УДК 512.541

Е.В. Шапошникова

О СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ПЕРВЫХ ГРУПП КОГОМОЛОГИЙ НАД СМЕШАННЫМИ СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97–01–00795.

Доказана сепарабельность первых групп когомологий над смешанными сепарабельными абелевыми группами.

Идейным источником предлагаемой работы является цикл работ И.Х. Беккера [1, 2], где получены условия равенства нулю первых групп когомологий над широкими классами абелевых групп. Предложенный И.Х. Беккером подход к изучению групп когомологий $H^1(\Phi,G)$, где $\Phi\le\mathrm{Aut}G$, основывается на использовании взаимосвязей между свойствами абелевых групп и свойствами их групп автоморфизмов. Этот подход позволяет применить теорию абелевых групп к исследованию групп когомологий.

Так как группы когомологий (гомологий) являются абелевыми группами, то их изучение средствами теории абелевых групп представляется естественным и интересным направлением в теории групп когомологий малых размерностей. По словам Л. Фукса, теория когомологий групп является областью математики, в которой широкое применение теории абелевых групп может быть очень плодотворным. Однако, как абелевы группы, группы когомологий фактически не изучались, и работы, относящиеся к данной тематике, неизвестны.

Под П-модулем (Ф-модулем) подразумевается модуль над целочисленным групповым кольцом $Z(\Pi)$ ($Z(\Phi)$), где П (Ф) – некоторая мультипликативная группа.

Первая группа когомологий группы П над П-модулем G определяется как фактор-группа

$$H^1(\Pi,G)=Z^1(\Pi,G)/B^1(\Pi,G),$$

где $Z^1(\Pi,G)$ – группа всех скрещенных гомоморфизмов из П в G, т.е. всех отображений из П в G, для которых справедливо $f(xy)=f(x)+xf(y)$, $x, y\in\Pi$; $Z^1(\Pi,G)$ – подгруппа всех главных скрещенных гомоморфизмов, т.е. скрещенных гомоморфизмов $f(xy)=a-xa$, где a – фиксированный элемент группы G.

Автоморфизм φ группы G называется регулярным, если $\varphi g\ne g$ для любого элемента $0\ne g\in G$ (т.е. φ оставляет неподвижным лишь нулевой элемент группы G). Автоморфизм φ регулярен тогда и только тогда, когда $\varepsilon-\varphi$ – мономорфизм. Регулярные автоморфизмы играют особую роль при изучении абелевых групп и их групп автоморфизмов.

Наиболее простым для описания первой группы когомологий является случай, когда группа автоморфизмов Ф, первый аргумент рассматриваемой группы $H^1(\Phi,G)$, – циклическая. Лемма 1 дает описание группы когомологий $H^1(\langle\varphi\rangle,G)$ циклической группы $\langle\varphi\rangle\subseteq\mathrm{Aut}G$ и является частным случаем теоремы 1 [3, с. 161] и результата §6 [3, с. 243], но построенный в доказательстве этой леммы изоморфизм используется далее в теореме 2.

Лемма 1. Пусть G – абелева группа, $\langle\varphi\rangle\subseteq\mathrm{Aut}G$. Тогда

1) $H^1(\langle\varphi\rangle,G)\cong G/\mathrm{Im}(\varepsilon-\varphi)$, если $o(\varphi)=\infty$;

2) $H^1(\langle\varphi\rangle,G)\cong\mathrm{Ker}(\varepsilon+\varphi+\ldots+\varphi^{n-1})/\mathrm{Im}(\varepsilon-\varphi)$, если $o(\varphi)=n\in N$.

Доказательство. Поскольку группа $\langle\varphi\rangle$ циклическая, то всякий скрещенный гомоморфизм $f:\langle\varphi\rangle\to G$ определяется заданием элемента $f\varphi$. Рассмотрим отображение $\mu:Z^1(\langle\varphi\rangle,G)\to G$, $\mu f=f\varphi=g$, $f\in Z^1(\langle\varphi\rangle,G)$, $g\in G$. Ясно, что μ – инъекция.

Покажем, что при условии $o(\varphi)=\infty$ справедливо $\mathrm{Im}\mu=G$, т.е. любому ненулевому элементу $g\in G$ соответствует скрещенный гомоморфизм $f\in Z^1(\langle\varphi\rangle,G)$ такой, что $\mu f=g$. Действительно, для любого $0\ne g\in G$, положив $f\varphi=g$, на основании определения скрещенного гомоморфизма вычислим $f\varphi^k$ для любого $k\in Z$ по формулам $f\varphi^{-1}=-\varphi^{-1}g$, $f\varphi^k=(\varepsilon+\varphi+\ldots+\varphi^{k-1})fg$ для $k>1$ и $f\varphi^k=(\varepsilon+\varphi^{-1}+\ldots+\varphi^{k+1})fg$ для $k<-1$. Остается проверить, что никакой регулярный автоморфизм из группы $\langle\varphi\rangle$ не отображается получающимся скрещенным гомоморфизмом $f:\langle\varphi\rangle\to G$ в нуль (в этом случае возникло бы противоречие $f=0$). Предположим, что $f\varphi^k=0$, где φ^k – регулярный автоморфизм, $k\in N$ (если k – отрицательное число, то автоморфизм φ^{-k} также регулярен и $f\varphi^{-k}=0$). Имеем $0=f\varphi^k=(\varepsilon+\varphi+\ +\ldots+\varphi^{k-1})g$. Отсюда $0=(\varepsilon-\varphi)f\varphi^k=(\varepsilon-\varphi^k)g$. Здесь отображение $(\varepsilon-\varphi^k)$ – мономорфизм. Значит, $g=0$. Следовательно, никакой регулярный автоморфизм из $\langle\varphi\rangle$ не отображается получающимся скрещенным гомоморфизмом f в нуль. Таким образом, μ – сюръекция при $o(\varphi)=\infty$. Если же $o(\varphi)=n$, то $\mathrm{Im}\mu=\mathrm{Ker}(\varepsilon+\varphi+\ \ldots\ +\varphi^{n-1})$. Так как $0=f\varphi^n(\varepsilon+\varphi+\ \ldots\ +\varphi^{n-1})g$, где $g=\mu f$, для любого $f\in Z^1(\langle\varphi\rangle,G)$.

Поскольку

$$\mu(f_1+f_2)=(f_1+f_2)\varphi=f_1\varphi+f_2\varphi=\mu f_1+\mu f_2, f_1, f_2\in Z^1(\langle\varphi\rangle, G),$$

то μ – групповой изоморфизм между $Z^1(\langle\varphi\rangle,G)$ и G, если $o(\varphi)=\infty$; $\mathrm{Ker}(\varepsilon+\varphi+\ldots+\varphi^{n-1})$, если $o(\varphi)=n$. При этом μ индуцирует изоморфизм подгрупп $B^1(\langle\varphi\rangle,G)$ и $(\varepsilon-\varphi)G$ групп $Z^1(\langle\varphi\rangle,G)$ и G, если $o(\varphi)=\infty$, $Z^1(\langle\varphi\rangle,G)$ и $\mathrm{Ker}(\varepsilon+\varphi+\ldots+\varphi^{n-1})$, если $o(\varphi)=n$. Следовательно, $H^1(\langle\varphi\rangle,G)\cong G/\mathrm{Im}(\varepsilon-\varphi)$ при $o(\varphi)=\infty$, $H^1(\langle\varphi\rangle,G)\cong\mathrm{Ker}(\varepsilon+\varphi+\ldots+\varphi^{n-1})/\mathrm{Im}(\varepsilon-\varphi)$ при $o(\varphi)=n\in N$.

Теорема 1. Пусть G – абелева группа, $k<-1$, σ – регулярный автоморфизм из $C(\Phi)$ – центра группы Ф. Тогда $H^1(\Phi,G)\cong(G/(\varepsilon-\sigma)G)^{\Phi}$.

Доказательство. Так как $\langle\sigma\rangle$ – нормальная подгруппа группы Ф, то имеем точную последовательность [3, с. 449]:

$$0\to H^1(\Phi/\langle\sigma\rangle,G^{\langle\sigma\rangle})\to H^1(\Phi,G)\to H^1(\Phi/\langle\sigma\rangle,G^{\langle\sigma\rangle})\to$$
$$\to H^1(\Phi,G)\to H^1(\langle\sigma\rangle,G)^{\Phi}\to H^2(\Phi/\langle\sigma\rangle,G^{\langle\sigma\rangle})\to H^2(\Phi,G).$$

Отсюда, так как $G^{\langle\sigma\rangle}=0$ в силу регулярности автоморфизма σ, получаем, что $H^1(\Phi,G)\cong H^1(\langle\sigma\rangle,G)^{\Phi}$. Лемма 1 описывает $H^1(\langle\sigma\rangle,G)$ как абелеву группу. В данном случае $H^1(\langle\sigma\rangle,G)\cong G/(\varepsilon-\sigma)G$ при любом порядке автоморфизма σ в силу его регулярности. Действительно, если $o(\sigma)=n<\infty$, то $0=\varepsilon-\sigma^n=(\varepsilon-\sigma)(\varepsilon+\sigma+\ \ldots+\sigma^{n-1})$. Отсюда $\varepsilon+\sigma+\ldots+\sigma^{n-1}=0$, так как $\varepsilon-\sigma$ – мономорфизм, и $\mathrm{Ker}(\varepsilon+\sigma+\ldots+\sigma^{n-1})=G$. Покажем, что указанный в лемме 1 изоморфизм является Ф-модульным. Во-первых, фактор-группа $G/(\varepsilon-\sigma)G$ является

Ф-модулем. Так как $\sigma\in C(\Phi)$, то $(\varepsilon-\sigma)G$ – вполне характеристическая подгруппа группы G и Ф-модульная структура на $G/(\varepsilon-\sigma)G$ индуцируется как на фактор-группе по вполне характеристической подгруппе. Во-вторых, изоморфизм μ из леммы 1 – изоморфизм Ф-модулей, т.е. для любого $\varphi\in\Phi$ имеем $\mu(\varphi f)=\varphi\mu f$. Действительно, пусть $\varphi f=f_1$, $\mu f=g$, $\mu f_1=g_1$, $f, f_1\in Z^1(\langle\sigma\rangle, G)$, g, $g_1\in G$. При этом $g_1=(\varphi f)\sigma=$ $=\varphi f(\varphi^{-1}\sigma\varphi)=\varphi f\sigma=\varphi g$, так как $\sigma\in C(\Phi)$. Тогда $\mu(\varphi f)=\mu f_1=g_1$ и $\varphi\mu f=\varphi g=g_1$. Итак, $Z^1(\langle\sigma\rangle,G)\cong G$ как Ф-модули. Причем Ф-подмодуль $B^1(\langle\sigma\rangle,G)$ при изоморфизме μ переходит в Ф-подмодуль $(\varepsilon-\sigma)G$. Отсюда $H^1(\langle\sigma\rangle,G)\cong G/(\varepsilon-\sigma)G$ как Ф-модули. Следовательно, $H^1(\langle\sigma\rangle,G)^{\Phi}\cong(G/(\varepsilon-\sigma)G)^{\Phi}$. Теорема доказана.

Теорема 1 описывает первую группу когомологий $H^1(\Phi,G)$ над группой G, обладающей регулярным автоморфизмом $\sigma\in C(\Phi)$, как подгруппу неподвижных относительно индуцированного действия группы Ф элементов некоторой фактор-группы группы G. Такое описание позволяет определенные свойства группы G перенести на группу $H^1(\Phi,G)$, проследив, сохраняются ли они (а если нет, то в какие свойства трансформируются) для соответствующей фактор-группы, а затем для подгруппы неподвижных элементов этой фактор-группы. Далее будет показано, что свойство сепарабельности переносится на первую группу когомологий $H^1(\Phi, G)$, если G – сепарабельная абелева группа.

В теореме 2 предполагается, что σ – регулярный автоморфизм из $C(\Phi)$, индуцирующий регулярный автоморфизм на всяком прямом слагаемом группы G.

Теорема 2. Пусть G – смешанная сепарабельная абелева группа, $\sigma\in\Phi\leq \mathrm{Aut}G$. Тогда $H^1(\Phi, G)$ – сепарабельная периодическая группа.

Доказательство. Воспользуемся результатом теоремы 1. Имеем $H^1(\Phi,G)\cong(G/(\varepsilon-\sigma)G)^{\Phi}$. Так как G – смешанная сепарабельная абелева группа, $(\varepsilon-\sigma)G$ – ее вполне характеристическая подгруппа, то согласно [4] $G/(\varepsilon-\sigma)G$ – сепарабельная группа. Кроме того, $G/(\varepsilon-\sigma)G$ – периодическая группа. Действительно, пусть $g+(\varepsilon-\sigma)G$ – произвольный ненулевой элемент группы $G/(\varepsilon-\sigma)G$. Вложим элемент g во вполне разложимое прямое слагаемое $\bigoplus_{i=1}^{n}G_i$ группы G, $g=$ $=g_1+\ldots+g_n$, $g_i\in G_i$, $i=\overline{1,n}$. Так как $g\notin \mathrm{Im}(\varepsilon-\sigma)$, то существует множество индексов $[1, m]$, где $m\leq n$, такое, что $g_i\notin\mathrm{Im}(\varepsilon-\sigma)$, $i=\overline{1,m}$. Ясно, что соответствующие прямые слагаемые ранга 1 $G_1,\ldots,G_m$ – группы без кручения, так как на любом прямом слагаемом типа $Z(p^k)$, $k\in N$, p – простое число, эндоморфизм $\varepsilon-\sigma$ индуцирует автоморфизм. Обозначим $(\varepsilon-\sigma)|_{G_i}=\varepsilon-\sigma_i$, $i=\overline{1,m}$. Так как эндоморфизм $\varepsilon-\sigma_i$ группы G_i, $i=\overline{1,m}$ определяется некоторым рациональным числом, то найдется число $l_i\in N$ такое, что $l_ig_i(\varepsilon-\sigma_i)G_i$. Тогда $lg\in\mathrm{Im}(\varepsilon-\sigma)$, где $l=\text{НОК}(l_1, \ldots, l_m)$. Это означает, что каждый смежный класс $g+(\varepsilon-\sigma)G$ имеет конечный порядок, т.е. группа $G/(\varepsilon-\sigma)G$ периодическая.

Таким образом, группа $H^1(\Phi, G)$ сепарабельная периодическая, так как она изоморфна подгруппе неподвижных относительно Ф элементов сепарабельной периодической группы $G/(\varepsilon-\sigma)G$.

Следствие. Если G – вполне разложимая группа, $\sigma\in\Phi\leq\mathrm{Aut}G$, то $H^1(\Phi, G)$ – прямая сумма конечных циклических групп.

Доказательство. Пусть $G=\bigoplus_{i\in I}G_i$, где G_i – группа ранга 1, $i\in I$. Тогда

$$(\varepsilon-\sigma)G=\bigoplus_{i\in I}(\varepsilon-\sigma_i)G_i,$$

где $\sigma_i=\sigma|_{G_i}$, $i\in I$. Отсюда [5, с. 57]:

$$G/(\varepsilon-\sigma)G=\bigoplus_{i\in I}G_i\Big/\bigoplus_{i\in I}(\varepsilon-\sigma_i)G_i,$$

где $G_i/(\varepsilon-\sigma_i)G_i=0$, если $G_i\cong Z(p^k)$; p – простое число; $k\in N$ и $G_i/(\varepsilon-\sigma_i)G_i$ – прямая сумма конечных циклических групп, если G_i – группа без кручения ранга 1. Итак, $G/(\varepsilon-\sigma)G$ – прямая сумма конечных циклических групп. Следовательно, и $H^1(\Phi,G)$ – прямая сумма конечных циклических групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беккер И.Х.* О группах скрещенных гомоморфизмов групп автоморфизмов абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Матем. 1973. № 7. С. 3–11.
2. *Беккер И.Х.* Первые группы когомологий над слабо транзитивными группами // Абелевы группы и модули. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. Вып. 13–14. С. 20–34.
3. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966. 543 с.
4. *Megibben C.K.* Separable mixed groups // Comment. Math. Univ. Carol. 1980. V. 21, № 4. P. 755–768.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.

Статья представлена кафедрами общей математики и алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 10 декабря 1999 г.