

$K_{\alpha,p}$ -ограниченным в среднем искажением; если существует константа $K_p > 0$ такая, что

$$K_p(f) = \left(\int_D K^p(x, f) dx \right)^{1/p} \leq K_p < \infty, \quad (6)$$

($p > 0$), то отображение f называется отображением с K_p -ограниченным в среднем искажением, а число p – показателем суммируемости усредненной характеристики.

Определение 4 естественно распространяется на случай $p = \infty$. Действительно, если функция $k(x, f)$ измерима и существенно ограничена на ограниченном множестве D , (для нее существует величина $\text{vraimax}_{x \in D} |k(x, f)| = M_f$, называемая для нее существенным максимумом $|k(x, f)|$ на D), то имеет место равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|k(x, f)\|_{L_p(D)} = M_f. \quad (7)$$

Докажем это. Пусть mE – мера E . Если $M_f = 0$ или $mD = 0$, то равенство (7) очевидно. Будем считать $0 < M_f < \infty$. Если D – ограниченное измеримое множество, то $\left(\int_D |k(x, f)|^p dx \right)^{1/p} \leq M_f (mD)^{1/p}$. Следовательно,

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \|k(x, f)\|_{L_p(D)} \leq M_f. \quad (8)$$

С другой стороны, из определения существенного максимума функции следует существование множества D_1 положительной меры такого, что для всех его точек выполняется неравенство $|k(x, f)| > M_f - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leq M_f$. Поэтому

$$\|k(x, f)\|_{L_p(D)} \geq \left(\int_{D_1} (M_f - \varepsilon)^p dD_1 \right)^{1/p} = (M_f - \varepsilon) (mD_1)^{1/p}.$$

Значит, $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_D |k(x, f)|^p dx \right)^{1/p} \geq M_f - \varepsilon$, и так как ε произвольно, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_D |k(x, f)|^p dx \right)^{1/p} \geq M_f, \quad (9)$$

что справедливо для любого измеримого множества D .

Из (8) и (9) следует (7).

Мы доказали, что если функция $k(x, f)$ существенно ограничена, то есть конечный предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_D |k(x, f)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (10)$$

равный существенному максимуму $k(x, f)$ на D .

С другой стороны, из существования предела (10) следует существенная ограниченность $k(x, f)$ на D . Если бы это было не так, то как бы ни было велико N , существовало бы измеримое и ограниченное подмножество D' множества D положительной меры, на котором $k(x, f) > N$. Тогда для любого $p \geq 1$

$$\left(\int_D |k(x, f)|^p dx \right)^{1/p} \geq N (mD')^{1/p},$$

откуда $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_D |k(x, f)|^p dx \right)^{1/p} \geq N$.

Так как N как угодно велико, то предел (10) не может быть конечным, и мы пришли к противоречию.

Следовательно, класс отображений с ограниченным искажением для ограниченных областей получается из класса отображений с K_p -ограниченным в среднем искажением при $p = \infty$.

Аналогичный предельный переход при $p = \infty$ в геометрическом определении отображений с K_p -ограниченным в среднем искажением даёт геометрическое определение квазирегулярных отображений.

Обозначим Q_p класс отображений f с K_p -ограниченным в среднем искажением, через Q_p^* – класс отображений f с K_p -ограниченным в среднем искажением.

Предложение 2. Если $p < p'$, то $Q_{p'} \subset Q_p$.

Доказательство следует из неравенства

$$\int_D |k^p(x, f)| dx \leq \left(\int_D |k^{p'}(x, f)| dx \right)^{p/p'} \cdot |mD|^{p'/p}.$$

Предложение 3. Если $p' > p$, то $Q_p^* \subset Q_{p'}^*$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_D |k^p(x, f)| J(x, f) dx &= \\ &= \int_D \frac{k^p(x, f)}{J^{-p/p'}(x, f)} \cdot J^{1-p/p'}(x, f) dx \leq \\ &\leq \left(\int_D (k^p(x, f) J^{p/p'}(x, f))^{p'/p'} dx \right)^{p/p'} \times \\ &\times \left(\int_D (J^{1-p/p'}(x, f))^{p'/p'} dx \right)^{(p'-p)/p'} = \\ &= \left(\int_D |k^{p'}(x, f)| J(x, f) dx \right)^{p/p'} (mD')^{p'/p}. \end{aligned}$$

Замечание 1. Пусть $p > n-1$. Тогда в определении 4 можно опустить условия изолированности, открытости и непрерывности [10. Теорема 1.1].

Определение 5. Пусть $K: f \rightarrow D'$ – открытое, непрерывное, изолированное отображение, $f \in W_{n,loc}^1(D)$, $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$, $J(x, f) > 0$ почти всюду в D . Если существует постоянная $Q_{p,k} > 0$ такая, что для любой точки $y \in D'$, $p > n-1$, то

$$Q_{p,k}(f) = \left(\int_D |k^p(x, f)| k^{p+1}(|x-y|) dx \right)^{1/(p+1)} \leq Q_{p,k} < \infty,$$

где функция $k(t)$ определена при $t > 0$, конечна, неотрицательна, непрерывна, не возрастает,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} k(t) = +\infty \text{ и } \int_0^1 k(t) \cdot t^{-\alpha} dt = \infty \text{ при } \alpha = (p+1-n)/(p+1),$$

то f называется отображением с $Q_{p,k}$ -ограниченным в среднем искажением.

Рассмотрим весовые классы отображений Q_i^{α} , определённых в области $D \subset R^n$ и имеющих обобщённые производные первого порядка в смысле С.Л. Соболева, суммируемые по области в степени s , $1 < s < \infty$, вместе с весовой функцией $r^\alpha(x, \partial D)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $r(x, \partial D)$ – расстояние от точки $x \in D$ до границы ∂D .

Определение 6. Будем говорить, что отображение $f: D \rightarrow R^n$ принадлежит весовому классу Q_i^{α} , и

писать $f \in D_k^{s,\alpha}$, если f непрерывно в области D , открыто, изолированно, $f \in W_{n,loc}^1(D)$ и такое, что

$$I_{s,\alpha}(f,D) = \left(\int_D |\lambda^s(x,f) r^\alpha(x,\partial D) dx \right)^{1/s} \leq k < \infty, \\ 1 < s < \infty, \alpha \in (-\infty, +\infty).$$

Отображение f принадлежит классу $Q_k^{s,\alpha}$ в области D , если $f \in Q_k^{s,\alpha}$ для некоторого конечного K .

Функцию $k(x)$, $k:(0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ будем называть ядром, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $k(t)$ непрерывна, не возрастает и $\lim_{t \rightarrow 0+} k(t) = \infty$;
- 2) $\int_0^{+\infty} k^{1/(s+1)}(t) \cdot t^{n-1} dt < \infty$.

Определение 7. Отображение f принадлежит классу $Q_k^{s,\alpha}(k)$ в области D , если f непрерывно, открыто, изолированно, $f \in W_{n,loc}^1(D)$ и такое, что

$$I_{s,\alpha}(f,k,D) = \left(\int_D |\lambda^s(x,f) r^\alpha(x,\partial D) k(|x-y|) dx \right)^{1/s} \leq k$$

для всех точек $y \in \bar{D}$, $1 < s < \infty$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ и ядро $k(|x-y|)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} k^{1/(s+1)}(t) \cdot t^{\frac{n-s-1}{s+1}} + \bar{\alpha} dt = \infty, \bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \geq 0 \\ 0, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Отображение f называют отображением с ограниченным в среднем потенциалом градиента, если $f \in Q_k^{s,\alpha}(k)$ в D при каком-нибудь конечном k .

Предложение 4. Пусть $s' > s$. Тогда $Q_{s',\alpha} \subset Q_{s,\alpha}$, если $\int_D k(|x-y|) dx < \infty$ для любого $y \in \bar{D}$.

Предложение 5. Пусть $s' > s$ и ядро $k(t)$ удовлетворяет в ограниченной области $D \subset R^n$ условию $\int_D k^{s'/(s+1)/(s'-s)}(|x-y|) dx < \infty$ для любого $y \in \bar{D}$. Тогда $Q_{s'} \subset Q_{s,k}$.

Предложение 6. Пусть $p' > p$. Тогда $Q_{k_1}^{s'} \subset Q_k^s$, где $k_1(|x-y|) = k^{(s+1)s'/s}(|x-y|)$.

Предложение 7. Пусть $p' > p$. Тогда $Q_p \subset Q_{p',k}$, если $\int_D k^{-p/(p'-p)}(|x-y|) dx < \infty$ для любого $y \in \bar{D}$.

Доказательства предложений 4–7 проводятся как и доказательство предложения 3. Результаты этих предложений и сравнение класса отображений с ограниченным в среднем искажением с классом BL_p -отображений с p -ограниченным Дирихле и с ограниченным потенциалом градиента приведём в таблице (определение в [11–14]).

1	$Q_s \subset Q_s$	$s' > s$	
2	$Q_s^* \subset Q_s^*$	$s' > s$	
3	$Q_{s'}, k \subset Q_{s,k}$	$s' > s$	
4	$Q_{s'} \subset Q_{s,k}$	$s' > s$	$\int_D k^{s'/(s+1)/(s'-s)}(x-y) dx < \infty$
5	$Q_{s'}, k \subset Q_{s,k}$	$s' > s$	$k_1(x-y) = k^{(s+1)s'/s}(x-y)$
6	$Q_s \supset Q_{s'}(k^{1/(s+1)}(x-y))$	$s' > s$	$\int_D k^{-s/(s'-s)}(x-y) dx < \infty$
7	$Q_s \supset BL^n$	$p=n$	$s=1/(n-1)$
8	$Q_s \subset BL^n$	$p=n$	$s \geq n-1$
9	$BL^n \not\subset Q_s$	$p=n$	$s=1/(n-1)$
10	$Q_s^* \subset BL^n$	$p=n$	$s > 1$
11	$BL^n \not\subset Q_s^*$	$p=n$	$s < 1$
12	$Q_s \subset BL^p$	$p < n$	$s \geq p/(n-p)$
13	$Q_s \not\subset BL^p; BL^p \not\subset Q_s$	$p < n$	$s < p/(n-p)$
14	$BL^p \not\subset Q_s^*$	$p < n$	$s \geq p/(n-p)$
15	$Q_{s,k} \subset BL^p \left(k^{\frac{n}{n-p}}(x-y) \right)$	$p < n$	$s \geq p/(n-p)$
16	$Q_s \not\subset BL^n; Q_s^* \not\subset BL^p$	$p > n$	$1/(n-1) \leq s < n-1$
17	$Q_s^* \cap Q_s \subset BL^n; Q_s^* \not\subset BL^p$	$p > n$	$s > n-1$
18	$Q_s^* \cap Q \subset BL^n; Q_s \not\subset BL^p$	$p > n$	$s > n-1$
19	$BL^n \not\subset Q_s^*$	$p > n$	$s \geq 1/(p-n)$

20	$Q_s \not\subset BL^n$	$p > n$	$1/(p-n) < s < p/(n-1)$
21	$Q^{s,\alpha}(k) \subset Q^{s,\alpha}$	$1 < s < \infty$	$\alpha \in (-\infty, +\infty)$
22	$Q^s(k) \subset Q^{s,\alpha}(k)$	$1 < s < \infty$	$\alpha \geq 0$
23	$Q^{s,\alpha} \subset Q^s$	$1 < s < \infty$	$\alpha < 0$
24	$Q^{s,\alpha}(k) \subset Q^s(k)$	$1 < s < \infty$	$\alpha < 0$
25	$Q^{s,\alpha} \subset Q^{s,\beta}$	$s' < s$	а) $\beta s \geq \alpha s'$, D – огр. обл.; б) $\alpha s' \geq \beta s$; $s(1+\beta) > s'(1+\alpha)$; $\alpha, \beta \geq 0$; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ и $\int_D \frac{\beta s - \alpha s'}{s - s'}(x, \partial D) dx < \infty$
26	$Q^n \subset Q^{ns/(s+1)}(k)$	$1 < s < n$	$\int k^{s+1}(x-y) dx < \infty$
27	$Q^s \subset Q^{s,\alpha}$	$1 < s < \infty$	$\alpha > 0$
28	$Q^s(k) \subset Q^{s,\alpha}$	$1 < s < \infty$	$\alpha \geq 0$
29	$Q^s \subset Q^{s,\alpha}(k)$	$s' > s$	$\alpha > 0$; $\int k^{s'/(s'-s)}(x-y) dx < \infty$
30	$Q^{s,\alpha}(k) \subset Q^s$	$1 < s < \infty$	$\alpha < 0$
31	$Q^{s,\alpha} \subset Q_{s,k}$	$s' > s$	$\alpha > 0$; $\int k^{s'/(s+1)/(s'-s)}(x-y) dx$
32	$Q^s(k) \subset Q^s$	$1 < s < \infty$	$\alpha = 0$
33	$Q^s \subset Q^s(k)$	$s' > s$	
34	$Q^{s',\alpha} \subset Q^{s,\alpha}(k)$	$s' > s$	$\alpha \in (-\infty, +\infty)$ и $\int k^{s'/(s'-s)}(x-y) dx < \infty$
35	$Q^{s,\alpha} \subset BL^n$	$p = n$	$s \geq n-1$; $\alpha > 0$
36	$BL^n \subset Q^{s,\alpha}$	$p = n$	$s = 1/(n-1)$; $\alpha > 0$
37	$BL^n \not\subset Q^{s,\alpha}$	$p = n$	$s > 1/(n-1)$; $\alpha > 0$
38	$Q^{s,\alpha} \subset BL^p$	$p < n$	$s \geq p/(n-p)$; $\alpha < 0$
39	$Q^{s,\alpha} \not\subset BL^p$	$p < n$	$s < p/(n-p)$; $\alpha < 0$
40	$BL^p \not\subset Q^{s,\alpha}$	$p < n$	$s < p/(n-p)$; $\alpha < 0$
41	$Q^{s,\alpha} \not\subset BL^n$	$p > n$	$1/(n-1) \leq s < n-1$; $\alpha < 0$
42	$Q^{s,\alpha} \not\subset BL^p$	$p > n$	$s > n-1$; $\alpha < 0$
43	$Q^{s,\alpha} \not\subset BL^n$	$p > n$	$1/(p-n) < s < p/(n-1)$; $\alpha < 0$
44	$Q^{s,\alpha}(k) \not\subset BL^p(kn/(n-p))$	$p < n$	$s < p/(n-p)$; $\alpha \leq 0$
45	$Q^{s,\alpha}(k) \not\subset BL^p$	$p < n$	$s \geq p/(n-p)$; $\alpha \leq 0$
46	$Q^s(k) \not\subset BL^p(kn/(n-p))$	$p < n$	$s \geq p/(n-p)$; $\alpha = 0$
47	$Q^s(k) \not\subset BL^p$	$p < n$	$s \geq p/(n-p)$; $\alpha = 0$

Все включения доказываются аналогично предложению 3. Предложения, сформулированные в пунктах 9, 13, 14, 16–20, доказываются с помощью примеров, подтверждающих, что соответствующие включения не имеют места. Рассмотрим, например, 16. Пусть $p > n$, $1/(n-1) \leq s < n-1$. Не имеют места включения $Q_s \not\subset BL^n$, $Q_s^* \not\subset BL^n$. Покажем это. Рассмотрим область $D: \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n: 0 < x_i < 1, i = \overline{1, n}\}$ и отображение

$$f(x) = \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{1}{1-\beta} x_n^{1-\beta} \right),$$

где $1-\beta > 0$.

Имеем $l(f'(x)) = 1$, $J(x, f) = K_1(x, f) = x_n^{-p}$,

$$|f'(x)| = x_n^{-\beta} K_*(x, f) = \frac{|f'(x)|^n}{J(x, f)} = \frac{x_n^{-\beta n}}{x_n^{-p}} = x_n^{-(n-1)\beta}.$$

Пусть $1/(n-1) \leq s < n-1$, $1/(n-1) < s < n/(n-1)$. Подберём β так, чтобы $\int_D K_1^s(x, f) J(x, f) dx < \infty$, $\int_D K_*^s(x, f) dx < \infty$,

а $\int_D |f'(x)|^n dx = \infty$. Тогда

$$\int_D K'_i(x, f) J(x, f) dx = \int_0^1 x_n^{-(1+s)\beta} dx_n < \infty,$$

$$\int_D K_{s'}^{s'}(x, f) dx = \int_0^1 x_n^{-s'(n-1)} dx_n < \infty,$$

$$\int_D |f'(x)|^n dx = \int_0^1 x_n^{-\beta n} dx_n = \infty$$

выполняется при $1/n < p < \min\{1/(s+1); 1/s'(n-1)\}$, что и требовалось доказать.

Включение 26 утверждает, что при надлежащем выборе ядер класс отображений с ограниченным потенциалом градиента является более широким, чем класс отображений с ограниченным n -интегралом Дирихле, который изучается в работах Г.Д. Суворова [12] и И.С. Овчинникова [14] и который включает в себя ограниченные квазиконформные отображения. Примером такого ядра может служить функция

$$k(t) = \begin{cases} \frac{t^{-n(1-s)/(1+s)}}{\ln t} & \text{при } 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \frac{2^{n(1-s)/(s+1)}}{\ln 2} & \text{при } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Изолированная особенность является устранимой в классе квазиконформных отображений и в классе

классе отображений с ограниченным искажением и не является устранимой для класса отображений с ограниченным в среднем искажением. Из включения 15 получаем, что $f \in Q_{s, k}$ можно продолжить до непрерывного в изолированную особую точку.

Покажем, что пересечение $Q_s^* \cap Q_s \neq \emptyset$ при $p > n$ и $s > n-1$. Для этого рассмотрим $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < 1, i = \overline{1, n}\}$ и гомеоморфизм

$$f(x) = \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{1}{1-\beta} x_n^{1-\beta} \right) \quad 1-p > 0.$$

Имеем

$$I(f'(x)) = 1, \quad J(x, f) = K_i(x, f) = x_n^{-\beta}, \quad K_{s'}(x, f) = \frac{|f'(x)|^n}{J(x, f)} = \frac{x_n^{-\beta n}}{x_n^{-\beta}} = x_n^{-(n-1)\beta} \quad |f'(x)| = x_n^{-\beta} \cdot s, \quad s' > n-1.$$

Выберем β так, чтобы $\int_D K'_i(x, f) J(x, f) dx < \infty$

$$\int_D K_{s'}^{s'}(x, f) dx < \infty, \quad \text{а} \quad \int_D |f'(x)|^n dx = \infty.$$

Итак,

$$\int_D |f'(x)|^n dx = \int_0^1 x_n^{-\beta n} dx_n = \infty$$

$$\text{при } \beta < \min \left\{ \frac{1}{n}; \frac{1}{1+s}; \frac{1}{s'(n-1)} \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 161 с.
2. Martio O., Rickman S., Vaisala J. Definitions for quasiregular mappings. Ann. Acad. Sci. Ser. A I. Math. 1969. V. 448. P. 1-40.
3. Решетняк Ю.Г. Пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1982.
4. Решетняк Ю.Г. Оценки модуля непрерывности для некоторых отображений // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, №5. С. 1106-1114.
5. Лаурентьев М.А. Об одном дифференциальном признаке гомеоморфных отображений трёхмерных областей // ДАН. 1938. Т. 20. С. 241-242.
6. Vaisala J. A survey of quasi regular maps in $\mathbb{R}^n$ // Всес. мат. конгр. Хельсинки, 1978.
7. Carathéodory P. Homeomorphismes quasiconformes n -dimensionales // Ed. Acad. Rep. Soc. Romania. Rucuresti, 1968.
8. Чернавский А.В. Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сб. 1964. Т. 65, №3. С. 357-369.
9. Сычев А.В., Малотина А.Н. Об отображениях с ограниченным в среднем искажением // ДАН. 1985. Т. 283, № 2. С. 317-320.
10. Manfredo J.J. and Villamor E. Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc. V. 32, № 2. P. 235-240.
11. Fuglede B. Extremal length and functional completion // Acta. Math. 1957. V. 98, № 3. P. 171-219.
12. Суворов Г.Д. «Обобщенный» принцип длины и площади в теории отображений. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
13. Куфарев Б.П. Потенциалы и соответствия границ // ДАН. 1974. Т. 215, № 2. С. 255-258.
14. Овчинников И.С., Суворов Г.Д. Преобразование интеграла Дирихле и пространственные отображения // ДАН. 1964. Т. 154, № 3. С. 523-526.

Статья представлена лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 25 октября 1998 г.