УДК 517.54

Л.С. Копанева

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ С СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА

Найдены мажорантные области для двух функционалов, зависящих от значений отображения и производной в фиксированной точке из верхней полуплоскости, на классе отображений с симметрией переноса вдоль вещественной оси.

Область D комплексной w-плоскости будем называть областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор T, $T>0$, если $D=L(D)$, где $L(w)=w+T$. Каждая область с симметрией переноса неограничена и конечна. Бесконечно удаленная точка $w_\infty=\infty$ может быть телом одного или многих простых концов границы области D. При преобразованиях $L(w)=w+T$ области D возможны только два варианта: в w_∞ среди всех простых концов неподвижными могут быть либо один простой конец, либо два простых конца. В первом случае область D будем называть областью типа полуплоскости, во втором – типа полосы. В дальнейшем будут рассматриваться только односвязные области с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости.

Пусть $\Pi=\{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Im}z>0\}$ и D есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор T типа полуплоскости. По теореме Римана существует однолистное голоморфное отображение f: $\Pi\to\mathbf{C}$ такое, что $f(\Pi)=D$. Отображение f будем называть отображением с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор T.

Отметим, что для каждого отображения f с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор T, $T>0$, существует вещественное число t, $t>0$, такое, что $f(z+kt)=f(z)+rT$, $k\in\mathbf{Z}$. Действительно, обозначим через φ отображение, обратное к отображению f. Пусть $w_0=f(z_0)$, где $z_0\in\Pi$. Композиция $\varphi(f(z)+T)$ является автоморфизмом верхней полуплоскости и, следовательно, $\varphi(f(z)+T)=az+d$, где a и d – вещественные постоянные. Полагая $z=z_0$ и $\varphi(w_0+T)=z_0+t$, находим $a=1$ и $d=t$. Таким образом, $f(z+t)=f(z)+T$. По индукции устанавливаем требуемое равенство.

Обозначим через $X_{t,T}$ множество всех голоморфных однолистных в верхней полуплоскости отображений f: $\Pi\to\mathbf{C}$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(\Pi)=D$ есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор T, $T>0$, типа полуплоскости;

2) $f(z+kt)=f(z)+kT,\ k\in\mathbf{Z}$;

3) $\lim\limits_{y\to+\infty}\big(f(z)-z\big)=0$, где $y=\operatorname{Im}z$.

Теорема 1. Класс $X_{t,T}$ обладает следующими свойствами:

1. Для каждого $f\in X_{t,T}$ и каждого $m\in\mathbf{R}$ отображение f_m: $\Pi\to\mathbf{C}$, $f_m(z)=f(z+m)-m$ принадлежит классу $X_{t,T}$.

2. Для каждого $f\in X_{t,T}$ и каждого $p\in[0;+\infty)$ отображение f_p: $\Pi\to\mathbf{C}$, $f_p(z)=f(z+ip)-ip$ принадлежит классу $X_{t,T}$.

3. Для каждого отображения $f\in X_{t,T}$ выполняется равенство $t=T$.

Доказательство. Голоморфность и однолистность отображений f_m и f_p очевидны. Для каждого $k\in\mathbf{Z}$ имеем

$$f_m(z+kt)=f(z+m+kt)-m=f(z+m)+kT-m=f_m(z)+kT,$$
$$f_p(z+kt)=f(z+ip+kt)-ip=f(z+ip)+kT-ip=f_p(z)+kT.$$

Проверим третье условие принадлежности отображений f_m и f_p классу $X_{t,T}$. Для отображения f_m имеем

$$\lim_{y\to+\infty}\big(f_m(z)-z\big)=\lim_{y\to+\infty}\big(f(z+m)-m-z\big)=$$
$$=\lim_{\operatorname{Im}(z+m)=y\to+\infty}\big(f(z+m)-(z+m)\big)=0.$$

Аналогично для f_p:

$$\lim_{y\to+\infty}\big(f_p(z)-z\big)=$$
$$\lim_{y\to+\infty}\big(f(x+iy+ip)-ip-x-iy\big)=$$
$$=\lim_{p+y\to+\infty}\big(f(x+i(y+p))-(x+i(y+p))\big)=0.$$

Значит, $f_m\in X_{t,T}$ и $f_p\in X_{t,T}$. По второму условию принадлежности отображения f классу $X_{t,T}$ имеем

$$\lim_{y\to+\infty}\big(f(z+t)-(z+t)\big)=\lim_{y\to+\infty}\big(f(z)-z+T-t\big)=T-t.$$

С другой стороны, этот предел должен равняться нулю. Теорема 1 доказана.

В дальнейшем для определенности и простоты полагаем $t=T=\pi$ и переобозначим $X_{t,T}=X_\pi$.

Таким образом, изучается класс X_π всех голоморфных однолистных в верхней полуплоскости отображений f: $\Pi\to\mathbf{C}$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(\Pi)=D$ есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор $T=\pi$ типа полуплоскости;

2) $f(z+k\pi)=f(z)+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$;

3) $\lim\limits_{y\to+\infty}\big(f(z)-z\big)=0$, где $y=\operatorname{Im}z$.

Из теоремы о сходимости последовательности областей к ядру следует, что отображения f из класса X_π, удовлетворяющие дополнительному условию $\partial f(\Pi)=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\gamma_k$, где γ_k есть попарно непересекающиеся простые кривые, уходящие на бесконечность, образуют плотный подкласс X_π'' в классе X_π. В [1] показано, что для каждого отображения $f\in X_\pi''$ существует числовое непрерывное отображение λ:$[0;+\infty)\to\mathbf{R}$, $\lambda(\tau)$ такое, что $f(z)=\lim\limits_{\tau\to+\infty}\big(\zeta(z,\tau)-i\tau\big)$, где $\zeta(z,\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\varsigma(z,\tau)}{\partial\tau}=\operatorname{ctg}\frac{\lambda(\tau)-\varsigma(z,\tau)}{2}\qquad(1)$$

с начальным условием $\zeta(z,0)=z$.

Можно доказать, что для каждого кусочно-непрерывного отображения λ отображение

$$f(z)=\lim_{\tau\to+\infty}\big(\zeta(z,\tau)-i\tau\big)$$

принадлежит классу X_π (здесь $\zeta(z,\tau)$ является решением дифференциального уравнения (1)). Таким образом, все кусочно-непрерывные отображения λ порождают плотный подкласс X_π', при этом $X_\pi''\subset X_\pi'\subset X_\pi$.

Известно, что при рассмотрении экстремальной задачи на некотором классе достаточно решить ее на плотном подклассе.

Рассмотрим на классе X_π два функционала

$$I_1=I_1(f)=f(z)-z,\ I_2=I_2(f)=\ln f'(z),$$

где z – фиксированная точка из верхней полуплоскости. В силу первого свойства класса X_π справедливы равенства:

$$f_m(z)-z=f(z+m)-(z+m),\ \ln f_m'=\ln f'(z+m).$$

Полагая в них $m=-\operatorname{Re}z$, получаем, что множество значений функционала $I_1(f)$ ($I_2(f)$) совпадает со множеством значений функционала $I_1(f)=f(iy)-iy$ ($I_2(f)=\ln f'(iy)$), где $y=\operatorname{Im}z$.

Теорема 2. Область значений функционала $I_1(f)=$ $=f(iy)-iy$ на классе X_π принадлежит кругу K_1:

$$\left|I_1-i\left(y+\ln\left(1-b^2\right)\right)\right|\le\ln\operatorname{cth}\frac{y}{2},\ \text{ где } b=e^{-y}.$$

Доказательство. Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d\varsigma}{d\tau}=\frac{1+\rho s}{1-\rho s},\qquad(2)$$

где $\rho(\tau)=e^{-\operatorname{Im}\zeta(\tau)}$, $s(\tau)=e^{-i(\lambda(\tau)-\operatorname{Re}\zeta(\tau))}$. Отделим в (2) действительную и мнимую части. Получим

$$\frac{d\operatorname{Im}\varsigma}{d\tau}=\frac{1-\rho^2}{|1-\rho s|^2},$$

$$\frac{d\operatorname{Re}\varsigma}{d\tau}=\frac{-2\rho\operatorname{Im}s}{|1-\rho s|^2},\operatorname{Re}\varsigma(iy,0)=0.\qquad(3)$$

Очевидно, что $\dfrac{d\rho}{d\tau}=-\rho\dfrac{1-\rho^2}{|1-\rho s|^2},\rho(0)=b$. Следовательно, ρ монотонно зависит от τ. Уравнению (2) равносильно уравнение $\dfrac{d(\varsigma-i\tau)}{d\tau}=i\left(\dfrac{1+\rho s}{1-\rho s}-1\right)$, интегрирование которого по переменной τ в пределах от 0 до ∞, с учетом начального условия $\zeta(iy,0)=iy$ и условия $\lim\limits_{\tau\to\infty}(\varsigma(iy,\tau)-i\tau)=f(iy)$, приводит к равенству

$$f(iy)-iy=2i\int_0^\infty\frac{\rho s}{1-\rho}d\tau.$$

После замены в этом интеграле переменной τ на ρ имеем

$$f(iy)-iy=2i\int_0^b\frac{s-\rho}{1-\rho^2}d\rho.$$

Непосредственное вычисление интеграла дает

$$f(iy)-iy-i\ln\left(1-b^2\right)=2i\int_0^b\frac{s}{1-\rho^2}d\rho.$$

Отсюда, оценивая сверху модуль левой части, получаем

$$|f(iy)-iy-i\ln(1-b^2)|\le2\int_0^b\frac{|s|}{1-\rho^2}d\rho=2\int_0^b\frac{d\rho}{1-\rho^2}.$$

Вычисление последнего интеграла приводит к неравенству, указанному в теореме 2.

Следствие 1. Для каждой точки границы круга K_1 существует отображение в плотном подклассе X_π'.

Действительно, для $\theta\in[0;2\pi)$ рассмотрим

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\left[I_1-i\ln\left(1-b^2\right)\right]\right)=-2\operatorname{Im}\int_0^b\frac{e^{i\theta}s}{1-\rho^2}d\rho.$$

Наибольшее значение интеграл имеет при условии $\operatorname{Im}(-e^{i\theta}s)=1$, т.е. $s=e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$. В уравнении (3) сделаем замену τ на ρ:

$$d\operatorname{Re}\varsigma=\frac{2\operatorname{Im}s}{1-\rho^2}d\rho,\ \operatorname{Re}\varsigma(iy,\tau(\rho))\big|_{\rho=b}=0.$$

Подставив $s=e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$, получим

$$d\operatorname{Re}\varsigma=\frac{-2\cos\theta}{1-\rho^2}d\rho,\ \operatorname{Re}\varsigma(iy,0)=0.$$

Отметим сначала, что $\operatorname{Re}\zeta(iy,\tau)=0$ для $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ и $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$, и поэтому из равенства

$$\lambda(\tau)=\operatorname{Re}\zeta(iy,\tau)+i\ln s(iy,\tau)$$

имеем

$$\lambda(\tau)=i\ln s(iy,\tau)=i\ln\left(e^{i\pi}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)=-\theta-\frac{3\pi}{2}.$$

Интегрирование уравнения (1) с полученными $\lambda(\tau)$ приводит к отображениям из плотного подкласса X_π', вносящим концевые точки диаметра, лежащего на мнимой оси.

Для $\theta\in[0,2\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right\}$ имеем

$$\operatorname{Re}\varsigma(iy,\tau)=\cos\theta\left(\ln\frac{1+b}{1-b}-\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}\right),$$

$$\lambda(\tau)=\cos\theta\left(\ln\frac{1+b}{1-b}-\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)-\theta-\frac{3\pi}{2}.$$

Решая задачу Коши

$$\left|1+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\rho\right|^2d\rho=-(1-\rho^2)\rho d\tau,\ \rho(iy,0)=b,$$

находим $\rho=\rho(\tau)$ в неявном виде

$$\frac{\rho}{1-\rho^2}\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{\sin\theta}=e^{-\tau}\frac{b}{1-b^2}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{\sin\theta}.$$

Таким образом, для произвольно фиксированной точки на границе круга K_1 существует отображение $\lambda(\tau)$, с которым интегрирование уравнения (1) приводит к отображению в плотном подклассе X_π', вносящему взятую точку.

Следствие 2. В классе X_π справедливы следующие оценки:

$$|\operatorname{Re}f(iy)|\le\ln\operatorname{cth}\frac{y}{2},$$

$$2\ln2\operatorname{sh}\frac{y}{2}\le\operatorname{Im}f(iy)\le2\ln2\operatorname{ch}\frac{y}{2}.$$

Равенства в оценках мнимой части реализуются на функциях $h(z)=\lambda+2i\ln\left(2\cos\dfrac{z-\lambda}{2}\right)$ при $\lambda=0$ и $\lambda=\pi$.

Теорема 3. В классе X_π справедливы следующие оценки:

$$|\operatorname{Re}\ln f'(iy)|\le\ln\operatorname{cth}\frac{y}{2},\quad|\arg f'(iy)|\le\ln\operatorname{cth}\frac{y}{2}.$$

Равенство в первой оценке реализуется на отображении $h(z)=2i\ln\left(2\cos\dfrac{z}{2}\right)$.

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1) по переменной z. Получим

$$\frac{d\ln\varsigma'_z}{d\tau}=\frac{1}{1-\cos(\lambda-\varsigma)},\ \zeta'(z,0)=1.$$

Проинтегрируем это равенство по τ от 0 до $+\infty$. С учетом начального условия $\zeta'(z,\ 0)=1$ и равенства $f'(z)=\lim\limits_{\tau\to+\infty}\varsigma'_z(z,\tau)$ получаем

$$\ln f'(z)=\int_0^\infty\frac{d\tau}{1-\cos(\lambda-\varsigma)}.$$

Выполним замену переменной τ на ρ:

$$\ln f'(z)=-2\int_0^b\frac{s}{1-\rho s}d\rho+2\int_0^b\frac{\rho}{1-\rho^2}d\rho. \qquad (4)$$

Вычислим второй интеграл и отделим действительную и мнимую части:

$$\ln|f'(iy)|+\ln(1-b^2)=-2\int_0^b\frac{\operatorname{Re}s-\rho}{1-2\rho\operatorname{Re}s+\rho^2}d\rho,$$

$$\arg f'(iy)=-2\int_0^b\frac{\operatorname{Im}s}{1-2\rho\operatorname{Re}s+\rho^2}d\rho.$$

Найдем наибольшие значения отображений

$$g_1(u)=\frac{\rho-u}{1-2\rho u+\rho^2},\quad g_2(u)=\frac{\sqrt{1-u^2}}{1-2\rho u+\rho^2},$$

где $u=\cos\alpha(\rho)=\operatorname{Re}s$, $0<u<1$. Отображение g_1 убывает, так как $g_1'(u)=\dfrac{\rho^2-1}{(1-2\rho u+\rho^2)^2}<0$. Производная

$$g_2'(u)=\frac{2\rho-u(1-\rho^2)}{\sqrt{1-u^2}\,(1-2\rho u+\rho^2)^2}$$

обращается в нуль при $u_0=\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}<1$. Следовательно,

$$2\int_0^b\frac{(\rho-1)d\rho}{1-2\rho+\rho^2}\le\ln|f'(iy)|+\ln(1-b^2)\le2\int_0^b\frac{(1+\rho)d\rho}{1+2\rho+\rho^2},$$

$$-2\int_0^b\frac{\sqrt{1-u_0^2}\,d\rho}{1-2\rho u_0+\rho^2}\le\arg f'(iy)\le2\int_0^b\frac{\sqrt{1-u_0^2}\,d\rho}{1-2\rho u_0+\rho^2}.$$

Отсюда непосредственными вычислениями приходим к неравенствам, указанным в теореме 3.

Из теоремы 3 следует, что квадрат

$$K_2=\{I_2\in\mathbf{C}:|\operatorname{Re}I_2|\le A,\ |\operatorname{Im}I_2|\le A,\ A=\operatorname{lncth}\frac{y}{2}\}$$

является мажорантной областью для функционала $I_2(f)=\ln f'(iy)$.

Теорема 4. Область значений функционала $I_2(f)=\ln f'(iy)$ на классе X_π принадлежит кругу K_3:

$$\left|I_2+\ln(1-b^2)\right|\le-2\ln(1-b),$$

где $b=e^{-y}$.

Доказательство. Перепишем равенство (4) в виде

$$\ln f'(iy)+\ln(1-b^2)=-2\int_0^b\frac{s}{1-\rho s}d\rho.$$

Оценим

$$\left|\ln f'(iy)+\ln(1-b^2)\right|\le2\int_0^b\left|\frac{s}{1-\rho s}\right|d\rho.$$

Подынтегральная функция

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{1-2\rho u+u^2}},$$

где $u=\cos\alpha(\rho)=\operatorname{Re}s$, $0<u<1$, монотонно возрастает. Следовательно,

$$\left|\ln f'(iy)+\ln(1-b^2)\right|\le2\int_0^b\frac{d\rho}{1-\rho}.$$

Непосредственное вычисление интеграла приводит к неравенству, указанному в теореме 4.

Отметим, что множество $K_4=K_2\cap K_3$ является более точной мажорантной областью для функционала $I_2(f)=\ln f'(iy)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копанева Л.С.* Параметрическое представление отображений с симметрией переноса // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: ТГУ. (в печати).

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 28 февраля 1999 г.