

НОВЫЕ ПРИМЕРЫ КВАЗИПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Вводится класс квазимарковских процессов с точечным дефектом, являющихся смесью двух марковских процессов. Приводятся примеры таких процессов.

Теория марковских процессов широко известна, но марковское свойство независимости «будущего» от «прошлого» при известном «настоящем» является серьезным ограничением на случайный процесс. Проблема построения моделей, описывающих природные явления более адекватно, остаётся актуальной. Некоторые из таких моделей, например полумарковские процессы, давно известны. Во всех этих моделях дело сводится к расширению свойства марковости. В рассматриваемом здесь квазимарковском случае учитывается зависимость «будущего» от «прошлого» при известном «настоящем» некоторого специального вида. При этом

$$P\{x_u \in B | N_s^t\} = P\{x_u \in B | x_t\} + \beta(s, x_s, t, u, B), \quad s \leq t \leq u, \quad (n.n.P),$$

где $\beta(s, x_s, t, u, B)$ – случайная величина, которая называется точечным дефектом случайного процесса x_s ; x_t – положение «частицы» в момент времени t . Такие случайные процессы называются квазимарковскими процессами с точечным дефектом (к.-м.п.т.д.) [1]. Всюду здесь мы считаем, что существует регулярный вариант $P(s, x, t, B)$ условной вероятности $P\{x_t \in B | x_s = x\}$. Квазимарковское уравнение Колмогорова–Чепмена имеет вид

$$P(s, x, u, B) = \int_X P(s, x, t, dy) P(t, y, u, B) + \beta(s, x, t, u, B), \quad (1)$$

где $P(s, x, t, B)$ – квазипереходная функция к.-м.п.т.д. Отсюда следует, что дефект $\beta(s, x, t, u, B)$ квазимарковского процесса с квазипереходной функцией $P(s, x, t, B)$ вычисляется по формуле

$$\beta(s, x, t, u, B) = P(s, x, t, dy) P(t, y, u, B). \quad (2)$$

Условия на $\beta(s, x, t, u, B)$ выглядят так [1]:

$$\beta(s, x, t, u, E) = 0, \quad \text{где } E - \text{пустое множество,}$$

$$\beta(s, x, t, u, X) = 0,$$

$$\beta(s, x, t, t, B) = 0, \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

$$\beta(s, x, s, u, B) = 0, \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Если $X = R^n$ и квазипереходная функция $P(s, x, t, B)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то из (2) следует, что дефект так же абсолютно непрерывен относительно меры Лебега в R^n . В этом случае квазимарковское уравнение Колмогорова–Чепмена можно переписать в терминах плотностей $p(s, x, t, y)$ и $\beta(s, x, t, u, y)$ мер $P(s, x, t, B)$ и $\beta(s, x, t, u, B)$:

$$p(s, x, t, y) = \int_X p(s, x, t, y) p(t, y, u, z) dy + \beta(s, x, t, u, z).$$

Множество примеров квазипереходных функций можно построить, отталкиваясь от переходных функций марковских процессов. В [1] предложен следующий подход. Пусть $P(s, x, t, B)$ – переходная функция марковского процесса, не обязательно необрывающегося. Если функция $f(s, x, t, y)$, ($s \leq t$, $t \in T$, $x, y \in X$) не отрицательна и измерима по x и по y и

$$\int_X f(s, x, t, y) P(s, x, t, dy) = 1,$$

то функция

$$R(s, x, t, B) = \int_B f(s, x, t, y) P(s, x, t, dy)$$

является квазипереходной функцией. В данной статье предлагается другой подход к построению квазимарковских переходных функций.

Предложение. Пусть $P(s, x, t, B)$, $Q(s, x, t, B)$ – переходные функции марковских процессов $\alpha, \gamma \in R_+$, $\alpha + \gamma = 1$. Тогда функция $\alpha P(s, x, t, B) + \gamma Q(s, x, t, B) = R(s, x, t, B)$ является квазипереходной функцией некоторого к.-м.п.т.д.

Доказательство. Функция $R(s, x, t, B)$ обладает всеми свойствами переходных функций марковских процессов. Проверим, удовлетворяет ли она уравнению Колмогорова–Чепмена:

$$\begin{aligned} \int_X R(s, x, t, dy) R(t, y, u, B) &= \int_X [\alpha P(s, x, t, dy) + \gamma Q(s, x, t, dy)] [\alpha P(t, y, u, B) + \gamma Q(t, y, u, B)] = \\ &= \alpha^2 P(s, x, u, B) + \gamma^2 Q(s, x, u, B) + \\ &+ \alpha\gamma \int_X [P(s, x, t, dy) Q(t, y, u, B) + Q(s, x, t, dy) P(t, y, u, B)] = \\ &= R(s, x, u, B) + (\alpha - \alpha^2) \{P(s, x, u, B) + \\ &+ Q(s, x, u, B) - \int_X P(s, x, t, dy) Q(t, y, u, B) - \\ &- \int_X Q(s, x, t, dy) P(t, y, u, B)\}. \end{aligned}$$

Уравнение Колмогорова–Чепмена не выполняется, и, следовательно, функция $R(s, x, t, B)$ – квазипереходная. Согласно [1] существует к.-м.п.т.д., отвечающий этой переходной функции. Предложение доказано.

Квазимарковский процесс с точечным дефектом, возникающий в этой схеме, «физически» представляет собой смесь марковских процессов с переходными функциями $P(s, x, t, B)$ и $Q(s, x, t, B)$. Для такого процесса формула дефекта имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta(s, x, t, u, B) &= (\alpha - \alpha^2) \{P(s, x, u, B) + \\ &+ Q(s, x, u, B) - \int_X P(s, x, t, dy) Q(t, y, u, B) - \\ &- \int_X Q(s, x, t, dy) P(t, y, u, B)\}. \end{aligned}$$

Приведем примеры квазимарковских переходных функций для некоторых смесей марковских процессов.

Пример 1. Рассмотрим детерминированное движение со скоростью v . Переходная функция этого процесса имеет вид $P(s, x, t, B) = I_B(x + v(t - s))$. Положим

$$P(s, x, t, B) = I_B(x + v(t - s)),$$

$$Q(s, x, t, B) = I_B(x + w(t - s)), \quad v, w \in R_+.$$

Тогда квазипереходная функция $R(s, x, t, B)$ и дефект имеют вид

$$\begin{aligned} R(s, x, t, B) &= \alpha I_B(x + v(t - s)) + (1 - \alpha) I_B(x + w(t - s)), \\ \beta(s, x, t, u, B) &= (\alpha - \alpha^2) \{I_B(x + v(u - s)) + I_B(x + w(u - s)) - \\ &- I_B(x + v(t - s) + w(u - t)) - I_B(x + w(t - s) + v(u - t))\}. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим переходные функции винеровских процессов.

$$P(s, x, t, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] dy,$$

$$Q(s, x, t, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{3\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{3(t-s)}\right] dy.$$

Тогда квазипереходная функция $R(s, x, t, B)$ имеет вид

$$R(s, x, t, B) = \int_B \left[\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right] + \frac{1-\alpha}{\sqrt{3\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{3(t-s)}\right] \right] dy.$$

Пример 3. Рассмотрим переходную функцию Пуассона.

$$\Pi(x, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2}\right] dy.$$

$$\Pi_n(x, B) = \int_B \Pi(x, dy) \Pi_{n-1}(y, B).$$

$$\Pi_0(x, B) = I_B(x).$$

$$P(s, x, t, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (t-s)^n}{n!} \exp[-a(t-s)] \Pi_n(x, B),$$

где a – положительная константа.

$$\Pi_n(x, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2n}\right] dy.$$

$$Q(s, x, t, B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n (t-s)^n}{n!} \exp[-b(t-s)] \Delta_n(x, B),$$

где b – положительная константа и

$$\Delta_n(x, B) = \int_B \frac{1}{\sqrt{3n\pi}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{3n}\right] dy.$$

Квазипереходная функция, построенная по переходной функции Пуассона, выглядит так:

$$\begin{aligned} R(s, x, t, B) &= \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n (t-s)^n}{n!} \exp[-a(t-s)] \Pi_n(x, B) + \\ &+ (1-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n (t-s)^n}{n!} \exp[-b(t-s)] \Delta_n(x, B). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобкова Е.А., Устинов Ю.К. Квазимарковские процессы с точечным дефектом // Математическая статистика и её приложения. Томск, 1982. С. 8–16.

Статья представлена лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 30 октября 1998 г.