ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 269 январь 2000

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.865.5

В.В. Домбровский, Е.С. Герасимов

ДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ РИСКА

Предлагается способ описания структуры инвестиционного портфеля, состоящего из рисковых вложений (обыкновенные акции), и безрискового вклада (банковский счет, надежные облигации) в виде динамической стохастической сети. Узлы сети представляют собой финансовые средства, вложенные в данный рисковый или безрисковый финансовый актив, а дуги – направления и объем капитала, перераспределяемого между активами в процессе управления портфелем. Задача управления инвестиционным портфелем формулируется как динамическая задача слежения за некоторым эталонным портфелем с желаемой доходностью, задаваемой инвестором. Предлагается подход к определению стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию. Приводятся результаты численного моделирования.

Проблема управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из основных в финансовой инженерии [1–4]. Классический подход к решению данной проблемы, предложенный в [5, 6], и последующие его модификации [7–11] заключаются в том, что при формировании своего портфеля инвестор хотел бы минимизировать риск портфеля (обычно дисперсию портфеля или связанные с ней меры риска) и получать желаемую доходность (либо, в двойственной постановке – максимизировать доходность при ограниченном риске). Задача оптимизации структуры портфеля (определения оптимальных долей вложений в различные виды активов) решается в статической постановке (однопериодные модели) и в зависимости от выбора функции риска сводится к решению задач квадратичного или линейного программирования.

В данной работе:

1) предлагается динамическая стохастическая сетевая модель ИП, описывающая структуру портфеля в пространстве состояний и позволяющая изучать динамику каждого отдельного вложения во взаимосвязи с поведением других вложений;

2) задача управления ИП формулируется как динамическая задача оптимального слежения за эталонным портфелем, имеющим задаваемую инвестором желаемую эффективность;

3) предлагается подход к определению оптимальной стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию;

4) проведено численное исследование модели ИП.

Модель портфеля в непрерывном времени

Рассмотрим ИП, состоящий из (n–1)-го вида рисковых вложений (под рисковыми понимаются инвестиции, доходность которых – случайная величина [1–4]) и банковского счета с неслучайной, но возможно переменной доходностью. Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета. Рассматривается самофинансируемый портфель, т.е. деньги извне на банковский счет не поступают, а со счета снимаются только для вложения в ценные бумаги, формирующие ИП. Структуру и динамику такого портфеля будем описывать в виде стохастической сети, узлы которой представляют капитал, помещенный в i-й финансовый актив, а дуги – направления и объем перераспределяемого капитала (рис. 1).

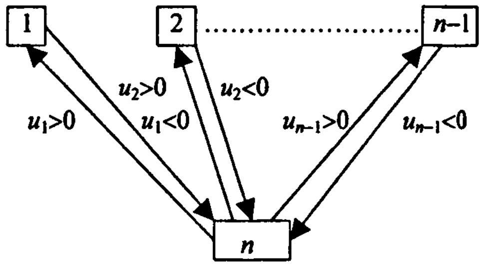

Рис. 1. Сетевая структура портфеля (узлы 1, 2, ..., n–1 – рисковые активы, узел n – банковский счет)

Опишем эволюцию цен рисковых финансовых активов стохастическим дифференциальным уравнением [12]

$$dS_i(t)=S_i(t)\left[\mu_i(t)dt+\sum_{j=1}^{M}\sigma_{ij}(t)d\omega_j(t)\right], \qquad (1)$$

где $S_i(t)$ – цена i-й рисковой ценной бумаги; $\omega_j(t)$ – стандартные независимые винеровские процессы, i=1, ..., n–1. Величину $\sigma_{ii}(t)>0$ в финансовой математике называют волатильностью (изменчивостью), а $\sigma_{ij}(t)$, $i\neq j$ служат мерой статистической взаимосвязи ценных бумаг, входящих в портфель.

Пусть $x(t)=[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$ – вектор-столбец, компоненты которого равны объему инвестиций в i-й актив, i=1, ..., n; компонента $x_n(t)$ описывает состояние банковского счета. Тогда эволюция рисковых вложений описывается уравнениями

$$dx_i(t)=\left[\mu_i(t)dt+\sum_{j=1}^{M}\sigma_{ij}(t)d\omega_j(t)\right]x_i(t)+u_i(t)dt, \qquad (2)$$

эволюция банковского счета следует уравнению

$$dx_n(t)=\left[r(t)x_n(t)-\sum_{i=1}^{n-1}u_i(t)\right]dt, \qquad (3)$$

где $r(t)$ – доходность банковского счета; $r(t)<\mu_i(t)$, $u_i(t)$ – сумма перераспределяемого капитала (в единицу времени). Если $u_i(t)>0$, то это означает перевод капитала в сумме $u_i(t)$ с банковского счета в i-й вид рисковых вложений, если $u_i(t)<0$, то это – перераспределение капитала с i-го рискового вложения на банковский счет. В результате выбора управляющих воздействий $u_i(t)$ происходит перераспределение капитала между рисковыми инвестициями и банковским счетом и посредством банковского счета – между различными видами рисковых инвестиций.

Динамика сети, описывающей структуру портфеля, подчиняется стохастическим дифференциальным уравнениям (2) и уравнению эволюции банковского счета (3). (2) и (3) можно записать в векторно-матричной форме:

$$dx(t)=A(t)x(t)+Bu(t)dt, \qquad (4)$$

где матрица

$$A(t)=\mathrm{diag}\left\{\mu_1(t)dt+\sum_{j=1}^{M}\sigma_{1j}(t)d\omega_j(t),\ldots,\right.$$
$$\left.\mu_{n-1}(t)dt+\sum_{j=1}^{M}\sigma_{n-1j}(t)d\omega_j(t),r(t)dt\right\};$$

матрица B размерности $n\times(n-1)$ имеет структуру

$$B=\begin{bmatrix} I_{n-1} \\ -E \end{bmatrix}, E=[1,..,1];$$

I_{n-1} – единичная матрица размера $n-1$; вектор $u(t)=[u_1(t),\ldots,u_{n-1}(t)]^T$.

Определим стратегию управления инвестиционным портфелем путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с наименьшими отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля, эволюция которого описывается уравнением

$$dV^0(t)=\mu^0(t)V^0(t)dt, \qquad (5)$$

где $\mu^0(t)>(t)$ – заданная желаемая доходность портфеля. По аналогии с классической теорией оптимального портфеля [1–6] можно сказать, что параметр $\mu^0(t)$ характеризует склонность инвестора к риску (в классической теории роль такого параметра выполняет желаемая ожидаемая доходность портфеля – математическое ожидание доходности). Чем больше $\mu^0(t)$, тем выше склонность инвестора к риску. Разность $\mu^0(t)-r(t)$ можно рассматривать как премию за риск. Мерой риска выберем квадратичный функционал вида

$$Y=M\left\{\int_0^T\left(\left[V(t)-V^0(t)\right]^2+u^T(t)R(t)u(t)\right)dt+\right.$$
$$\left.+\left[V(T)-V^0(T)\right]^2\right\}, \qquad (6)$$

где $V(t)=Cx(t)$ – общий капитал портфеля; $C=(E,1)$; матрица $R(t)>0$; начальный капитал $V(0)=V^0(0)$. Второе слагаемое в функционале (6) налагает ограничения на объем инвестиций и косвенно учитывает издержки, связанные с управлением портфелем. Заметим, что в предложенной модели ИП не накладывается явных ограничений на управления, но должны выполняться условия $x_i(t)>0$, $i=\overline{1,n}$. Если снять требование самофинансирования, то отрицательное значение переменной $x_n(t)$ будет означать заем (или дополнительный вклад) в размере

$$u_0(t)=\sum_{i=1}^{n-1}u_i(t)-x_n(t).$$

Определение оптимальной стратегии управления

Уравнение (4) можно записать в виде

$$dx(t)=A_0(t)x(t)dt+Bu(t)dt+\left(\sum_{j=1}^{M}A_j(t)d\omega_j\right)x(t), \qquad (7)$$

где матрицы $A_0(t)=\mathrm{diag}\{\mu_1(t),\ldots,\mu_{n-1}(t),r(t)\}$,

$$A_j(t)=\mathrm{diag}\{\sigma_{1j}(t),\ldots,\sigma_{n-1j}(t),0\},$$

Введем расширенный вектор-столбец $z(t)=[x^T(t), V^0(t)]^T$ и, объединяя уравнения (5) и (7), запишем:

$$dz(t)=\bar{A}_0(t)z(t)dt+\bar{B}u(t)dt+\left(\sum_{j=1}^{M}\bar{A}_j(t)d\omega_j(t)\right)z(t), \qquad (8)$$

где

$$\bar{A}_0(t)=\begin{bmatrix} A_0(t) & 0_n^T \\ 0_n & \mu^0(t) \end{bmatrix}; \bar{A}_j(t)=\begin{bmatrix} A_j(t) & 0_n^T \\ 0_n & 0 \end{bmatrix}; \bar{B}=\begin{bmatrix} B \\ 0_{n-1} \end{bmatrix}$$

$0_n=[0,\ldots,0]$ – вектор-строка размерности n.

Система (8) относится к классу систем с мультипликативными (параметрическими) шумами [13–15]. Эффективный и достаточно просто реализуемый подход к определению стратегии управления с обратной связью для таких систем состоит в определении оптимального линейного закона управления вида $u(t)=K(t)z(t)$, где $K(t)$ – матрица коэффициентов обратной связи выбирается из условия минимума функционала (6).

Функционал (6) можно записать в виде

$$Y=tr\left\{\int_0^T\left(\bar{C}^T\bar{C}P(t)+R(t)K(t)P(t)K^T(t)\right)dt+\bar{C}^T\bar{C}P(T)\right\}, \qquad (9)$$

где $tr\{\}$ – след матрицы; $\bar{C}=(C,-1)$; $P(t)=M\{z(t)z^T(t)\}$ – матрица вторых моментов удовлетворяет уравнению

$$\dot{P}(t)=\left(\bar{A}_0(t)+\bar{B}K(t)\right)P(t)+P(t)\times$$
$$\times\left(\bar{A}_0(t)+\bar{B}K(t)\right)^T+\sum_{j=1}^{M}\bar{A}_j(t)P(t)\bar{A}_j^T(t). \qquad (10)$$

Оптимальную стратегию управления можно получить, следуя методике [13,15], переформулировав задачу управления стохастической системой (8) в виде эквивалентной задачи управления детерминированной системой, описываемой матричным уравнением динамики вторых моментов состояний (10), матрицей $K(t)$ в качестве управляющих воздействий, критерием оптимальности (9) и используя принцип максимума в матричной формулировке [16]. Решение задачи определяется уравнениями

$$K(t)=-R^{-1}(t)\bar{B}Q(t),$$
$$-\dot{Q}(t)=\bar{C}^T\bar{C}+\bar{A}_0^T(t)Q(t)+Q(t)\bar{A}_0(t)-$$
$$-Q(t)\bar{B}R^{-1}(t)\bar{B}^TQ(t)+\sum_{j=1}^{M}\bar{A}_j^T(t)Q(t)\bar{A}_j(t),$$
$$Q(T)=\bar{C}^T\bar{C}.$$

Численное моделирование

Пример. Определим стратегию управления портфелем, состоящим из банковского счета доходностью $r=0,0025$ и пяти видов акций, цена которых описывается уравнением вида (1) с параметрами:

$$\mu_1=0,009,\sigma_{1j}=0,0015;\mu_2=0,011,\sigma_{2j}=0,0019;$$
$$\mu_3=0,013,\sigma_{3j}=0,0023;\mu_4=0,014,\sigma_{4j}=0,0025;$$
$$\mu_5=0,0165,\sigma_{5j}=0,003; j=1,\ldots,5.$$

Доходность эталонного портфеля $\mu^0=0,015$. Весовая матрица $R=\{3;\ 3;\ 0,1;\ 0,1;\ 0,1\}$. Результаты численного моделирования данного ИП представлены на рис. 2, где на оси абсцисс указаны номера интервалов, а по оси ординат – суммы вложений. Отрицательные значения состояния банковского счета указывают на размер заемных средств, привлекаемых для лучшего отслеживания эталонного портфеля. На рис. 3 показано поведение управляющих переменных.

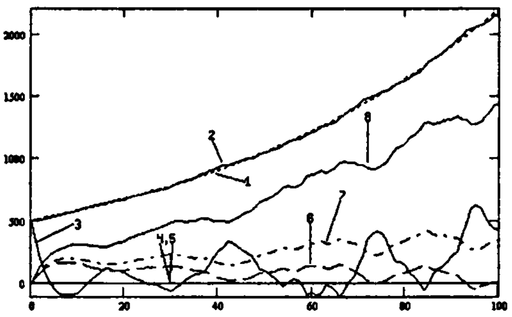

Рис. 2. Динамика портфеля, состоящего из пяти видов акций и банковского счета (1 – эталонный портфель; 2 – построенный портфель; 3 – банковский счет; 4, 5, 6, 7, 8 – рисковые активы)

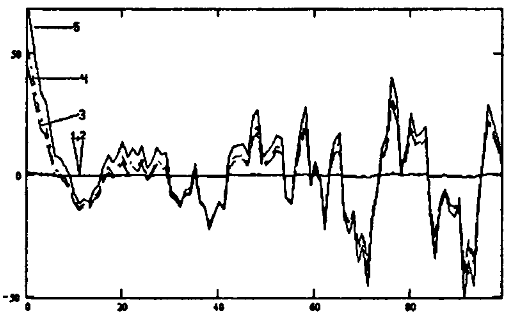

Рис. 3. Динамика поведения управляющих воздействий (линия 1, 2, 3, 4, 5 – u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)

Заключение

В данной работе предложена сетевая динамическая стохастическая модель формирования инвестиционного портфеля, состоящего из рисковых и безрискового финансовых активов. Задача управления портфелем сформулирована как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой эффективностью. Назовем преимущества предлагаемого подхода по сравнению с известными.

1. Формулировка задачи управления ИП как динамической задачи слежения за эталонным портфелем представляется естественной и гибкой с точки зрения инвестора. На основе анализа состояния финансового рынка инвестор может выбирать желаемую доходность эталонного портфеля, а подбирая соответствующим образом коэффициенты весовой матрицы в функции риска – учитывать особенности управления различными видами ценных бумаг, а также издержки, связанные с управлением.

2. Описание структуры ИП в виде динамической сети (в пространстве состояний) позволяет изучать динамику каждого актива в отдельности. При этом в данной модели не накладываются в явном виде ограничения на управления, что существенно упрощает синтез оптимальной стратегии.

3. Данная модель легко может быть обобщена на случай сочетания различных инвестиционных стилей [1], когда инвестор владеет несколькими совместно управляемыми ИП, содержащими различные классы финансовых активов, имеющих различную желаемую доходность (в смысле отслеживания соответствующих эталонных портфелей).

4. Формулировка динамической задачи управления портфелем по квадратичному критерию позволяет использовать весь богатый арсенал средств, разработанных в теории автоматического управления (робастные методы, адаптивные алгоритмы и т.д.).

5. Модель без принципиальных затруднений может быть обобщена на случай, когда возможны инвестиции заемных средств и использование на потребление части доходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.
2. Первозванский *А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА-М, 1994.
3. *Уотшем Т. Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах. М.: Финансы. Изд. объединение «ЮНИТИ», 1999.
4. *Домбровский В.В.* Методы количественного анализа финансовых операций. Томск: Изд-во научно-техн. лит-ры, 1998.
5. *Markowitz H.* Portfolio Selection // J. Finance.1952. V. 7, № 1. P. 77–91.
6. *Tobin J.* Liquidity Preference as Behavior Towards Risk // Review of Economic Studies. 1958. V. 26, № 1. P. 65–86.
7. *Первозванский А.А.* Оптимальный портфель ценных бумаг на нестационарном неравновесном рынке // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3. С. 63–68.
8. *Лукашин Ю.П.* Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. 1995. Т. 31, № 1. С. 138–150.
9. *Гамбовски Б., Рачев С.* Финансовые модели, использующие устойчивые законы // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2, вып. 4. С. 556–604.
10. *Youg M.R.* A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution // Management Science. 1998. V. 44, № 5. P. 673–683.
11. *Домбровский В.В., Егорычев Ф.Н.* Сравнение стратегий управления портфелем ценных бумаг // Вестник Томского государственного университета, 2000. № 271. С. 138–141.
12. *Merton R.C.* Continuous-time Finance. Cambr. Ma., Balckwell, 1990.
13. *McLane P.J.* Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State – and Control – Dependent Disturbances // IEEE Trans. On Automat. Control. 1971. V. AC-16, № 6. P.793–798.
14. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
15. *Домбровский В.В., Чикунова Е.В.* Синтез динамических регуляторов пониженного порядка для систем со случайными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 2. С. 97–101.
16. *Athans M.* The Matrix Minimum Principle // Information and Control. 1968. V. 11. P. 592–606.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 15 октября 1999 г.