

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ ПРИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ РИСКА

Задача управления самофинансируемым портфелем ценных бумаг, состоящим из рискованных (обыкновенные акции) и безрисковых (банковский счет, надежные облигации) вложений, формулируется как динамическая задача слежения за эталонным портфелем, имеющим заданную желаемую эффективность. Предлагается подход к определению оптимальной стратегии управления при квадратичной функции риска.

1. Динамическая модель инвестиционного портфеля

Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из n видов рискованных вложений (под рискованными будем понимать инвестиции, доходность которых – случайная величина [1–3]) и безрискового вклада с неслучайной, но возможно переменной доходностью. Капитал, помещенный в i -й рискованный актив, в момент времени k равен $u_i(k)$, $i=1, 2, \dots, n$; в безрисковый – $u_0(k)$. Тогда общий объем вложений (портфель) в момент k будет равен

$$V(k) = \sum_{i=1}^n u_i(k) + u_0(k). \quad (1.1)$$

В момент времени $k+1$ капитал, вложенный в безрисковый актив, станет равен (рассматривается самофинансируемый портфель)

$$Y_0(k+1) = [1 + r(k+1)]u_0(k),$$

а в i -й рискованный актив:

$$Y_i(k+1) = [1 + v_i(k+1)]u_i(k), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

где $v_i(k+1)$ – ставка доходности рискованных вложений на интервале $[k, k+1]$, случайная величина; $r(k+1)$ – неслучайная доходность безрисковых вложений.

Условие самофинансируемости портфеля означает, что должно выполняться равенство

$$Cu(k) = CY(k) = V(k), \quad (1.2)$$

где $C = [1, 1, \dots, 1]$ – вектор размерности $n+1$,

$$u(k) = [u_0(k), u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)]^T,$$

$$Y(k) = [Y_0(k), Y_1(k), Y_2(k), \dots, Y_n(k)]^T.$$

Состояние портфеля в момент времени $k+1$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} Y(k+1) &= D(k+1)u(k), \\ Cu(k) &= CY(k) = V(k). \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{где } D(k) = \begin{bmatrix} 1+r(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+v_1(k) & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1+v_n(k) \end{bmatrix}.$$

В начальный момент времени капитал инвестора равен $V(0)$.

Решение уравнения (1.2) относительно вектора $u(k)$ имеет вид [4]

$$u(k) = C^*CY(k) + \bar{C}v(k), \quad (1.4)$$

где C^* – псевдообратная матрица, $C^* = C^T(CC^T)^{-1}$; I – единичная матрица размерности $n+1$; $v(k)$ – произвольный вектор соответствующей размерности, $\bar{C} = (I - C^*C)$.

Подставляя вектор управления (1.4) в уравнение портфеля (1.3), получим

$$Y(k+1) = D(k+1)C^*CY(k) + D(k+1)\bar{C}v(k). \quad (1.5)$$

Домножая левую и правую части (1.5) слева на вектор C и используя (1.2), запишем уравнение динамики капитала управляемого портфеля:

$$V(k+1) = CD(k+1)C^*V(k) + CD(k+1)\bar{C}v(k). \quad (1.6)$$

В (1.6) в качестве вектора управлений будем рассматривать вектор $v(k)$ (назовем его псевдоуправлением).

Определим стратегию управления портфелем путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал управляемого портфеля с минимально возможными отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля с доходностью $\mu^0(k) > r(k)$, т.е. чтобы его капитал рос по закону:

$$V^0(k+1) = [1 + \mu^0(k+1)]V^0(k). \quad (1.7)$$

Уравнение (1.8) описывает динамику эталонного портфеля. В начальный момент времени $V^0(0) = V(0)$. В качестве меры риска выберем функционал

$$J = M \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} ([V(k) - V^0(k)]^2 + v^T(k)R(k)v(k)) + [V(T) - V^0(T)]^2 \right\}, \quad (1.8)$$

где $R(k) > 0$ – диагональная матрица соответствующей размерности.

Задача состоит в минимизации критерия (1.8) по переменным $v_i(k)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$ при динамических ограничениях (1.6), (1.7) и ограничениях на первоначальные управляющие переменные:

$$u_i(k) \geq 0, \quad i=0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.9)$$

2. Определение оптимальной стратегии управления

Рассмотрим один из возможных подходов к решению сформулированной задачи. Для описания эволюции цен рискованных финансовых активов используем модель вида

$$S_i(k+1) = S_i(k)[1 + \mu_i(k+1) + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}v_j(k+1) \times w_j(k+1)],$$

где $w_j(k)$ – некоррелированные гауссовские случайные последовательности с нулевыми средними и единичными дисперсиями; $\mu_i(k) > r(k)$; $\sigma_{ij}(k) > 0$; $i=1, 2, \dots, n$. Данные уравнения представляют собой дискретизованные аналоги геометрического (экономического) броуновского движения, модели которого обычно используются в финансовой математике для описания эволюции цен рискованных финансовых активов [5–7]. Таким образом, доходность i -го рискованного актива определяется уравнением

$$v_i(k+1) = \mu_i(k+1) + \sum_{j=1}^n \sigma_{i,j}(k+1)w_j(k+1). \quad (2.1)$$

Определим вектор-столбец $x(k) = [V(k), V^0(k)]^T$ и с учетом (2.1) представим уравнения динамики реального и эталонного портфелей в виде

$$x(k+1) = A(k+1)x(k) + \sum_{i=1}^n w_i(k+1)A_i(k+1)x(k) + B(k+1)v(k) + \sum_{i=1}^n w_i(k+1)B_i(k+1)v(k), \quad (2.2)$$

где матрицы

$$A(k) = \begin{bmatrix} C\bar{D}(k)C^* & 0 \\ 0 & 1+\mu^0(k) \end{bmatrix};$$

$$A_i(k) = \begin{bmatrix} C\bar{D}_i(k)C^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B(k) = \begin{bmatrix} C\bar{D}(k)\bar{C} \\ 0_{n+1} \end{bmatrix}; \quad B_i(k) = \begin{bmatrix} C\bar{D}_i(k)\bar{C} \\ 0_{n+1} \end{bmatrix};$$

$0_{n+1} = [0, 0, \dots, 0]$ – вектор размерности $n+1$;

$$\bar{D}_i(k) = \text{diag}\{\sigma_{1,i}; \sigma_{2,i}; \dots; \sigma_{n,i}\};$$

$$\bar{D}(k) = \text{diag}\{1+r(k); 1+\mu_1(k); 1+\mu_2(k); \dots; 1+\mu_n(k)\}.$$

Функционал (1.9) запишем следующим образом:

$$J = M \left\{ \sum_{k=1}^{T-1} x^T(k) h^T h x(k) + v^T(k) R(k) v(k) \right\} + x^T(T) h^T h x(T), \quad (2.3)$$

где $h = [1, -1]$. Система (2.2) относится к классу систем со случайными параметрами (мультипликативными шумами). Вопросы синтеза управления для подобного класса систем рассматривались в [8–10]. Эффективный и достаточно просто реализуемый подход к определению оптимальной стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию для таких систем – синтез закона управления, оптимального в классе линейных

$$v(k) = K(k)x(k), \quad (2.4)$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов обратной связи выбирается из условия минимума функционала (2.3).

Отметим, что в данной постановке на новые управления $v(k)$ ограничения не накладываются, однако они должны выбираться так, чтобы выполнялись условия (1.10) неотрицательности первоначальных управляющих переменных. Выполнение этих условий можно обеспечить подходящим выбором весовой матрицы $R(k)$ в функции риска.

Функционал (2.3) можно записать в виде:

$$J = tr \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} [h^T h P(k) + R(k) K(k) P(k) K^T(k)] + h^T h P(T) \right\}, \quad (2.5)$$

где матрица вторых моментов $P(k) = M\{x^T(k)x(k)\}$ с учетом (2.4) удовлетворяет уравнению

$$P(k+1) = [A(k+1) + B(k+1)K(k)]P(k)[A(k+1) + B(k+1)K(k)]^T + \sum_{i=1}^n [A_i(k+1) + B_i(k+1)K(k)]P(k)[A_i(k+1) + B_i(k+1)K(k)]^T. \quad (2.6)$$

Оптимальную стратегию управления можно получить, переформулировав данную задачу управления

стохастической системой в виде эквивалентной задачи управления детерминированной системой, описываемой матричным уравнением динамики вторых моментов состояний (2.6), матрицей $K(k)$ в качестве управляющих воздействий, критерием качества (2.5) и используя принцип максимума в матричной формулировке [11].

Решение задачи дают следующие уравнения:

$$K(k) = -[B^T(k+1)Q(k+1)B(k+1) + \sum_{i=1}^n B_i^T(k+1)Q(k+1)B_i(k+1) + R(k)]^{-1} \times$$

$$\times [B(k+1)Q(k+1)A(k+1) + \sum_{i=1}^n B_i^T(k+1)Q(k+1)A_i(k+1)],$$

$$Q(k) = [A(k+1) + B(k+1)K(k)]^T Q(k+1) \times$$

$$\times [A(k+1) + B(k+1)K(k)] + \sum_{i=1}^n [A_i(k+1) + B_i(k+1)K(k)]^T \times$$

$$\times Q(k+1) [A_i(k+1) + B_i(k+1)K(k)] + K^T(k)R(k)K(k) + h^T h,$$

$$Q(T) = h^T h.$$

Исходный вектор управлений $u(k)$ вычисляется по формуле

$$u(k) = C_1 x(k) + \bar{C} v(k), \quad (2.7)$$

где $C_1 = [C^*, 0]$.

Значение функции риска (2.5) на оптимальной траектории легко вычисляется.

3. Численное моделирование

Определим стратегию управления портфелем, состоящим из банковского счета доходностью $r=0,01$ и трех видов акций, доходность вложений в которые описывается уравнениями вида (2.1) с параметрами:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,005 & 0,005 \\ 0,0045 & 0,0175 & 0,0045 \\ 0,004 & 0,004 & 0,025 \end{bmatrix}; \quad \mu_1=0,02; \mu_2=0,03; \mu_3=0,04.$$

Доходность эталонного портфеля $\mu^0=0,025$. Численно была реализована стратегия управления вида (2.4), (2.7) с весовой матрицей $R = \text{diag}\{0,02; 0,01; 0,01; 0,01\}$. Результаты численного моделирования представлены на рис. 1, 2, где на оси абсцисс указаны номера интервалов, на оси ординат – суммы вложений. Рис. 1 иллюстрирует динамику поведения эталонного и управляемого портфелей, на рис. 2 показано поведение управляющих переменных u_0, u_1, u_2, u_3 .

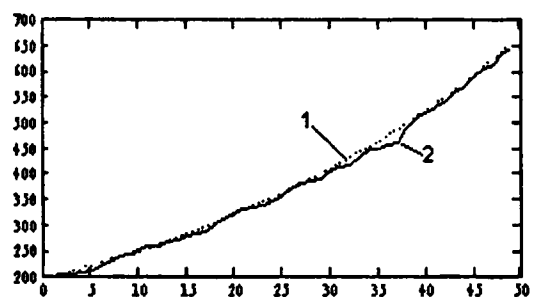


Рис. 1. Динамика изменения капитала управляемого и эталонного портфелей: 1 – $V^0(k)$; 2 – $V(k)$

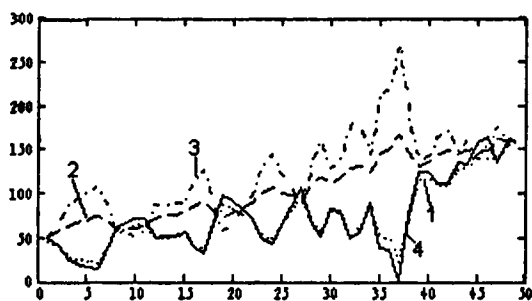


Рис. 2. Динамика вложений в рискованные активы:
1 – $u_1(k)$; 2 – $u_2(k)$; 3 – $u_3(k)$; 4 – $u_0(k)$

4. Заключение

В данной работе предложена динамическая стохастическая модель формирования самофинансируе-

мого инвестиционного портфеля, состоящего из рискованных и безрисковых финансовых активов. Задача управления портфелем сформулирована как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой эффективностью. Предложен способ определения оптимальной стратегии управления.

Отметим, что в рамках предлагаемого подхода можно решить задачу управления портфелем в случае, когда параметры модели, описывающей динамику цен рискованных активов, меняются скачкообразно, используя методы, обзор которых дан в [9].

Модель без принципиальных затруднений может быть обобщена на случай, когда возможны инвестиции заемных средств и использование части доходов на потребление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.
2. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА-М, 1994.
3. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. М.: Финансы. Изд. объединение «ЮНИТИ», 1999.
4. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1973.
5. Первозванский А.А. Оптимальный портфель ценных бумаг на нестационарном неравновесном рынке // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3.
6. Merton R.C. Continuous-time Finance. Cambr. Ma., Balkwell, 1990.
7. Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов // Обзорные прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2, вып. 4.
8. McLane P.J. Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State and Control-Dependent Disturbances // IEEE Trans. on Automat. Control. 1971. V. AC-16, № 6.
9. Малышев В.В., Пакиин П.В. Прикладная теория статистической устойчивости и оптимального стационарного управления. Обзор. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 2.
10. Домбровский В.В. Синтез динамических регуляторов пониженного порядка для систем со случайными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 2.
11. Athans M. The Matrix Minimum Principle // Information and Control. 1968. V. 11.

Статья представлена кафедрой математических методов в экономике экономического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 15 декабря 1999 г.