УДК 512.541

П.А. Крылов, Е.Г. Пахомова, Е.И. Подберезина

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СМЕШАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 97–01–00795 и 96–15–96095.

Рассматриваются условия конечности для одного класса смешанных абелевых групп.

В последнее время возрос интерес к смешанным абелевым группам и их кольцам эндоморфизмов. Согласно определению смешанной группы, такая группа содержит как ненулевые элементы конечных порядков, так и элементы бесконечного порядка. В ряде статей рассматривались смешанные абелевы группы, лежащие между суммой и произведением своих p-компонент. Чтобы дать точное определение таких групп – основного объекта изучения в нашей статье, приведем некоторые определения и обозначения.

Все группы, встречающиеся в статье, – абелевы. Буква p обозначает простое число. Если K – группа, то A_p – ее p-компонента, т.е. наибольшая подгруппа в A, являющаяся p-группой. Далее, $T(A)$ – периодическая часть группы A – совокупность всех ее элементов конечного порядка. Известно, что $T(A)\bigoplus\limits_p A_p$. Считаем, что A – редуцированная смешанная группа, имеющая бесконечное число отличных от нуля p-компонент.

Назовем SP-группой такую группу A, что естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \to A$ продолжается до сервантного вложения $A \to \prod\limits_p A_p$. Тогда для SP-группы A можно считать, что $\bigoplus\limits_p A_p \subset A \subseteq \prod\limits_p A_p$, причем A сервантна в $\prod\limits_p A_p$. Здесь и далее подразумевается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A, т.е. множество всех p, для которых $A_p \neq 0$. SP-группы изучались или появлялись в [1–5].

Основной результат §1 – теорема 1.5 – содержит характеризации самомалых SP-групп. В §2 показывается, что каждую SP-группу можно наделить структурой модуля над некоторым (довольно специфическим) кольцом. Это дает другие средства для изучения SP-групп (теорема 2.2).

Пусть A – группа. Тогда $E(A)$ – кольцо ее эндоморфизмов; $r(A)$ – ранг группы A; $\bigoplus\limits_{\mathfrak{R}} A$ – прямая сумма $\mathfrak{R}$ копий группы A ($\mathfrak{R}$– некоторое кардинальное число); N – множество натуральных чисел; Z – кольцо целых чисел; Q – аддитивная группа (или поле) рациональных чисел. Группа A называется ограниченной, если порядки ее элементов ограниченны в совокупности.

§1. Условия конечности для SP-групп

Лемма 1.1 [5]. Следующие свойства смешанной группы A эквивалентны:

1) для каждого p имеет место прямое разложение $A=A_p \oplus B_p$ для некоторой группы B_p с $pB_p=B_p$;

2) справедливы сервантные вложения $\bigoplus\limits_p A_p \subset A \subseteq \prod\limits_p A_p$, т.е. A – SP-группа;

3) справедливы вложения $\bigoplus\limits_p A_p \subset A \subseteq \prod\limits_p A_p$ и $A/T(A)$ – делимая группа.

Класс всех SP-групп необозрим. Для получения содержательных результатов рассмотрим некоторые условия типа конечности. Для группы A положим $E_t(A)$ Hom$(A, T(A))$, $E_f(A)=\{\alpha\in E(A) \mid \alpha A$ содержится в сумме конечного числа компонент $A_p\}$ и $E_b(A) = \{\alpha\in(A) \mid \alpha A$ – ограниченная группа$\}$. Здесь $E_t(A)$, $E_f(A)$ и $E_b(A)$ – идеалы кольца $E(A)$, причем $E_b(A)\subseteq E_f(A) \subseteq E_t(A)$.

Пусть F – свободная подгруппа SP-группы A, порожденная максимальным независимым множеством ее элементов бесконечного порядка. Подгруппу F назовем существенной свободной подгруппой группы A. Отметим, что A/F – периодическая группа. Для каждого p по лемме 1.1 имеем $A=A_p \oplus B_p$ с $pB_p=B_p$, где слагаемое B_p находится однозначно. Обозначим через π_p проекцию $A\to A_p$ с ядром B_p.

Лемма 1.2. Делимость p-компоненты фактор-группы A/F равносильна делимости фактор-группы A/π_pF.

Доказательство. Предположим, что p – компонента фактор-группы A/F является делимой группой. Тогда для каждого $n\in N$ имеем $p^n(A/F)=A/F$ или $p^nA+F=A$. Запишем $A=A_p\oplus B_p$. Тогда $p^nA_p+p^nB_p+F=A_p\oplus B_p$ и $p_nA_p+B_p+F=A_p+B_p$ и для $\alpha\in A_p$ получаем $\alpha=p^n\alpha+b_n+c_m$ где $\alpha_n\in Ap$, $bn\in B_p$, $c_n\in F$. И далее, $\pi_p(\alpha)=\pi_p(p^n\alpha_n)+\pi_p(c_n)$ или $\alpha=p^n\alpha_n+\pi(c_n)$. Это означает, что $A_p=p^nA_p+\pi_pF$. Следовательно, A/π_pF – делимая группа.

Пусть A/π_pF – делимая группа. Из доказанного видно, что нужно установить справедливость равенства $p^nA_p+B_p+{}$ ${}+F=A_p+B_p$ для любого $n\in N$. Для этого достаточно, чтобы $A_p\subseteq p^nA_p+B_p+F$. Имеем $A_p=p^n+\pi_pF$. Осталось проверить, что $\pi_pF\subseteq B_p+F$. Возьмем элемент $c\in F$ и представим $c+\alpha+b$, где $\alpha\in A_p$, $b\in B_p$. Тогда $\pi_p(c)=\pi_p(\alpha)=\alpha$, $c=\pi_p(c)+b$, $\pi_p(c)=n-$ $-b+c\in B_p+F$. Значит, $\pi_pF\subseteq B_p+F$, чем доказательство леммы закончено.

Предложение 1.1. Следующие свойства SP-группы A эквивалентны:

1) $E_t(A)=E_f(A)$;

2) выполняется естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(A,T(A)) \cong \bigoplus_p \mathrm{Hom}(A,F_p);$$

3) если M – периодический эпиморфный образ группы A, то M есть прямая сумма делимой группы и конечного числа редуцированных p-групп;

4) для каждой существенной свободной подгруппы F группы A фактор-группа A/π_pF делима при почти всех p.

Доказательство. Свойства 1) и 2) эквивалентны всегда.

1)$\Rightarrow$3). Допустим напротив, что нашлась подгруппа G такая, что $\dfrac{A}{G} = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} C_i \oplus V$, где C_i – редуцированная p_i-группа (p_i – различные простые числа), V – дополнительное слагаемое. Имеем $A_{p_i} \neq 0$, поскольку в противном случае $p_iA=A$ и $p_i(A/G)=A/G$, что невозможно.

Для каждого i существует ненулевой гомоморфизм $\psi_i : C_i \to A_{p_i}$. Пусть ψ – гомоморфизм $A/G \to T(A)$, совпадающий с ψ_i на C_i и аннулирующий V, а $\pi: A \to A/G$ – канонический эпиморфизм. Тогда $\psi\pi \in E_t(A)$, но $\psi\pi \notin E_f(A)$, что противоречит 1).

3)$\Rightarrow$ 4). Возьмем некоторую существенную свободную подгруппу F группы A. На основании 3) почти все p-компоненты группы A/F делимы. Учитывая лемму 1.2, получаем 4).

4)$\Rightarrow$ 1). Предположим существование такого $\varphi \in E_t(A)$, что $\varphi \notin E_f(A)$. Тогда образ φA будет суммой бесконечного числа ненулевых редуцированных p-групп. Из $A/\ker\varphi \cong \varphi A$ следует, что то же верно для $A/\ker\varphi$. Ядро $\ker\varphi$ содержит некоторую существенную свободную подгруппу F группы A. Поскольку $A/\ker\varphi$ является гомоморфным образом группы A/F, то последняя также имеет бесконечно много ненулевых редуцированных p-компонент. Но ввиду леммы 1.2 и 4) это невозможно. Значит, 1) выполняется. Предложение доказано.

В книге [2] сформулирована такая проблема 44 – «Исследовать группы A со следующим свойством: если A содержится в прямой сумме редуцированных групп, то существует $n \in N$ такое, что nA содержится в прямой сумме конечного числа этих групп». Следуя [6], группы со свойством, описанным в проблеме 44, назовем Фукс-44 группами.

Предложение 1.2. Пусть A – **SP**-группа. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $E_t(A)=E_b(A)$;

2) $E_t(A)=E_f(A)$ и каждая компонента A_p – ограниченная группа;

3) если M – периодический эпиморфный образ группы A, то M есть прямая сумма делимой и ограниченной групп;

4) A является Фукс-44 группой;

5) для каждой существенной свободной подгруппы F группы A равенство $\pi_pF=A_p$ верно для почти всех p и каждая A_p – ограниченная группа.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Компонента A_p совпадает с образом проекции $\pi_p: A \to A_p$. Значит, $\pi_p \in E_b(A)$ и A_p – ограниченная группа. Из $E_b(A) \subseteq E_f(A) \subseteq E_t(A)$ и 1) получаем $E_t(A)=E_f(A)$.

2)$\Rightarrow$ 3). Пусть подгруппа $G \subseteq A$ такова, что A/G – периодическая группа. Ввиду предложения 1.3 можно написать $A/G=D\oplus M_1\oplus\ldots\oplus M_k$, где D – делимая группа, M_k – редуцированные p-группы. Положим $T=T(A)$. Из 2) и изоморфизма $(G+T)/G \cong T/(G\cap T)$ выводим ограниченность каждой p-компоненты группы $(G+T)/G$. Рассмотрим еще один изоморфизм $(A/G)/(G+T)/G \cong A/(G+T)$. Группа, стоящая здесь справа, является делимой периодической в силу того, что A/G – периодическая, а A/T – делимая группы (лемма 1.1). Отсюда понятно, что редуцированные части p-компонент группы A/G, т.е. группы $M_1,\ldots,M_k$, должны быть ограниченными, что дает 3).

Равносильность 3) и 4) для произвольной группы A установил А.В. Иванов [6, теорема 1.3].

3)$\Rightarrow$ 5). Каждая группа A_p является ограниченной как периодический эпиморфный образ группы A. Возьмем некоторую существенную свободную подгруппу F группы A. По предложению 1.1 A_p/π_pF – делимая группа для почти всех p. Вместе с ограниченностью групп A_p это влечет $A_p/\pi_pF=0$ и $\pi_pF=A_p$ для почти всех p.

5)$\Rightarrow$ 1). Пусть $\alpha \in E_t(A)$. По предложению 1.1 $\alpha \in E_f(A)$, т.е. αA лежит в сумме конечного числа слагаемых A_p. Но все A_p – ограниченные группы. Откуда αA – ограниченная группа и $\alpha \in E_b(A)$. Предложение доказано.

Модуль A над некоторым кольцом называется малым, если для каждого гомоморфизма $\sigma: A \to \underset{i\in I}{\oplus} C_i$, где C_i – произвольные модули, существует конечное подмножество $J \subseteq I$ со свойством $\sigma A \subseteq \underset{i\in J}{\oplus} C_i$. Малые абелевы группы совпадают с конечно порожденными группами. Чтобы получить более широкое понятие, условимся малой группой называть группу A, удовлетворяющую записанному выше условию для σ относительно любых редуцированных групп C_i. Из [6, теорема 1.3] следует, что малая группа является Фукс-44 группой.

Группа A называется самомалой, если образ всякого гомоморфизма $A \to \underset{\aleph}{\oplus} A$ ($\aleph$ – произвольный кардинал) содержится в сумме конечного числа слагаемых A.

Теорема 1.1. Следующие условия для **SP**-группы A эквивалентны:

1) A – самомалая группа;

2) $E_t(A)=E_b(A)$ и каждая компонента A_p – конечная группа;

3) A – малая группа;

4) если M – периодический эпиморфный образ группы A, то M есть прямая сумма делимой и конечной групп;

5) для каждой существенной свободной подгруппы F справедливо $\pi_pF=A_p$ при почти всех p и каждая A_p – конечная группа.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$ 2). Прямое слагаемое самомалой группы является самомалой группой. Поэтому A_p – самомалая периодическая группа. Откуда A_p – конечная группа.

Допустим, что $\alpha \in E_t(A)$ и $\alpha \in E_b(A)$. Этот α можно считать гомоморфизмом $\alpha : A \to \underset{p}{\oplus} A_p$, образ которого не содержится в сумме конечного числа слагаемых A_p. Ввиду 1) образ любого гомоморфизма $A \to \underset{\aleph_0}{\oplus} A$ должен лежать в сумме конечного числа слагаемых A. Теперь, принимая во внимание то обстоятельство, что каждая группа A_p является прямым слагаемым группы A, видим, что существование гомоморфизма α противоречит 1). Следовательно, $E_t(A)=E_b(A)$.

2)$\Rightarrow$ 4). Периодический эпиморфный образ M группы A по предложению 1.2 является прямой суммой делимой и ограниченной групп. На основании конечности групп A_p из доказательства импликации 2)$\Rightarrow$ 3) этого предложения можно вывести, что на самом деле M – прямая сумма делимой и конечной групп.

5)$\Rightarrow$ 3). Пусть $\sigma : A \to \underset{i\in I}{\oplus} C_i$ – гомоморфизм, где C_i – редуцированные группы. По предложению 1.2 A – Фукс-44 группа. Следовательно, существуют $n \in N$ и конечное подмножество $J\subseteq I$ со свойством $n(\sigma)A\subseteq\bigoplus_{i\in J}C_i$. Обозначим буквой π проекцию суммы $\bigoplus_{i\in J}C_i$ на ее слагаемое $\bigoplus_{i\in I-J}C_i$. Тогда $n(\pi\sigma)A=0$, т.е. $(\pi\sigma)A$ – ограниченная группа. Найдется лишь конечное множество компонент A_p с $(\pi\sigma)A_p\neq0$. Все компоненты – конечные группы, поэтому $(\pi\sigma)A$ – конечная группа. Значит, имеется конечное подмножество $K\subseteq I-J$, для которого $(\pi\sigma)A\subseteq\bigoplus_{i\in K}C_i$, откуда $\sigma A\subseteq\bigoplus_{i\in J\cup K}C_i$ и A – малая группа.

3) $\Rightarrow$ 1) верно всегда и теорема доказана.

Ранг фактор-группы $A/T(A)$ называется рангом без кручения группы A и обозначается $r_0(A)$. Таким образом, $r_0(A)=r\ (A/T(A))$.

Специфическим условием конечности для группы можно считать дискретность ее кольца эндоморфизмов относительно конечной топологии. Базис окрестностей нуля кольца $E(A)$ в конечной топологии составляют аннуляторы конечных подмножеств группы A [2, §107].

Предложение 1.3. Кольцо эндоморфизмов SP-группы A дискретно в конечной топологии тогда и только тогда, когда существует свободная подгруппа F конечного ранга группы A такая, что $\pi_pF=A_p$ для почти всех p, а для остальных p $|A_p|<\aleph_0$.

Доказательство. Пусть кольцо $E(A)$ дискретно в конечной топологии. Тогда группа A обладает элементами $a_1, ..., a_n$ с тем свойством, что из $\alpha\ a_1=...=\alpha\ a_n=0$ следует $\alpha=0$ для любого $\alpha\in E(A)$. Возьмем некоторое p, затем запишем $A=A_p\oplus B_p$, и пусть $\pi_p{:}A\to A_p$ – проекция с ядром B_p. Множество элементов $\pi_p(a_1), ..., \pi_p(a_n)$ группы A_p таково, что из $\omega(\pi_pa_i)=0$ ($i=1, ..., n$) вытекает $\omega=0$ для любого $\omega\in E(A)$. Это влечет дискретность кольца $E(A_p)$ и конечность p-группы A_p.

Удалим из множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ все элементы конечного порядка и отбросим те слагаемые A_p, в сумме которых они лежат. Не уменьшая общности, считаем также, что система элементов $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима. В итоге сумма $\langle a_1\rangle+\ldots+\langle a_n\rangle$ будет прямой, а группа F, равная $\bigoplus_{i=1}^{n}\langle a_i\rangle$, – свободной. Из рассуждения, проведенного недавно, видно, что для каждого $\omega\in E(A_p)$, если $\omega(\pi_pF)=0$, то $\omega A_p=0$. Но A_p – конечная группа, поэтому $\pi_pF=A_p$.

Предположим, что условия предложения имеют место. Запишем $F=\bigoplus_{i=1}^{n}\langle a_i\rangle$. Имеем $\pi_pF=A_p$ для всех p, за исключением, скажем, чисел $p_1, \ldots, p_k$. Обозначим через X объединение множества $\{a_1,\ldots, a_n\}$ с множествами образующих каждой из групп $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$. Покажем, что для любого $\alpha\in E(A)$ из $\alpha X=0$ вытекает $\alpha=0$, что означает дискретность кольца $E(A)$. Без потери общности считаем, что $\pi_pF=A_p$ для всех p. Пусть $\alpha\in E(A)$ и $\alpha X=0$ или, что все равно, $\alpha F=0$. Возьмем произвольный элемент $a\in A_p$. Тогда $a=\pi_p(c)$ для какого-то $c\in F$ и далее $c=a+b$, где $b\in B_p$. Из $\alpha c=0$ следует $\alpha a=0$ (учесть вполне характеристичность A_p и B_p). Получим $\alpha A_p=0$ при всех p и, значит, $\alpha T(A)=0$. Поскольку $A/T(A)$ – делимая группа, то $\alpha=0$. Предложение доказано.

Пусть у SP-группы A $r(A)<\infty$. Тогда любые две существенные свободные подгруппы F и E группы A квазиравны, т.е. $mF\subseteq E$ и $nE\subseteq F$ для некоторых $m, n\in N$. Для такой группы A в п.4 предложения 1.1, п.п. 5 предложения 1.2 и теоремы 1.1 вместо «каждой» можно писать «некоторой».

§2. SP-группы как модули

Произведение колец R_1 и R_2 обозначаем $R_1\times R_2$. Пусть Z_{p^k} – кольцо вычетов по модулю p^k, Q_p^* – кольцо целых p-адических чисел.

К изучению SP-групп можно привлечь модули. Именно всякая SP-группа является модулем над определенным коммутативным кольцом. Введем эти кольца и определим на SP-группе структуру модуля над соответствующим кольцом.

Пусть $\chi=(k_p)$ – некоторая характеристика. Договоримся считать, что $k_p\neq0$ для бесконечного множества чисел p. Для каждого p определим кольцо R_p (зависящее от χ), полагая $R_p=0$, если $k_p=0$, $R_p=Z_{p^{k_p}}$, если $0<k_p<\infty$, и $R_p=Q_p^*$ при $k_p=\infty$. Положим $\overline{K}(\chi)=\prod_p R_p$, $T(\chi)=\bigoplus_p R_p$. Пусть $K(\chi)$ – такое подкольцо в $\overline{K}(\chi)$, что $T(\chi)\subset K(\chi)$ и $K(\chi)/T(\chi)\cong Q$. Если χ состоит только из символов ∞, $\chi=(\infty)$, то соответствующее кольцо $K(\chi)$ обозначаем просто K.

Остановимся на некоторых свойствах колец $K(\chi)$. Если χ_1, χ_2 – характеристики, то $\chi_1\leq\chi_2\Leftrightarrow$ существует сюръективный гомоморфизм колец $\sigma{:}K(\chi_2)\to K(\chi_1)$. Отображение σ индуцируется гомоморфизмом $\overline{\sigma}:\overline{K}(\chi)\to\overline{K}(\chi)$, действующим покоординатно. На координатах $\overline{\sigma}$ совпадает с одним из сюръективных гомоморфизмов колец $Z_{p^n}\to Z_{p^m}$ $(m\leq n)$, $Q_p^*\to Z_{p^m}$. Таким образом, всякий $K(\chi_1)$-модуль есть притягивающий $K(\chi_2)$-модуль. В частности, всякий $K(\chi)$-модуль будет притягивающим K-модулем.

Если записать $K(\chi)=R_{p_1}\times\ldots\times R_{p_s}\times R$, то любой элемент дополнительного множителя R однозначно делится на каждое из простых чисел $p_1, ..., p_s$.

Какой вид имеют элементы из $K(\chi)$? Если $e^2=e\in K(\chi)$ и $e\neq0$, 1, то либо идемпотент e является суммой единичных элементов некоторых колец R_p, либо $1-e$ имеет подобное строение. Возьмем теперь произвольный элемент $0\neq r\in K(\chi)$. Существуют числа $0\neq m$, $n\in Z$ и элемент $s\in T(\chi)$ такие, что $mr=n1+s$. Пусть K_1 – произведение конечного числа каких-то колец R_p, причем $s\in K_1$ и $R_p\subset K_1$ для всех p, делящих m. Тогда $K(\chi)=R\times K_1$ и $e/m\in R$, где e – единичный элемент дополнительного множителя R. Запишем далее $1=e+(e\in R,\ e_1\in K_1)$ и $r=r_1(r_1\in R,\ r_2\in K_1)$. Ясно, что $mr_1=ne$ и $r_1=(n/m)e$. Итак, элемент r равен r_1+r_2, где $r_2\in T(\chi)$, а $r_1=(n/m)e$ с $e^2=e$. Можно включить в K_1 также кольца R_p для p, делящих n. В таком случае $e/n\in R$.

Выясним строение идеалов кольца $K(\chi)$. Возьмем один из таких ненулевых идеалов I. Если $I\subseteq T(\chi)$, то $I=\bigoplus_p(I\cap R_p)$, где $I\cap R_p$ – идеал кольца R_p. Строение последних известно. Предположим, что $I\not\subset T(\chi)$. Выберем элемент $r\in I-T(\chi)$. Запишем, как в предыдущем абзаце, $K(\chi)=R\times K_1$ и $r=r_1+r_2$, где $r_1=(n/m)e$, $r_2\in K_1$ и

$mR=R=nR$. Тогда $I(I\bigcap R)\oplus(I\bigcap K_1)$, причем $r_1\in I\bigcap R$. Далее находим (m/n) $r_1=(m/n)\times(n/m)$ $e=e$, откуда $e\in I\bigcap R$. Это влечет $I\bigcap R=R\oplus(I\bigcap K_1)=e$ и $K(\chi)\oplus K(\chi)\oplus\bigoplus_p(I\bigcap R_p)$, где $e^2=e$, p пробегает некоторое конечное множество простых чисел.

Предложение 2.1. Любой конечно порожденный идеал I кольца $K(\chi)$ является главным и конечно представимым.

Доказательство. Из предыдущего выводим $eK(\chi)\oplus\oplus\bigoplus_{i=1}^{n}(I\bigcap R_{p_i})$, где $I\bigcap R_{p_i}=r_iR_{p_i}$ для какого-то $r_i\in R_{p_i}$ ($i=1,\ldots,n$). Тогда I порождается элементом $e+r_1+\ldots+r_n$.

Убедимся в конечной представимости идеала I, т.е. в существовании эпиморфизма $\bigoplus_m K(\chi)\to I$ с конечно-порожденным ядром. Идеал $eK(\chi)$ представим как проективный. Поскольку кольцо $R_{p_1}\times\ldots\times R_{p_n}$ нетерово, то $\bigoplus_{i=1}^{n}(I\bigcap R_{p_i})$ – тоже конечно представимый идеал. Тогда и I конечно представим, что завершает доказательство.

Получается, что $K(\chi)$ – когерентное кольцо. Из разобранного выше строения идеалов кольца $K(\chi)$ можно еще вывести, что наследственность кольца $K(\chi)$ равносильна тому, что χ состоит из 0, 1 и ∞. Единственными регулярными в смысле Неймана будут кольца $K(\chi)$, где χ содержит только 0 и 1.

Любая p-группа B является Q_p^*-модулем. Если B – ограниченная группа и p^m – точная верхняя грань порядков ее элементов, то B есть Z_{p^n}-модуль для всякого $n\geq m$. Пусть дана SP-группа A. Составим характеристику $\chi_m=(k_p)$ следующим образом. Полагаем $k_p=0$ при $A_p=0$ и $k_p=\infty$, если A_p – неограниченная группа, в противном случае пусть p^{k_p} – точная верхняя грань порядков ее элементов. Зафиксируем некоторую характеристику χ с $\chi\geq\chi_m$. Зададим на A структуру $K(\chi)$-модуля. Группу A мы считаем сервантной подгруппой в $\prod_p A_p$. Произведение $\prod_p A_p$ будет модулем над кольцом $\overline{K}(\chi)=\prod_p R_p$ (см. начало §2). В частности, $\prod_p A_p$ – $K(\chi)$-модуль. Убедимся, что A – $K(\chi)$-подмодуль в $\prod_p A_p$. Возьмем элементы $a\in A$, $r\in K(\chi)$ и запишем, как перед предложением 2.1, $K(\chi)=R\times K_1$ и $r=r_1+r_2$, $r_1=(n/m)$ e. Рассмотрим разложение $A=A_1\oplus A_2$, где A_2 – сумма компонент A_p для всех p, относящихся к K_1; A_1 – дополнительное слагаемое, причем $mA_1=A_1$. Запишем $a=a_1+a_2$ с $a_1\in A$, $a_2\in A_2$. Тогда $ra=(r_1+r_2)(a_1+a_2)=r_1a_1+r_2a_2$, где $r_2a_2\in A_2$, а $r_1a_1=(n/m)(ea_1)=(n/m)a_1\in A_1$. Отсюда $ra\in A$ и A – $K(\chi)$-модуль. A является притягивающим $K(\chi)$-модулем относительно сюръективного гомоморфизма колец $\sigma{:}K(\chi)\to K(\chi_m)$, т.е. $ra=\sigma(r)a$ для всех $r\in K(\chi)$, $a\in A$. В частности, A есть K-модуль.

Задавая на SP-группе структуру модуля над кольцом $K(\chi)$, мы на самом деле не слишком удаляемся от ее групповых свойств. Этому утверждению можно придать строгий смысл, привлекая понятие E-модуля. Модуль M над коммутативным кольцом R называется $E(R)$-модулем при условии, что $\mathrm{Hom}_R(R,M)=\mathrm{Hom}_Z(R,M)$ [7]. Если R_R – $E(R)$-модуль, то кольцо R называют E-кольцом. Рассмотрим теперь SP-группы A и B, являющиеся $K(\chi)$-модулями. По построению кольца $K(\chi)$ фактор-группа $K(\chi)/\langle 1\rangle$ делима. Следовательно, $\mathrm{Hom}(K(\chi)/\langle 1\rangle, K(\chi))=0=\mathrm{Hom}(K(\chi)/\langle 1\rangle, A)$. На основании [7] заключаем, что $K(\chi)$ – E-кольцо, а A (и B) – $E(K(\chi))$-модуль. Это влечет, что групповые гомоморфизмы $A\to B$ совпадают с $K(\chi)$-модульными [7]. Кроме того, для данной характеристики χ структура $K(\chi)$-модуля на группе A единственна [7].

Характеристика $\chi=(k_p)$ называется локально свободной, если $k_p<\infty$ при всех p. SP-группа A является $K(\chi)$-модулем для некоторой локально свободной характеристики χ тогда и только тогда, когда каждая компонента A_p – ограниченная группа. Как и в §1, π_p обозначает проекцию $A\to A_p$ с ядром B_p, где $A=A_p\oplus B_p$.

До конца параграфа по отношению к SP-группе мы употребляем параллельно как групповую, так и модульную терминологию. Теорема 2.1 подтверждает, что использование теории модулей дает новые средства для исследования SP-групп.

Обратимся к SP-группам конечного ранга без кручения. Для таких групп, рассмотренные в §1 условия, имеющие характер конечности, по существу равносильны. Объединяющей идеей здесь выступает понятие конечно порожденного K-модуля.

Теорема 2.1. Для SP-группы A эквивалентны записанные ниже утверждения:

1) A – конечно порожденный K-модуль;

2) A – конечно порожденный $K(\chi)$-модуль для некоторой локально свободной характеристики χ;

3) A – малый K-модуль;

4) $r_0(A)<\infty$ и A – самомалая группа;

5) $r_0(A)<\infty$, $E_t(A)=E_f(A)$ и $|A_p|<\aleph_0$ при всех p;

6) $r_0(A)<\infty$ и найдется существенная свободная подгруппа F в A такая, что $\pi_pF=A_p$ для почти всех p, а для остальных p $|A_p|<\aleph_0$;

7) $r_0(A)<\infty$ и кольцо $E(A)$ дискретно в конечной топологии.

Доказательство. 1)$\Rightarrow$2). Для каждого p можно записать $A=A_p\oplus B_p$ и $K=Q_p^*\times K_p$ (K_p – дополнительный множитель). Конечная порожденность K-модуля A влечет конечную порожденность Q_p^*-модуля A_p. А это равносильно конечности p-группы A_p. Пусть p^{k_p} – точная верхняя грань порядков ее элементов. Образуем локально свободную характеристику $\chi=(k_p)$. Группа A будет $K(\chi)$-модулем, причем его конечная порожденность эквивалентна конечной порожденности K-модуля A (учесть, что K-модуль A является притягивающим относительно гомоморфизма $\sigma{:}K\to K(\chi)$). Это замечание доказывает также 2)$\Rightarrow$3).

3)$\Rightarrow$4). K-модуль $A/T(A)$ является малым как гомоморфный образ малого модуля. Положим $T(K)=\bigoplus_p Q_p^*$. Так как идеал $T(K)$ аннулирует $A/T(A)$, то $A/T(A)$ – малый $K/T(K)$-модуль, т.е. Q-модуль. Откуда $r_0(A)=\dim_Q(A/T(A))<\infty$. Всякий групповой гомоморфизм $\varphi: A\to\bigoplus_{\text{я}} A$ будет гомоморфизмом K-модулей ввиду того, что $\bigoplus_{\text{я}} A$ – $E(K)$-модуль. Из 3) заключаем, что φA содержится в сумме конечного числа слагаемых A. Таким образом, A – самомалая группа.

Импликация 4)$\Rightarrow$5) непосредственно получается из теоремы 1.1, 5)$\Rightarrow$6) – из предложения 1.2, а 6)$\Rightarrow$7) – из предложения 1.3.

7)$\Rightarrow$1). Согласно предложению 1.3 имеется свободная подгруппа F группы A со свойством $\pi_pF=A_p$ для почти всех p, а для остальных p A_p – конечная группа. Удаляя последние A_p, считаем, что $\pi_pF=A_p$ для всех p. Принимая затем во внимание $r_0(A)<\infty$, можно в качестве F выбрать существенную подгруппу. Пусть $\{c_i \mid i=1,...,n\}$ – свободный базис группы F. Из $\pi_pF=A_p$ для всех p выводим $T(A)\subseteq KF$. Далее, $KF/T(A)$ есть подпространство Q-пространства $A/T(A)$, содержащее его базис $\{c_i+T(A) \mid i=1,...,n\}$. Значит, $KF/T(A)=A/T(A)$ и $KF=A$ или $\sum_{i=1}^{n} Kc_i = A$, что означает конечную порожденность A как K-модуля. Теорема доказана.

Теорему 2.1 дополняет

Предложение 2.2. Пусть A – SP-группа конечного ранга без кручения. Равенство $E_t(A)=E_f(A)$ имеет место в том и только в том случае, если $A=B\oplus C$, где B – конечно порожденный K-модуль, C – прямая сумма конечного числа p-групп.

Доказательство. Предположим, что $E_t(A)=E_f(A)$. Если F – некоторая существенная подгруппа группы A, то по предложению 1.1 группа A_p/π_pF делима для почти всех p. Но $r(A)=r(A/T(A))<\infty$ и поэтому π_pF – конечная группа. Следовательно, $\pi_pF=A_p$ для всех, за исключением конечного, множеств чисел p. Пусть C – сумма компонент A_p для всех p из этого множества, B – дополнительное слагаемое, т.е. $A=B\oplus C$. Обозначив через ρ проекцию $A\to B$ относительно этого разложения, получаем, что ρF – существенная свободная подгруппа группы B (ограничение ρ на F есть мономорфизм) и $\pi_p(\rho F)=A_p$ для всех A_p, принадлежащих B. По теореме 2.1 SP-группа B является конечно порожденным K-модулем.

Пусть обратно, $A = B\oplus C$, где B и C удовлетворяют условиям предложения. Найдется существенная свободная подгруппа E в B такая, что $\pi_pE=A_p$ для почти всех A_p из B (теорема 2.1). Для любой другой существенной свободной подгруппы F группы A имеем $mF\subseteq E$ и $nE\subseteq F$ для каких-то m, $n\in N$. Откуда $\pi_pE=A_p$ для почти всех p. По предложению 1.1 $E_t(A)=E_f(A)$, что заканчивает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fuchs L., Rangaswamy K.V.* On generalized regular rings // Math. Z. 1968. № 107 C. 71–81.
2. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974, 1997. Т. 1, 2.
3. *Glaz S., Wickless W.* Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Commun. Algebra. 1994. V. 22, № 4. C. 1161–1176.
4. *Vinsonhaler C., Wickless W.J.* Realizations of finite dimensional algebras over the rationales // Rocky Mountain J. Math. 1994. V. 24, № 4. C. 1553–1565
5. *Albrecht U.F., Goeters H.P., Wickless W.* The flat dimension of mixed abelian groups as E-modules // Rocky Mountain J. Math. 1995. V. 25, № 2. C. 569–590.
6. *Иванов А.В.* Об одной проблеме абелевых групп // Матем. сб. 1978. Т. 105, № 4. С. 525–542.
7. *Pierse R.S.* E-modules // Contem. Math. 1989. V. 87. C. 221–240.

Статья представлена лабораторией алгебры и топологии научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 10 ноября 1998 г