

К ТЕОРЕМЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

Установлены точные условия, при которых в модели нестандартного анализа Робинсона-Закона выполнен принцип направленности для всех направленных отношений, определенных на данном множестве, а также выяснены условия выполнения принципа направленности для всех направленных отношений в данной суперструктуре.

1. Фильтры и направленные отношения

В этой статье мы придерживаемся теоретико-множественной модели Робинсона-Закона [1]. Несмотря на разработку различных версий нестандартного анализа [2, 3], эта модель остается удобным орудием исследования в различных областях математики [4].

В модели Робинсона-Закона принцип направленности играет существенную роль, аналогичную роли аксиомы идеализации в теории внутренних множеств Нельсона [5]. Нашей целью является формулировка и доказательство необходимых и достаточных условий выполнения принципа направленности (в слабой форме) в модели Робинсона-Закона для всех направленных отношений, определенных на заданном множестве, а также необходимых и достаточных условий выполнения принципа направленности для всех направленных отношений в данной суперструктуре. Подробное обсуждение принципа направленности, как и других принципов нестандартного анализа содержится в [2]. Мы лишь бегло перечислим используемые нами обозначения, относящиеся к рассматриваемой модели.

Пусть S есть бесконечное множество. Положим:

$$V_0(S) = S, \dots, V_{n+1}(S) = V_n(S) \cup P(V_n(S)),$$

$$V(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n(S).$$

Будем называть $V_n(S)$ n -м этажом суперструктуры $V(S)$.

Пусть F есть свободный ультрафильтр (будем называть его базисным фильтром). Для каждого n натурального через $*V_n(S)$ обозначим ультрастепень множества $V_n(S)$ по F . Наконец, обозначим:

$$*V(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} *V_n(S).$$

Множество $*V_n(S)$ назовем n -м этажом универсума $*V(S)$.

Пусть $A \in V(S)$, $r(x, y)$ есть A -направленное бинарное отношение на $A \times A$. Тогда r следующим образом порождает фильтр на A . Для каждого $x \in A$ определим множество $A_x = \{y \in A \mid r(x, y)\}$. Нетрудно видеть, что это семейство центрировано, и, следовательно, порождает некоторый фильтр над A . Обозначим этот фильтр через F_r . Фильтр F над множеством T называется α -регулярным, если существует такое подмножество $E \subset F$, что каждое $t \in T$ принадлежит лишь конечному числу множеств $e \in E$, и мощность E равна α [6].

Теорема 1.1. Пусть A – множество мощности α . Тогда на $A \times A$ существует A -направленное отношение r_0 , такое что порожденный этим отношением фильтр α -регулярен.

Доказательство. Обозначим через B множество всех конечных подмножеств множества A . Пусть $t \in B$. Положим: $B_t = \{s \mid t \subset s\}$. Множество $E = \{B_t \mid t \in B\}$ центрировано, поэтому оно порождает некоторый фильтр $S_\omega(B)$. С другой

стороны, для каждого $\theta \in B$ имеем $\theta \in B_t$ если, и только если $t \subset \theta$. Следовательно, $\theta \in B_t$ лишь для конечного числа множеств B_t . Наконец, мощность E равна α , поэтому фильтр $S_\omega(B)$ α -регулярен.

Зададим на A бинарное отношение r_0 .

Множество B равномощно A . Рассмотрим биекцию $\varphi: B \rightarrow A$. Для $x, y \in A$ положим:

$$r_0(x, y) = 1 \Leftrightarrow \varphi(x) \subset \varphi(y).$$

Нетрудно видеть, что отношение r_0 центрировано. Фильтр F_{r_0} , индуцированный этим отношением, является образом фильтра $S_\omega(B)$, следовательно, α -регулярен.

Введем в классе фильтров отношение порядка по Рудину-Кейслеру. Пусть фильтры F и Φ заданы на A и B соответственно. Говорят, что F тоньше Φ , $F < \Phi$, если существует такое отображение $\Psi: A \rightarrow B$, что для каждого $E \in \Phi$ имеем $\Psi^{-1}(E) \in F$.

Определение 1.1. Пусть $A, B \in V(S)$, r есть бинарное B -направленное отношение на $A \times B$. Будем говорить, что принцип направленности выполнен для отношения r , если существует такое $y_0 \in *B$, что для всех $x \in A$ имеем: $*r(x, y_0) = 1$.

Замечание. Каждому отношению r , определенному на $A \times B$, сопоставим отношение ρ , определенное на $C \times C$, где $C = A \cup B$. Положим

$$r(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y) & (x \in A, y \in B), \\ 0 & (x \notin A \vee y \notin B). \end{cases}$$

Легко видеть, что B -направленности отношения r эквивалентна C -направленности отношения ρ . В то же время, принцип направленности выполнен для ρ тогда и только тогда, когда он выполнен для r . В дальнейшем мы рассматриваем только направленные отношения, заданные на декартовом квадрате. A -направленное отношение, заданное на $A \times A$, будем называть просто направленным.

Теорема 1.2. Пусть F есть свободный ультрафильтр над множеством T , $*V(S)$ есть ограниченная ультрастепень суперструктуры $V(S)$ по ультрафильтру F , r есть направленное бинарное отношение на множестве $A \times A$. Тогда для выполнения принципа направленности для r необходимо и достаточно, чтобы $F > F_r$.

Доказательство.

а) Достаточность. Пусть $F > F_r$. Это означает, что существует сюръекция $\varphi: T \rightarrow A$ такая, что

$$\forall B \in FR(\varphi^{-1}(B) \in F). \quad (1)$$

Обозначим класс эквивалентности по фильтру F , содержащий φ , через $\bar{\varphi}$. По определению внутреннего универсума $*V(S)$, имеем $\bar{\varphi} \in *V(S)$. Покажем, что для всех $x \in A$ имеет место $*r(x, \bar{\varphi}) = 1$.

Действительно,

$$*r(x, \bar{\varphi}) = 1 \Leftrightarrow \{t \in T \mid r(x, \varphi(t)) = 1\} \in F. \quad (2)$$

По определению A , $r(x, \varphi(t)) = 1 \Leftrightarrow \varphi(t) \in A_x$. Поэтому

$$\begin{aligned} *r(*x, \bar{\varphi})=1 &\Leftrightarrow \{t \in T \mid \varphi(t) \in A_x\} \in F \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(A_x) \in F. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как по построению $F_y, A_x \in F_y$, то, в силу (1) $\varphi^{-1}(A_x \in F)$. Поэтому из (2) и (3) следует: $*r(*x, \bar{\varphi})=1$.

б) Необходимость. Пусть принцип направленности для r имеет место, т.е. существует $y_0 \in *A$ такое, что $r(*x, y_0)=1$ для всех $x \in A$. Выберем в классе эквивалентности y_0 некоторую функцию $\varphi: T \rightarrow A$.

Пусть $x \in A$. Имеем: $\{t \in T \mid r(x, \varphi(t))=1\} \in F$.

Далее:

$$\varphi^{-1}(A_x) = \{t \in T \mid \varphi(t) \in A_x\} = \{t \in T \mid r(x, \varphi(t))=1\} \in F.$$

Итак, для всех $x \in A$ имеем $\varphi^{-1}(A_x) \in F$. Т.к. фильтр F_y порожден семейством $\{A_x \mid x \in A\}$, то и для каждого $A \in F_y$ имеем: $\varphi^{-1}(A) \in F$, а это и означает, что $F \succ F_y$.

2. Выполнение

принципа направленности для отношений, определенных на данном множестве

Теорема 2.1. Пусть $A \in V(S)$, $\text{card}(A)=\alpha$. Тогда для того чтобы для каждого направленного отношения, определенного на A , выполнялся принцип направленности, необходимо и достаточно, чтобы основной ультрафильтр F был α -регулярен.

Доказательство.

а) Необходимость. Пусть принцип направленности выполняется для всех направленных отношений, определенных на $A \times A$.

Пусть θ есть множество всех конечных подмножеств множества A . Так как мощность θ равна мощности A , то существует биекция $\varphi: A \rightarrow \theta$.

Зададим на $A \times A$ бинарное отношение $r_0(x, y) = (\varphi(x) \subset \varphi(y))$. Это отношение – направленное.

В самом деле, пусть $x_1, \dots, x_k \in A$. Множество $B = \bigcup_{i=1}^k \varphi(x_i)$

есть конечное подмножество множества A , следовательно, $B \in \theta$. Положим $y_1 = \varphi^{-1}(B)$. Теперь $r_0(x_i, y_1)=1$ для всех $i, 1 \leq i \leq k$.

По теореме 1.1 существует такое бинарное отношение r_0 , определенное на $A \times A$, что фильтр F_{r_0} α -регулярен. В силу теоремы 1.2 принцип направленности для r_0 выполнен тогда и только тогда, когда $F \succ F_{r_0}$. Поскольку F_{r_0} α -регулярен, то и F α -регулярен.

б) Достаточность. Пусть F α -регулярен, r – направленное отношение, заданное на A , $\text{card} A = \alpha$. Покажем, что принцип направленности для r выполнен.

Так как фильтр F α -регулярен, то найдется такое $E \subset F$, $\text{card} E = \alpha$, и каждое i из E принадлежит лишь конечному числу множеств из E . Множества E и A равномощны, поэтому существует биекция $\varphi: E \rightarrow A$. Зададим на индексном множестве I функцию y_0 следующим образом. Пусть $i \in I$. По построению E существует лишь конечное множество таких $e_1, \dots, e_k$ из E , которые содержат i . Обозначим: $x_j = \varphi(e_j)$, $1 \leq j \leq k$.

В силу направленности r , существует непустое множество A_i такое, что из $y \in A_i$ следует: $r(x_j, y)=1$ для $1 \leq j \leq k$. Таким образом, имеется множество непустых мно-

жеств $\{A_i\}_{i \in I}$. По аксиоме выбора, выберем в каждом из этих множеств A_i элемент y_i .

Положим: $y_0(i) = y_i$. Обозначим через $\bar{y}_0$ тот класс эквивалентности по фильтру F , который содержит y_0 .

Пусть $x_0 \in A$. Имеем:

$$\begin{aligned} (R(*X_0, Y_0)=1) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid R(*X_0(i), Y_0(i))=1\} \in F. \end{aligned} \quad (4)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \{i \in I \mid r(*x_0(i), y_0(i))=1\} &= \\ &= \{i \in I \mid R(X_0, Y_i)=1\} \supset \varphi^{-1}(X_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Но $\varphi^{-1}(x_0) \in E$, значит, $\varphi^{-1}(x_0) \in F$. Поэтому, в силу (4), (5), $*r(*x_0, \bar{y}_0)=1$, что и требовалось.

3. Достаточное условие регулярности фильтра

Теорема 3.1. Пусть $\{\alpha_t \mid t \in T\}$ есть множество кардиналов, такое что:

- 1) в этом множестве нет наибольшего кардинала;
- 2) $\text{card} T < \alpha$, где $\alpha = \sup_{t \in T} \alpha_t$;

- 3) фильтр F при всех $t \in T$ α_t -регулярен.

Тогда фильтр F α -регулярен.

Доказательство. В условиях теоремы найдется такое $t \in T$, что $\text{card} T \leq \alpha_t$. Так как F α_t -регулярен, то он и $\text{card} T$ -регулярен. Обозначим множество, на котором задан фильтр F , через I .

Существует такое множество $H \subset F$, $H = \{h_i \mid i \in T\}$, что каждое $i \in I$ принадлежит лишь конечному числу множеств из H .

Точно так же, для каждого $t \in T$ существует такое множество $E_t \subset F$, что $\text{card} E_t = \alpha_t$, и каждое $i \in I$ принадлежит лишь конечному числу множеств из E_t . Рассмотрим множество $E = \{e \cap h \mid \exists t \in T (e \in E_t, h = h_t)\}$.

Имеем: $\text{card} E = \alpha$ и $E \subset F$, поскольку каждое множество из E есть пересечение двух множеств из F .

Пусть $i \in I$. По определению H существует конечное число множеств $h_{i_1}, \dots, h_{i_j}, \dots, h_{i_k}$, которым принадлежит i .

В свою очередь, при каждом i_j в E_{i_j} существует лишь конечное число множеств $e_{j,1}, \dots, e_{j,i_j}$, содержащих i . Поэтому i принадлежит лишь множествам $h_{i_j} \cap e_{j,s}$, где $1 \leq j \leq k$, и при каждом j выполнено неравенство $1 \leq s \leq l_j$.

Итак, i принадлежит конечному числу множеств из E , следовательно, фильтр F α -регулярен.

4. Условие выполнимости принципа направленности

Теорема 4.1. Пусть $*V(S)$ есть ограниченная ультраструктура суперструктуры S по ультрафильтру F и $\text{card} V(S) = \alpha$. Тогда принцип направленности выполнен в $*V(S)$ для всех направленных отношений из $V(S)$, если и только если ультрафильтр F α -регулярен.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть принцип направленности выполнен для каждого направленного отношения из $V(S)$. Обозначим $\alpha_n = \text{card} V_n(S)$, где $V_n(S)$ есть n -й этаж суперструктуры $V(S)$, $\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$. По теореме 1.1 существует такое направленное отношение r_n на $V_n(S)$, что ин-

дуцированный им фильтр F_n является α_n -регулярным. Так как принцип направленности выполнен для каждого направленного отношения на $V_n(S)$, то, по теореме 1.2 $F \succ F_n$, F α_n -регулярен для всех $n \in N$. $\alpha = \sup_{n \in N} \alpha_n = \text{card} V(S)$ и по теореме 3.1 F является α -регулярным.

б) Достаточность. Пусть ультрафильтр F α -регулярен, $A \in V(S)$, r – бинарное направленное отношение на $A \times A$. Из α -регулярности F следует, что F является и $\text{card} A$ -регулярным. По теореме 2.1 заключаем, что для отношения r выполнен принцип направленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robinson A. and Zakon E. A set-theoretical characterization of enlargements, in 'Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability' / W. A. J. Luxemburg (ed.), Holt, Rinehart and Winstone (New York, 1969), P. 109–122.
2. Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск, Наука, 1990.
3. Mattes J. Axiomatic approaches to nonstandard analysis. Jahrbuch der Kurt Gödel Gesellschaft 1992, 61–79.
4. Альбеверио С., Фенстад Й, Хезз-Крон, Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
5. Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83, №. 6, P. 1165–1198.
6. Chang C.C. and Keisler H.G. Model theory, 3rd edn. North-Holland, Amsterdam, 1990.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 10 декабря 1999 г.