(Y)$. По построению $r(M) = M\subset Y$. Из последних двух фактов, из непрерывности $\mathfrak{R}$ и из замкнутости Y выводим, что $r(Y)\subset Y$. Определим $\mathfrak{R}^* = \{r\in\mathfrak{R};\ r(Y)\subset Y\}$. Из сказанного выше следует, что семейство $\mathfrak{R}^*$ непусто. Если трансфинитная последовательность r_α возрастает и состоит из элементов в $\mathfrak{R}^*$, то ее супремум r снова принадлежит этому семейству, так как $r(x) = \lim r_\alpha(x)\in Y$ для каждой точки $x\in Y$ в силу замкнутости множества Y.

Нетрудно проверить, что стандартная полурешетка ретракций $\mathfrak{R}$ в произведениях R^Γ и I^Γ является непрерывной. Она будет накрывающей на их подпространствах $\Sigma(R, \Gamma)$ и $\Sigma(I, \Gamma)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Каждое замкнутое подпространство в $\Sigma(R, \Gamma)$ (или в $\Sigma(I, \Gamma)$) является почти $\mathfrak{R}$-инвариантным подпространством. Следовательно, они имеют накрывающую непрерывную ω-полную разрешающую ω-полурешетку ретракций.

Следствие 2. Для компактного пространства X следующие условия эквивалентны:

1) X – компакт Корсона;

2) X имеет точечно непрерывную накрывающую ω-полную разрешающую ω-полурешетку ретракций;

3) X имеет проекционное разложение единицы, удовлетворяющее условию (*);

4) $t(X)\leq\aleph_0$ и X имеет проекционное разложение единицы.

Доказательство. Импликация 1)$\Rightarrow$2) доказана в предыдущем следствии. Импликация 1)$\Rightarrow$4) легко выводится из теоремы 5. Из теоремы 6 следует 4)$\Rightarrow$3). Из теоремы 8 выводим 2)$\Rightarrow$3). Импликация 3)$\Rightarrow$1) следует из теоремы 7.

Следствие 1 можно перенести на случай замкнутых подпространств в пространствах функций, которые определены на Σ-произведениях, или их почти инвариантных подпространств. Для этого нам понадобится следующая хорошо известная и легко проверяемая лемма.

Лемма 1. Если $\pi: X\to Y$ – факторное отображение «на», то подпространство $\pi^*(C_p(Y))$ замкнуто в $C_p(X)$.

Лемма 2. Пусть $\pi: X\to Y$ – факторное отображение «на» и r-ретракция в пространстве X таковы, что $r^*(\pi^*(C(Y)))\subset\pi^*(C(Y))$. Тогда отображение $\pi r\pi^{-1}$ есть ретракция в пространстве Y.

Доказательство. Покажем однозначность отображения $\pi r\pi^{-1}$. Предположим противное, пусть существуют $y\in Y$ и

$x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ такие, что $\pi r(x_1) \neq \pi r(x_2)$. Тогда найдется $f \in C(Y)$, для которого $f(\pi r(x_1)) \neq f(\pi r(x_2))$. По условию леммы f ($\pi r = r^*(f\pi) \in \pi^*(C(Y))$, поэтому $f\pi r = g\pi$ для некоторого $g \in C(Y)$. Отсюда $f(\pi r(x_1)) = g\pi(x_1) = \pi(x_2) = f(\pi r(x_2))$, что противоречит выбору f. Аналогичным рассуждением доказывается тождество $\pi r\pi^{-1}\pi = \pi r$. Из этой формулы нетрудно видеть, что квадрат выражения $\pi r\pi^{-1}$ совпадает с ним самим. Осталось убедиться в непрерывности отображения $\pi r\pi^{-1}$. Пусть G – открытое множество в Y. Тогда $\pi r^{-1}\pi^{-1}(G) = \pi\{y, \pi r(y) \in G\} \subset \{x, \pi r^{-1}\pi^{-1}(x)\} = \pi r\pi^{-1}(G)$. Обратное включение очевидно и $(\pi r\pi^{-1})(G) = \pi r^{-1}\pi^{-1}(G)$. Поэтому вследствие факторности отображения π достаточно показать π-отмеченность открытого множества $r^{-1}\pi^{-1}(G)$, т.е. доказать равенство $\pi^{-1}\pi r^{-1}\pi^{-1}(G) = r^{-1}\pi^{-1}(G)$. Обозначим левую часть последнего равенства через A, а правую – через B. Тогда имеем $\pi r\pi^{-1}\pi(A) = G$, откуда $A \subset B$. С другой стороны, $A = \pi^{-1}\pi(B)$, следовательно, $B \subset A$.

Теорема 13. Пусть π: $X \to Y$ – факторное отображение «на» и $\mathfrak{R}$ – разрешающая полурешетка ретракций на пространстве X такие, что

(1) подпространство $\pi^*(C_p(Y))$ является почти $\mathfrak{R}^*$-инвариантным подпространством в $C_p(X)$;

(2) для каждого $f \in C(X)$ существует $r \in \mathfrak{R}$ такое, что $f = fr = r^*(f)$.

Тогда семейство $\mathfrak{R}(Y) = \{\pi r\pi^{-1};\ r^* \in \mathfrak{R}^*(\pi(C(Y)))\}$ является разрешающей полурешеткой ретракций на пространстве Y. Если система $\mathfrak{R}$ есть точечно непрерывная (накрывающая, λ-полная, λ-полурешетка) на X, то $\mathfrak{R}(Y)$ является такой же системой на Y.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что элементы семейства $\mathfrak{R}(Y)$ действительно являются ретракциями пространства Y. Условие ($\mathfrak{R}1$) для этой системы следует из тождества $\pi r\pi^{-1}\pi = \pi r$, установленного по ходу доказательства леммы 2. Условие ($\mathfrak{R}2$) очевидно. При проверке условия ($\mathfrak{R}3$) достаточно ограничиться открытыми множествами вида $G = f^{-1}(a, b)$, где (a, b) – интервал вещественной прямой. Но тогда все получается из условия (2). Если $\mathfrak{R}$ есть λ-полурешетка, то из неравенства $nw(\pi r^{-1}\pi^{-1}(Y)) = nw\,(\pi r(X)) \le nw\,(r(X))$ следует условие ($\mathfrak{R}6$) для системы $\mathfrak{R}(Y)$. Из тождества $\pi r\pi^{-1}\pi = \pi r$, которое мы уже упоминали выше, следует, что для возрастающей трансфинитной последовательности r_α с супремумом r выполнено $\pi r_\alpha\pi^{-1}(y) \to \pi r\pi^{-1}(y)$ для каждого $y \in Y$, из чего сразу следует точечная непрерывность системы $\mathfrak{R}(Y)$. Нерассмотренные утверждения теоремы очевидны.

Замечание 3. Практически тем же самым рассуждением, как в последнем доказательстве, устанавливается K-непрерывность системы $\mathfrak{R}(Y)$ в случае, когда система $\mathfrak{R}$ для пространства X была таковой, а фактор-отображение было компактно накрывающим (т.е. любой компакт в пространстве Y является непрерывным образом некоторого компакта из пространства X). Назовем отображение $k(\omega)$-накрывающим, если последнее условие выполняется для всех компактов счетного веса, т.е. для метризуемых компактных подмножеств. Тогда если отображение является $k(\omega)$-накрываемым факторным образом пространства X, то система $\mathfrak{R}(Y)$ будет m-непрерывной полурешеткой.

Следствие 3. Пусть f: $K \to L$ – непрерывное отображение, заданное на компакте Вальдивиа K, причем существует такое вложение K в R^Γ, что на $K \cap \Sigma(R, \Gamma)$ отображение f является факторным отображением. Тогда компакт L является компактом Вальдивиа.

Доказательство. Это утверждение нетрудно вывести из теорем 7, 12 и 13. На пространстве $K \cap \Sigma(R, \Gamma)$ действует накрывающая полная разрешающая полурешетка ретракций. Она является λ-полурешеткой для каждого бесконечного кардинала λ. При отображении f подпространство $K \cap \Sigma(\Gamma)$ переводится на некоторое подпространство в L, которое также имеет богатую полурешетку ретракций по теореме 13. Легко видеть, что K является расширением Чеха–Стоуна своего подпространства $K \cap \Sigma(\Gamma)$, это дает возможность продолжить все ретракции на все пространство L. Это определяет соответствующее гомеоморфное отображение L в тихоновский куб, порождающее структуру компакта Вальдивиа на этом пространстве.

Замечание 4. Последнее следствие можно обратить, т.е. в случае непрерывного отображения между компактами Вальдивиа в них существуют подпространства, вложимые как замкнутые подпространство в некоторые Σ-произведения и которые заданное отображение переводят друг на друга. Но непрерывное отображение между двумя замкнутыми подпространствами в Σ-произведениями коммутирует с некоторой стандартной разрешающей полурешеткой ретракций в Σ. Отсюда следует, что данное отображение является замкнутым на Σ-подпространстве и, следовательно, факторным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гулько С.П.* О свойствах множеств, лежащих в Σ-произведениях // ДАН. 1977. Т. 237, № 3. С. 505–508.
2. *Гулько С.П.* О свойствах функциональных пространств // Семинар по общей топологии. М.: Изд-во МГУ, 1981.
3. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
4. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
5. *Келли Дж.* Общая топология. М.: Наука, 1981.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
7. *Amir D.* and *Lindenstrauss J.* The structure of weakly compact sets in Banach spaces // Ann. Math. 1968. V. 88, № 1. P. 35–46.
8. *Michael E.* $\aleph_0$ spaces // J. Math. And Mech. 1966. V. 15, № 6. P. 983–1002.
9. *Kalenda M.* Continuous *images* and other topological properties of Valdivia compacta // Fund. Math., to appear.

Статья поступила в научную редакцию «Математика» 15 декабря 1999 г.