УДК 517.54

Л.М. Бер

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМ ИСКАЖЕНИЯ

Получены оценки, обобщающие теоремы Г.М. Голузина об искажении хорд, для однолистных функций с симметрией вращения.

1. ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Пусть D, $0 \in D$, – односвязная область. Пусть $S(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и отображающих этот круг на область D_0, полученную из D исключением n ($n \in \boldsymbol{N}$) простых непересекающихся жордановых дуг.

Пусть $S'(n)$ – подкласс класса $S(n)$ тех функций, которые отображают единичный круг на плоскость с разрезом по простой жордановой дуге, идущей в бесконечность. Согласно [1], любую функцию класса $S(n)$ можно представить в виде предела последовательности функций подкласса $S'(n)$, в котором каждая функция $\tilde{f}(z)$ представима в E в виде

$$\tilde{f}(z) = \lim_{\tau\to\infty} e^{\tau} f(z,\tau), \tag{1}$$

где $f(z, \tau)$ как функция от z голоморфна и однолистна в круге E, $|f(z, \tau)| < 1$ в E и $f(0, \tau) = 0$, $f_z'(0, \tau) = 1$, а как функция от τ ($0 \le \tau < \infty$) является решением дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{df}{dz} = -f\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau)\frac{\mu_k(\tau)+f}{\mu_k(\tau)-f},$$

удовлетворяющим начальному условию

$$f(z, 0) = z.$$

Здесь $\mu_k(\tau)$ – управляющие функции, кусочно-непрерывные и по модулю равные единице в промежутке $0 \le \tau < \infty$.

Пусть $f(z) \in S'(n)$ и $f(z, \tau)$ – функция, соответствующая $f(z)$. Для любых точек z_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $n \ge 1$, положим для краткости $f_\nu = f(z_\nu, \tau)$.

Непосредственным вычислением получаем следующие равенства при $n \ge 1$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau n}\frac{f_\nu^n - f_{\nu'}^n}{f_\nu^n f_{\nu'}^n}\right] = -n + \frac{nf_\nu^{n-1}}{f_\nu^n - f_{\nu'}^n}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau} - \frac{nf_{\nu'}^{n-1}}{f_\nu^n - f_{\nu'}^n}\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau} - \frac{n}{f_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau} - \frac{n}{f_{\nu'}}\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[1 - f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n\right] = -n\frac{f_\nu^{n-1}f_{\nu'}^{n-1}}{1 - f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}\left[f_\nu\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau} + f_{\nu'}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau}\right].$$

Используя уравнение Левнера, получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau}\frac{f_\nu - f_{\nu'}}{f_\nu f_{\nu'}}\right] = -2f_\nu\overline{f}_{\nu'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau) - f_\nu)(\mu_k(\tau) - f_{\nu'})}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau n}\frac{f_\nu^n - f_{\nu'}^n}{f_\nu^n f_{\nu'}^n}\right] = 2nf_\nu f_{\nu'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k - f_\nu)(\mu_k - f_{\nu'})}\times \left[\frac{\mu_k(\tau)(f_\nu^{n-1} - f_{\nu'}^{n-1})}{f_\nu^n - f_{\nu'}^n} - \frac{1}{2}\right],\ n \ge 2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[1 - f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n\right] = 2nf_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n\frac{1 - f_\nu\overline{f}_{\nu'}}{1 - f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}\times \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau) - f_\nu)\overline{(\mu_k(\tau) - f_{\nu'})}},\ n \ge 1. \tag{4}$$

Интегрируя равенства (2), (3) и (4) по τ от 0 до ∞ и учитывая (1) и начальное условие $f(z, 0) = z$, получаем соответственно следующие формулы:

$$\ln\frac{\tilde{f}_\nu - \tilde{f}_{\nu'}}{\tilde{f}_\nu\tilde{f}_{\nu'}}\frac{z_\nu - z_{\nu'}}{z_\nu z_{\nu'}} = -2\int_0^\infty\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau)\frac{f_\nu}{(\mu_k(\tau) - f_\nu)}\frac{f_{\nu'}}{(\mu_k(\tau) - f_{\nu'})}d\tau; \tag{5}$$

$$\ln\frac{\tilde{f}_\nu^n - \tilde{f}_{\nu'}^n}{\tilde{f}_\nu^n\tilde{f}_{\nu'}^n}\frac{z_\nu - z_\nu}{z_\nu z_{\nu'}} = 2n\times \int_0^\infty\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau)\frac{f_\nu}{\mu_k(\tau) - f_\nu}\frac{f_{\nu'}}{\mu_k(\tau) - f_{\nu'}}\times \left[\mu_k(\tau)\frac{f_\nu^{n-1} - f_{\nu'}^{n-1}}{f_\nu^n - f_{\nu'}^n} - \frac{1}{2}\right]d\tau \tag{6}$$

при $n \ge 2$, а при $n \ge 1$

$$\ln\left(1 - z_\nu^n\overline{z}_{\nu'}^n\right) = -2n\times \int_0^\infty\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau)\frac{f_\nu^n}{\mu_k(\tau) - f_\nu}\frac{\overline{f}_\nu^n}{\overline{\mu_k(\tau) - f_{\nu'}}}\frac{1 - f_\nu\overline{f}_{\nu'}}{1 - f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}d\tau. \tag{7}$$

2. ОБЛАСТИ С СИММЕТРИЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Пусть S_p, $p \in \boldsymbol{N}$, – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f_p(z)$, нормированных условиями $f_p(0) = 0$, $f_p'(0) = 1$ и отображающих этот круг на области с p-кратной симметрией вращения относительно нуля.

Обозначим через Σ_{0p}, $p \in \boldsymbol{N}$, множество всех функций $F_p(\xi)$ класса Σ_0, отображающих область $\Omega = \{\xi : 1 < |\xi| < \infty\}$ на область с p-кратной симметрией вращения относительно нуля и не принимающих в Ω нулевого значения.

Поскольку между классами S_p и Σ_{0p} формулы

$$F_p(\xi) = 1/f_p(1/\xi) \in \Sigma_{0p},\ \text{если}\ f_p(z) \in S_p, \tag{8}$$

$$f_p(z) = 1/F_p(1/z) \in S_p,\ \text{если}\ F_p(\xi) \in \Sigma_{0p},$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие, то многие оценки на классе Σ_{0p} легко сводятся к оценкам на S_p и, более того, к оценкам на подклассе класса S_p, представимом через интегралы уравнения Левнера.

Пусть $f_p(z) \in S'_p$ и $f_p(z, \tau)$ – функция, соответствующая $f_p(z)$.

Используя уравнение Левнера для функций класса S_p и повторив рассуждения §1 для функции $f_p(z)$, получим равенства, аналогичные (5) – (7):

$$\ln\frac{\tilde f_{p,\nu}-\tilde f_{p,\nu'}}{\tilde f_{p,\nu}\tilde f_{p,\nu'}}\frac{z_\nu z_{\nu'}}{z_\nu - z_{\nu'}} = -2\int_0^\infty \frac{f^p_{p,\nu}}{\mu^p - f^p_{p,\nu}}\frac{f^p_{p,\nu'}}{\mu^p - f^p_{p,\nu'}}d\tau -$$

$$-2\sum_{l=1}^{p-1}\int_0^\infty \frac{\mu^p f^{p-l}_{p,\nu} f^l_{p,\nu'}}{(\mu^p - f^p_{p,\nu})(\mu^p - f^p_{p,\nu'})} \qquad (9)$$

при $p \geq 2$, а при $p \geq 1$

$$\ln\frac{\tilde f^p_{p,\nu}-\tilde f^p_{p,\nu'}}{\tilde f^p_{p,\nu}\tilde f^p_{p,\nu'}}\frac{z^p_\nu z^p_{\nu'}}{z^p_\nu - z^p_{\nu'}} =$$

$$= -2p\int_0^\infty \frac{f^p_{p,\nu}}{\mu^p - f^p_{p,\nu}}\frac{f^p_{p,\nu'}}{\mu^p - f^p_{p,\nu'}}d\tau ; \qquad (10)$$

$$\ln\left(1 - z^p_\nu \bar z^p_{\nu'}\right) = -2p\int_0^\infty \frac{f^p_{p,\nu}}{\mu^p - f^p_{p,\nu}}\overline{\left(\frac{f^p_{p,\nu'}}{\mu^p - f^p_{p,\nu'}}\right)}d\tau . \qquad (11)$$

Положим для $k = 1, p$, $z_\nu \in E$, $z_{\nu'} \in E$

$$\Phi_k(z_\nu, z_{\nu'}) = \frac{\tilde f^k_{p,\nu}-\tilde f^k_{p,\nu'}}{\tilde f^k_{p,\nu}\tilde f^k_{p,\nu'}}\frac{z^k_\nu z^k_{\nu'}}{z^k_\nu z^k_{\nu'}} ,$$

$$\varphi(z_\nu, z_{\nu'}) = \left(1 - z^p_\nu \bar z^p_{\nu'}\right),$$

$$\frac{f^p_{p,\nu}}{\mu^p - f^p_{p,\nu}} = U_\nu + iV_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

где U_ν, V_ν – вещественные функции.

В этих обозначениях (9) – (11) принимают вид

$$\ln\Phi_1(z_\nu, z_{\nu'}) =$$

$$= -2\int_0^\infty (U_\nu + iV_\nu)(U_{\nu'} + iV_{\nu'})d\tau - 2A'_{\nu,\nu'} , \qquad (12)$$

$$\ln\Phi_p(z_\nu, z_{\nu'}) = -2p\int_0^\infty (U_\nu + iV_\nu)(U_{\nu'} + iV_{\nu'})d\tau ,$$

$$\ln\varphi(z_\nu, z_{\nu'}) = -2p\int_0^\infty (U_\nu + iV_\nu)(U_{\nu'} - iV_{\nu'})d\tau , \qquad (13)$$

где

$$A'_{\nu,\nu'} = \sum_{l=1}^{p-1}\int_0^\infty \frac{\mu^p f^{p-l}_{p,\nu} f^l_{p,\nu'}}{(\mu^p - f^p_{p,\nu})(\mu^p - f^p_{p,\nu'})}d\tau .$$

При этом под логарифмом понимается та однозначная в рассматриваемой области ветвь многозначной функции, которая обращается в нуль при $z_\nu \to 0$, $z_{\nu'} \to 0$.

3. ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ С СИММЕТРИЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Теорема 1. Для функции $F_p(\xi) \in \Sigma_{0p}$, $p \geq 2$, при любых вещественных положительных $\alpha_{\nu,\nu'}$, $\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 1$, таких, что $\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}X_\nu X_{\nu'}$ будет положительной квадратичной формой, и при любых ξ_ν, $\nu, \nu' = 1, \ldots, n$, из $\Omega = \{\xi : 1 < |\xi| < \infty\}$ справедливо неравенство

$$\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|\frac{F_p(\xi_\nu) - F_p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu \xi_{\nu'}}\right|^{pa_{\nu,\nu'}} \geq$$

$$\geq \prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|1 - \frac{1}{\xi^p_\nu \bar\xi^p_{\nu'}}\right|^{a_{\nu,\nu'}} - 2\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}\sum_{l=1}^{p-1} B_l(\xi_\nu, \xi_{\nu'}) , \quad (14)$$

где

$$B_l(\xi_\nu, \xi_{\nu'}) =$$

$$= \left[\frac{|\xi_\nu|}{(1-|\xi_\nu|)^2}\right]^{p-l}\left[\frac{|\xi_{\nu'}|}{(1-|\xi_{\nu'}|)^2}\right]^{l}\frac{|\xi_\nu|^p|\xi_{\nu'}|^p}{(1-|\xi_\nu|^p)(1-|\xi_{\nu'}|^p)}$$

при $\xi_\nu = \xi_{\nu'}$, под отношением $\dfrac{F_p(\xi_\nu) - F_p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu - \xi_{\nu'}}$ следует понимать $F'_p(\xi_\nu)$.

Доказательство. Пусть $F_p(\xi) \in \Sigma_{0p}$. Тогда, согласно (8), $f_p(z) = 1/F_p(1/z) \in S_p$ и соответствующие ей функции $\Phi_1(\xi_\nu, \xi_{\nu'})$ и $\varphi(\xi_\nu, \xi_{\nu'})$ можно представить в виде

$$\Phi_1(\xi_\nu, \xi_{\nu'}) = \frac{F_p(\xi_\nu) - F_p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu - \xi_{\nu'}} ,$$

$$\varphi(\xi_\nu, \xi_{\nu'}) = \left(1 - \frac{1}{\xi^p_\nu \bar\xi^p_{\nu'}}\right).$$

Отделяя в (12) и (13) вещественные части, получим

$$\ln|\Phi_1(\xi_\nu, \xi_{\nu'})| = -2\int_0^\infty (U_\nu U_{\nu'} - V_\nu V_{\nu'})d\tau - 2A_{\nu,\nu'} ,$$

$$\ln|\varphi(\xi_\nu, \xi_{\nu'})| = -2p\int_0^\infty (U_\nu U_{\nu'} + V_\nu V_{\nu'})d\tau ,$$

где $A_{\nu,\nu'} = \operatorname{Re} A'_{\nu,\nu}$.

Отсюда сложением и вычитанием левых и правых частей полученных равенств приходим к следующим формулам:

$$\ln|\Phi_1(\xi_\nu, \xi_{\nu'})| = -\frac{1}{p}\ln|\varphi(\xi_\nu, \xi_{\nu'})| - 4\int_0^\infty U_\nu U_{\nu'}d\tau - 2A_{\nu,\nu'} ,$$

$$\ln|\Phi_1(\xi_\nu, \xi_{\nu'})| = \frac{1}{p}\ln|\varphi(\xi_\nu, \xi_{\nu'})| + 4\int_0^\infty V_\nu V_{\nu'}d\tau - 2A_{\nu,\nu'} .$$

Умножим полученные после почленного сложения и почленного вычитания равенства на вещественные числа $\alpha_{\nu\nu'}$, просуммируем и получим

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}\left(\ln\left|\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|^p\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|\right)=$$

$$=-4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}U_\nu U_{\nu'}d\tau-2p\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}A_{\nu,\nu'}\,; \quad (15)$$

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}\ln\frac{\left|\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|^p}{\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|}=$$

$$=4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}d\tau-2p\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}A_{\nu,\nu'}\,. \quad (16)$$

Тогда, принимая во внимание, что для положительных вещественных чисел $\alpha_{\nu,\nu'}$, удовлетворяющих условиям теоремы, имеем

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}U_\nu U_{\nu'}\ge 0\,,\qquad \sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}\ge 0\,,$$

а также учитывая оценку $A_{\nu,\nu'}$ сверху

$$A_{\nu,\nu'}\le\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\frac{|\xi_\nu|}{(1-|\xi_\nu|)^2}\right)^{p-l}\times$$

$$\times\left(\frac{|\xi_{\nu'}|}{(1-|\xi_{\nu'}|)^2}\right)^{l}\frac{|\xi_\nu|^p|\xi_{\nu'}|^p}{(1-|\xi_\nu|^p)(1-|\xi_\nu|^p)}$$

и обозначения $\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, $\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, получаем неравенство (14). Теорема доказана.

Теорема 2. Для функций $F_p(\xi)\in\Sigma_{0p}$, $p\in\boldsymbol{N}$, при любых вещественных $\alpha_{\nu,\nu'}$, $\nu,\nu'=1,2,\dots,n$, $n\ge 1$, таких, что $\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}X_\nu X_{\nu'}$ будет положительной квадратичной формой, и при любых ξ_ν, $\nu=1,\dots,n$ из области $\Omega=\{\xi:1<|\xi|<\infty\}$ имеем оценки

$$\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|1-\frac{1}{\xi_\nu^p\bar\xi_{\nu'}^p}\right|^{a_{\nu,\nu'}}\le\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}\right|^{a_{\nu,\nu'}}\ge$$

$$\le\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|1-\frac{1}{\xi_\nu^p\bar\xi_{\nu'}^p}\right|^{-a_{\nu,\nu'}}. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})=\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}\,.$$

Повторив рассуждения теоремы 1, заменяя $\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$ на $\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, получим равенства, аналогичные (15), (16):

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}\ln\left(\left|\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|\right)=$$

$$=4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}d\tau\,,$$

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}\ln\frac{\left|\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|}{\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|}=4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}d\tau\,.$$

Тогда, если $\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} a_{\nu,\nu'}X_\nu X_{\nu'}$ – положительная квадратичная форма, то, учитывая обозначения $\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$ и $\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Положив в (17) $p=1$, получаем оценку Г.М. Голузина для функции $F(\xi)$ класса Σ [2. С. 119].

Следствие 2. Положив в (17) $p=1$, $n=1$, $\alpha_{11}=1$, имеем оценку для функции $F(\xi)\in\Sigma$

$$1-\frac{1}{|\xi|^2}\le|F'(\xi)|^2\le\frac{1}{1-\frac{1}{|\xi|^2}}\,.$$

Следствие 3. Для функции $F(\xi)\in\Sigma$, положив в (17) $p=1$, $n=2$, $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{12}=\alpha_{21}=1$ и $\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$, $a_{12}=a_{21}=-1$, получаем

$$\left(1-\frac{1}{|\xi_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|\xi_2|^2}\right)\left|1-\frac{1}{\xi_1\bar\xi_2}\right|^2\le$$

$$\le\left|F'(\xi_1)F'(\xi_2)\right|\left|\frac{F(\xi_1)-F(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}\right|^2\le \quad (18)$$

$$\le\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_1|^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_2|^2}\right)}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\xi_1\bar\xi_2}\right|^2}$$

и, соответственно,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_1|^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_2|^2}\right)}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\xi_1\bar\xi_2}\right|^2}\le$$

$$\le\left|F'(\xi_1)F'(\xi_2)\right|\left|\frac{\xi_1-\xi_2}{F(\xi_1)-F(\xi_2)}\right|^2\le \quad (19)$$

$$\le\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_1|^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_2|^2}\right)}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\xi_1\bar\xi_2}\right|^2}.$$

Разделив почленно (18) на (19), приходим к оценке

$$\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_1|^2}}\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_2|^2}}\le\left|\frac{F(\xi_1)-F(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_1|^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_2|^2}}}.$$

Эта оценка впервые получена И.Е. Базилевичем [3].

Теорема 3. При любых γ_ν, $\nu=1,\dots,n$, $n\ge 1$, и любых ξ_ν, $\nu=1,\dots,n$ из области $\Omega=\{\xi:1<|\xi|<\infty\}$ для $F_p(\xi)\in\Sigma_{0p}$, $p\in\boldsymbol{N}$, имеем оценку

$$\left|\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\ln\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}\right|\le$$

$$\le-\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\bar\gamma_{\nu'}\ln\left(1-\frac{1}{\xi_\nu^p\bar\xi_{\nu'}^p}\right).$$

Доказательство. Достаточно доказать это неравенство для функций $F_p(\xi) = 1/f_p(1/\xi)$ с $f_p(z) \in S'_p$. В этом случае, используя (11), имеем

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} \gamma_\nu \gamma_{\nu'} \ln \frac{F_p^p(\xi_\nu) - F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p - \xi_{\nu'}^p} =$$

$$= -2p \int_0^\infty \sum_{\nu,\nu'=1}^{n} \gamma_\nu \gamma_{\nu'} \frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p - f_{p,\nu}^p} \frac{f_{p,\nu'}^p}{\mu^p - f_{p,\nu'}^p} d\tau =$$

$$= -2p \int_0^\infty \left(\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p - f_{p,\nu}^p} \right)^2 d\tau$$

и, следовательно,

$$\left| \sum_{\nu,\nu'=1}^{n} \gamma_\nu \gamma_{\nu'} \ln \frac{F_p^p(\xi_\nu) - F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p - \xi_{\nu'}^p} \right| =$$

$$= 2p \int_0^\infty \left| \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p - f_{p,\nu}^p} \right|^2 d\tau =$$

$$= 2p \int_0^\infty \sum_{\nu,\nu'=1}^{n} \gamma_\nu \bar{\gamma}_{\nu'} \frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p - f_{p,\nu}^p} \overline{\left(\frac{f_{p,\nu'}^p}{\mu^p - f_{p,\nu'}^p} \right)} d\tau.$$

Применим формулу (12) к последнему интегралу. Получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Аналогично доказывается более общая

Теорема 4. При любых комплексных γ_v, $v = 1, \ldots, n$, $n \ge 1$, и $\gamma'_{\nu'}$, $v' = 1, \ldots, n'$, $n' \ge 1$, и любых ξ_v, $v = 1, \ldots, n$, и $\xi'_{\nu'}$, $v' = 1, \ldots, n'$, из области $\Omega = \{\xi : 1 < |\xi| < \infty\}$ для $F_p(\xi) \in \sum_{0p}$, $p \in \boldsymbol{N}$, имеем

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\nu'=1}^{n'} \gamma_\nu \gamma'_{\nu'} \ln \frac{F^p(\xi_\nu) - F^p(\xi'_{\nu'})}{\xi_\nu^p - \xi'^p_{\nu'}} \right| \le \tag{20}$$

$$\le \sqrt{\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} \gamma_\nu \bar{\gamma}_{\nu'} \ln \left(1 - \frac{1}{\xi_\nu^p \bar{\xi}_{\nu'}^p} \right) \sum_{\nu,\nu'=1}^{n'} \gamma'_\nu \overline{\gamma'}_{\nu'} \ln \left(1 - \frac{1}{\xi'^p_\nu \overline{\xi'}^p_{\nu'}} \right)}.$$

Следствие 4. Для функции $F(\xi) \in \sum_0$ (положив в (20) $p = 1$) справедлива оценка

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\nu'=1}^{n'} \gamma_\nu \gamma'_{\nu'} \ln \frac{F(\xi_\nu) - F(\xi'_{\nu'})}{\xi_\nu - \xi'_{\nu'}} \right| \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{\nu,\nu'=1}^{n} \gamma_\nu \bar{\gamma}_{\nu'} \ln \left(1 - \frac{1}{\xi_\nu \bar{\xi}_{\nu'}} \right) \sum_{\nu,\nu'=1}^{n'} \gamma'_\nu \overline{\gamma'}_{\nu'} \ln \left(1 - \frac{1}{\xi'_\nu \overline{\xi'}_{\nu'}} \right)}.$$

Эта оценка получена Н.А. Лебедевым [4] и, как легко видеть, справедлива и на классе $\sum_1$.

Следствие 5. Если $F(\xi) \in \sum$, то

$$\left| \ln \frac{F(\xi_1) - F(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \right| \le -\ln \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right),$$

где $|\xi_1| = |\xi_2| = \rho > 1$.

Оценка впервые получена Г.М. Голузиным [5]. Оценка точная, и знак равенства в ней имеет место для функций $F(\xi) = \xi + e^{i\alpha}/\xi + \text{const} \in \sum$ при соответствующем выборе постоянной α, $0 \le \alpha < 2\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск : ТГУ, 2001. 220 с.
2. *Голузин Г.М.* О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций // Матем. сб. 1948. 23 (65):3. С. 353–360.
3. *Базилевич И.Е.* О теоремах искажения в теории однолистных функций // Матем. сб. 1951. 28(70):2. С. 283–293.
4. *Лебедев Н.А.* Некоторые оценки и задачи на экстремум в теории конформного отображения: Автореф. ... дис. канд. ф.-м. наук / Ленинградский ун-т. Л., 1951.
5. *Голузин Г.М.* О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций // Матем. сб. 1946. 19 (61). С. 183–202.

Статья представлена лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакционную коллегию «Математика» 5 июля 2003 г.