УДК 514.752

О.В. Васильева

НЕГОЛОНОМНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ НУЛЕВОЙ ПОЛНОЙ КРИВИЗНЫ 2-ГО РОДА

Доказана теорема существования неголономной поверхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода. Построен пример неголономной поверхности такого вида.

Неголономную поверхность [1] мы рассматриваем как совокупность всех интегральных кривых не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0, \quad (0.1)$$

где P,Q,R – гладкие функции в некоторой области G трехмерного евклидова пространства, при этом $P^2+Q^2+R^2\neq 0$, $\forall M\in G$. Интегральные кривые уравнения (0.1), проходящие через точку *M*, касаются в этой точке одной плоскости, называемой касательной плоскостью неголономной поверхности в точке *M*. Прямая, проходящая через точку *M* перпендикулярно касательной плоскости, называется нормалью неголономной поверхности в точке *M*. Неголономной поверхностью вращения называют [2] такую неголономную поверхность, все нормали которой пересекают неподвижную прямую (ось вращения). Если неголономная поверхность является неголономной поверхностью вращения, то через каждую точку $M\in G$ проходят две линии кривизны 2-го рода. Вдоль одной из них нормали к неголономной поверхности образуют конус с вершиной на оси вращения, и эта линия называется параллелью. Вторая линия кривизны 2-го рода лежит в плоскости, проходящей через ось вращения, и называется меридианом. В данной работе мы рассматриваем неголономные поверхности вращения, для которых полная кривизна 2-го рода [3] равна нулю.

1. Теорема существования

Выберем декартов подвижной репер $\{M;\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$, где $\overline{e}_3$ – единичный вектор нормали. Деривационные формулы репера имеют вид

$$d\overline{r}=\omega^i\overline{e}_i,$$
$$d\overline{e}_i=\omega_i^j\overline{e}_j,$$

где $\omega_i^j=-\omega_j^i$, $\overline{r}$ – радиус-вектор точки M, $i,j=1,2,3$. Формы Пфаффа ω_3^i,ω^i – главные формы, из них ω^i – базисные. Поэтому

$$\omega_3^i=A_j^i\omega^j. \quad (1.1)$$

Неголономная поверхность определяется уравнением Пфаффа

$$\omega^3=0. \quad (1.2)$$

Направив вектор $\overline{e}_1$ по касательной к параллели, мы приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\omega^2&=0,\\ \omega^3&=0,\end{aligned} \quad (1.3)$$

определяющим параллели. При этом $A_1^2=0$, $A_2^1=\rho$, $A_1^1=-k_1$, $A_2^2=-k_2$, где ρ – скаляр неголономности, k_1, k_2 – главные кривизны 2-го рода. Кроме того, обозначим $A_3^1=a$, $A_3^2=b$. После этого формулы (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned}\omega_3^1&=-k_1\omega^1+\rho\omega^2+a\omega^3,\\ \omega_3^2&=-k_2\omega^2+b\omega^3.\end{aligned} \quad (1.4)$$

Обозначим через F вершину конуса, описываемого нормалями неголономной поверхности вдоль параллели. Тогда для радиус-вектора точки F имеем

$$\overline{F}=\overline{r}+\frac{1}{k}\overline{e}_3,$$

где $k_1\neq 0$. Так как вдоль параллели точка F неподвижна, то dk_1 зависит только от ω^2, ω^3, то есть

$$dk_1=\alpha\omega^2+\beta\omega^3. \quad (1.5)$$

В выбранном репере меридианы определяются уравнениями

$$\begin{aligned}(k_1-k_2)\omega^1-\rho\omega^2&=0,\\ \omega^3&=0.\end{aligned} \quad (1.6)$$

Направляющий вектор оси вращения относительно выбранного репера есть вектор

$$\overline{p}=\rho\overline{e}_1+(k_1-k_2)\overline{e}_2-\frac{\alpha}{k_1}\overline{e}_3. \quad (1.7)$$

Так как $\overline{p}$ – направляющий вектор оси вращения, то для него $d\overline{p}\,||\,\overline{p}$. Это условие выполняется лишь тогда, когда

$$a=\frac{b\rho}{k_1-k_2},\quad \beta=\frac{\alpha b}{k_1-k_2}+k_1{}^2. \quad (1.8)$$

После соответствующих вычислений мы приходим к следующим выражениям форм Пфаффа через базисные формы:

$$\omega_3^1=-k_1\omega^1+\rho\omega^2+\frac{b\rho}{k_1-k_2}\omega^3,$$
$$\omega_3^2=-k_2\omega^2+b\omega^3,$$
$$\omega_2^1=\frac{1}{k_1-k_2}\left(\alpha_{11}\omega^1+\alpha_{12}\omega^2+\alpha_{13}\omega^3\right),$$
$$dk_1=\alpha\omega^2+\left(\frac{\alpha b}{k_1-k_2}+k_1{}^2\right)\omega^3,$$
$$dk_2=-\left(\frac{\rho\alpha_{11}}{k_1-k_2}+\rho b+\alpha_{12}\right)\omega^1-\left(\frac{\rho\alpha_{12}}{k_1-k_2}+\alpha_{22}\right)\omega^2+$$
$$+\left(b^2+k_2{}^2-\frac{\rho\alpha_{13}}{k_1-k_2}-\alpha_{23}\right)\omega^3,$$
$$db=\left(\frac{\rho b^2}{k_1-k_2}+\frac{\rho b\alpha_{11}}{(k_1-k_2)^2}+\alpha_{13}\right)\omega^1+$$
$$+\left(\frac{\rho b\alpha_{12}}{(k_1-k_2)^2}+\alpha_{23}\right)\omega^2+\left(\frac{\rho b\alpha_{13}}{(k_1-k_2)^2}+\alpha_{33}\right)\omega^3,$$

$$d\rho=\left[\frac{\rho}{k_1-k_1}\left(\alpha_{12}+b\rho\right)-\left(\alpha_{11}+\alpha\right)\right]\omega^1+$$
$$+\left[\frac{\rho}{k_1-k_1}\left(\alpha_{22}+\alpha+\alpha\frac{k_2}{k_1}\right)-\left(\alpha_{12}-\frac{\alpha\rho}{k_1}\right)\right]\omega^2+$$
$$+\left[\frac{\rho}{k_1-k_1}\left(\alpha_{23}-b^2-k_2{}^2+\frac{\alpha b}{k_1-k_2}+k_1{}^2-\frac{\alpha b}{k_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\alpha_{13}-\frac{\alpha b\rho}{k_1\left(k_1-k_2\right)}\right)\right]\omega^3,$$
$$d\alpha=\left[\frac{\alpha}{k_1-k_2}\left(\alpha_{21}+b\rho\right)+k_1{}^2\rho\right]\omega^1+$$
$$+\left[\frac{\alpha}{k_1-k_2}\left(\alpha_{22}+\alpha+\alpha\frac{k_2}{k_1}\right)-k_1\rho^2+k_1k_2\left(k_1-k_2\right)+\frac{\alpha^2}{k_1}\right]\omega^2+$$
$$+\left[\frac{\alpha}{k_1-k_2}\left(\alpha_{23}-b^2-k_2{}^2+\frac{\alpha b}{k_1-k_2}+k_1{}^2-\frac{\alpha b}{k_1}\right)-\frac{k_1\rho^2 b}{k_1-k_2}-\right.$$
$$\left.-k_1\left(k_1-k_2\right)b+\frac{\alpha^2 b}{k_1\left(k_1-k_2\right)}+\alpha k_1\right]\omega^3. \qquad (1.9)$$

Полная кривизна 2-го рода $K=k_1k_2$. Так как $k_1\neq 0$, то $K=0$ лишь при $k_2=0$. При этом условии из (1.9) находим

$$\omega_3^1=-k_1\omega^1+\rho\omega^2+\frac{b\rho}{k_1}\omega^3,$$
$$\omega_3^2=b\omega^3,$$
$$\omega_2^1=\frac{1}{k_1}\left(\alpha_{11}\omega^1-\rho\left(\frac{\alpha_{11}}{k_1}+b\right)\omega^2+\alpha_{13}\omega^3\right),$$
$$dk=\alpha\omega^2+\left(\frac{\alpha b}{k_1}+k_1{}^2\right)\omega^3,$$
$$db=\left(\frac{b^2\rho}{k_1}+\frac{\rho b\alpha_{11}}{k_1}+\alpha_{13}\right)\omega^1+$$
$$+\left(-\frac{\rho^2 b\alpha_{11}}{k_1{}^3}-\frac{\rho^2 b^2}{k_1{}^2}+b^2-\frac{\rho\alpha_{13}}{k_1}\right)\omega^2+\left(\frac{\rho b\alpha_{13}}{k_1{}^2}+\alpha_{33}\right)\omega^3,$$
$$d\rho=\left(-\frac{\rho^2\alpha_{11}}{k_1{}^2}-\alpha_{11}-\alpha\right)\omega^1+$$
$$+\left(\frac{\rho^3\alpha_{11}}{k_1{}^3}+\frac{\rho^3 b}{k_1{}^2}+\frac{2\alpha\rho}{k_1}+\frac{\alpha_{11}\rho}{k_1}+b\rho\right)\omega^2+$$
$$+\left(-\frac{\rho^2\alpha_{13}}{k_1{}^2}+\rho k_1-\alpha_{13}+\frac{\alpha\rho b}{k_1{}^2}\right)\omega^3,$$
$$d\alpha=\left(-\frac{\alpha\alpha_{11}\rho}{k_1{}^2}+k_1{}^2\rho\right)\omega^1+$$
$$+\left(\frac{\alpha\alpha_{11}\rho^2}{k_1{}^3}+\frac{\alpha\rho^2 b}{k_1{}^2}+\frac{2\alpha^2}{k_1}-k_1\rho^2\right)\omega^2+$$
$$+\left(2\alpha k_1-\frac{\alpha\alpha_{13}\rho}{k_1{}^2}-\rho^2 b-k_1{}^2\rho+\frac{\alpha^2 b}{k_1{}^2}\right)\omega^3. \qquad (1.10)$$

Теорема 1. *С произволом одной функции двух аргументов существуют неголономные поверхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода.*

Доказательство. Будем вести доказательство теоремы методом Кэлера, используя обозначения, принятые в [4]. Следуя методу Кэлера, замыкаем равенства (1.10). В результате получим систему внешних дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{1}{k_1}d\alpha_{11}\wedge\omega^1-\frac{\rho}{k_1{}^2}d\alpha_{11}\wedge\omega^2+\frac{1}{k_1}d\alpha_{13}\wedge\omega^3+$$
$$+A_1\omega^1\wedge\omega^2+B_1\omega^2\wedge\omega^3+C_1\omega^3\wedge\omega^1=0,$$
$$\frac{\rho b}{k_1{}^2}d\alpha_{11}\wedge\omega^1+d\alpha_{13}\wedge\omega^1-\frac{\rho^2 b}{k_1{}^3}d\alpha_{11}\wedge\omega^2-$$
$$-\frac{\rho}{k_1}d\alpha_{13}\wedge\omega^2+\frac{\rho b}{k_1{}^2}d\alpha_{13}\wedge\omega^3+d\alpha_{33}\wedge\omega^3+$$
$$+A_2\omega^1\wedge\omega^2+B_2\omega^2\wedge\omega^3+C_2\omega^3\wedge\omega^1=0,$$
$$-\frac{\rho^2}{k_1{}^2}d\alpha_{11}\wedge\omega^1-d\alpha_{11}\wedge\omega^1+\frac{\rho^3}{k_1{}^3}d\alpha_{11}\wedge\omega^2+$$
$$+\frac{\rho}{k_1}d\alpha_{11}\wedge\omega^2-\frac{\rho^2}{k_1{}^2}d\alpha_{13}\wedge\omega^3-d\alpha_{13}\wedge\omega^3+ \qquad (1.11)$$
$$+A_3\omega^1\wedge\omega^2+B_3\omega^2\wedge\omega^3+C_3\omega^3\wedge\omega^1=0,$$

где

$$A_1=\frac{2\alpha\alpha_{11}}{k_1{}^2}+\frac{\alpha_{11}b}{k_1}+\frac{\alpha b}{k_1}-\frac{2\rho^2 b^2}{k_1{}^2}-\frac{2\alpha_{13}\rho}{k_1},$$
$$B_1=-\frac{2\alpha_{11}\rho}{k_1}-b\rho-\frac{2b\alpha_{13}}{k_1}+\frac{\rho\alpha_{33}}{k_1}-\frac{\alpha\alpha_{11}\rho b}{k_1{}^4}-\frac{\alpha\alpha_{13}}{k_1{}^2},$$
$$C_1=-2\alpha_{11}-\frac{\alpha\alpha_{11}b}{k_1{}^3}-\frac{\rho\alpha_{11}\alpha_{13}}{k_1{}^3}-bk_1,$$
$$A_2=-\frac{2\rho^3 b^3}{k_1{}^3}+\frac{\alpha\rho b^2}{k_1{}^2}+\frac{\rho b^2\alpha_{11}}{k_1{}^2}+\frac{2\alpha\alpha_{11}\rho b}{k_1{}^3}-\frac{2\rho^3 b^2\alpha_{11}}{k_1{}^4}+$$
$$+2b\alpha_{13}+\frac{\alpha\alpha_{13}}{k_1}-\frac{2\rho^2 b\alpha_{13}}{k_1{}^2}-\rho\alpha_{33}, \qquad (1.12)$$
$$A_3=-k_1\left(\frac{\rho^2}{k_1{}^2}+1\right)\left(\frac{2\alpha\alpha_{11}}{k_1{}^2}+\frac{\alpha_{11}b}{k_1}+\frac{\alpha b}{k_1}-\frac{2\rho^2 b^2}{k_1{}^2}-\frac{2\alpha_{13}\rho}{k_1}\right),$$
$$B_3=-k_1\left(\frac{\rho^2}{k_1{}^2}+1\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{2\alpha_{11}\rho}{k_1}-b\rho-\frac{2b\alpha_{13}}{k_1}+\frac{\rho\alpha_{33}}{k_1}-\frac{\alpha\alpha_{11}\rho b}{k_1{}^4}-\frac{\alpha\alpha_{13}}{k_1{}^2}\right),$$
$$C_3=-k_1\left(\frac{\rho^2}{k_1{}^2}+1\right)\left(-2\alpha_{11}-\frac{\alpha\alpha_{11}b}{k_1{}^3}-\frac{\rho\alpha_{11}\alpha_{13}}{k_1{}^3}-bk_1\right).$$

Пусть

$$d\alpha_{11}=\gamma_1\omega^1+\gamma_2\omega^2+\gamma_3\omega^3,$$
$$d\alpha_{13}=\lambda_1\omega^1+\lambda_2\omega^2+\lambda_3\omega^3, \qquad (1.13)$$
$$d\alpha_{33}=\mu_1\omega^1+\mu_2\omega^2+\mu_3\omega^3.$$

Строим цепь интегральных элементов $E_1\subset E_2\subset E_3$. Для E_1 полагаем $\omega^1=\omega^2=0$. Величины γ_3,λ_3,μ_3 являются независимыми параметрами, т.е. характеристическое число $r_1=3$. Для E_2 полагаем $\omega^2=0$. Получаем следующие соотношения:

$$\lambda_1=\gamma_3+kC_1,$$
$$\mu_1=\lambda_3-\frac{\rho b}{k_1}C_1+C_2, \qquad (1.14)$$
$$k_1\left(\frac{\rho^2}{k_1{}^2}+1\right)C_1+C_3=0,$$

последнее из которых в силу (1.12) представляет собой тождество. Поэтому характеристическое число $r_2 = 1$, а характер цепи $s_1 = r_1 - r_2 = 2$. Подставляя (1.13) в (1.1), находим

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -\frac{\rho}{k_1}\gamma_1 + k_1 A_1,\\ \lambda_2 &= -\frac{\rho}{k_1}\gamma_3 - k_1 B_1,\\ \mu_2 &= -\frac{\rho}{k_1}\lambda_3 + \frac{\rho b}{k_1}B_1 - B_2.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Кроме того, возникают соотношения

$$\begin{aligned}&k_1\left(\frac{\rho^2}{k_1{}^2}+1\right)A_1 + A_3 = 0,\\ &k_1\left(\frac{\rho^2}{k_1{}^2}+1\right)B_1 + B_3 = 0,\\ &-\frac{\rho b}{k_1}A_1 + k_1 B_1 - \rho C_1 + A_2 = 0,\end{aligned}$$

являющиеся тождествами в силу (1.12). Из (1.14), (1.15) следует, что построенная нами цепь интегральных элементов не особая, характеристическое число $r_3 = 0$, характер $s_2 = r_2 - r_3 = 1$. Так как сумма характеров цепи $s_1 + s_2 + s_3$ равна числу неизвестных функций $\alpha_{11}, \alpha_{13}, \alpha_{33}$ системы, т.е. $s_1 + s_2 + s_3 = 3$, то $s_3 = 0$. Достаточный признак Кэлера выполнен. Решение системы существует. А так как $s_2 = 1, s_3 = 0$, то это решение имеет произвол в одну функцию двух аргументов. Тем самым доказано существование неголономной поверхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода. Широта класса таких неголономных поверхностей – одна функция двух аргументов.

2. Неголономные поверхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода, для которых оба семейства асимптотических являются прямыми линиями

Теорема 2. *Существуют неголономные поверхности вращения нулевой полной кривизны 2-го рода, для которых оба семейства асимптотических являются прямыми линиями.*

Доказательство. Асимптотические линии неголономной поверхности вращения данного класса определяются уравнениями

$$\begin{aligned}-k_1\left(\omega^1\right)^2 + \rho\omega^1\omega^2 &= 0,\\ \omega^3 &= 0.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Как видим, система (2.1) определяет два семейства линий:

$$\begin{aligned}\omega^1 &= 0,\\ \omega^3 &= 0\end{aligned} \tag{2.2}$$

и

$$\begin{aligned}\rho\omega^2 - k_1\omega^1 &= 0,\\ \omega^3 &= 0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Касательные линии к семейству асимптотических (2.2) параллельны векторам $\overline{e}_2$. Поскольку

$$d\,\overline{e}_2\big|_{\omega^1=\omega^3=0} = -\frac{\rho}{k_1}\left(b + \frac{\alpha_{11}}{k_1}\right)\overline{e}_1,$$

вектор $\overline{e}_2 \,||\, d\overline{e}_2$ лишь тогда, когда

$$\alpha_{11} = -bk_1. \tag{2.4}$$

Касательный вектор к линии второго семейства (2.3) есть

$$d\overline{r} = \omega^1\left(\overline{e}_1 + \frac{k_1}{\rho}\overline{e}_2\right) \,||\, \rho\overline{e}_1 + k_1\overline{e}_2.$$

Асимптотическая линия семейства (2.3) будет прямой линией, если

$$d^2\,\overline{r}\Big|_{\substack{\omega^1=\frac{\rho}{k}\omega^2\\ \omega^3=0}} \,||\, d\overline{r},$$

то есть если

$$\frac{d\rho + k_1\omega_2^1}{\rho} = \frac{\rho\omega_1^2 + dk_1}{k_1}.$$

А последнее равенство выполняется при

$$\alpha_{11} = bk_1. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует

$$\alpha_{11} = 0. \tag{2.6}$$

Итак, для исследуемой здесь поверхности вращения $k_2 = \alpha_{11} = 0$. Кроме того, при $k_2 = \alpha_{11} = 0$ из (1.9) имеем

$$\begin{aligned}\alpha_{12} &= -b\rho,\\ \alpha_{22} &= \frac{b\rho^2}{k_1},\\ \alpha_{23} &= b^2 - \frac{\rho\alpha_{13}}{k_1}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Тогда из (1.10) имеем

$$k_1\omega_2^1 + b\rho\omega^2 - \alpha_{13}\omega^3 = 0. \tag{2.8}$$

Внешнее дифференцирование (2.8) приводит нас к следующему выражению:

$$\left[d\alpha_{13} + \left(\rho\alpha_{33} - b\rho k_1 - \frac{\alpha\alpha_{13}}{k_1}\right)\omega^2 + bk_1{}^2\omega^1\right]\wedge\omega^3 + {}$$
$$+ b\left(\alpha - \frac{2b\rho^2}{k_1}\right)\omega^1\wedge\omega^2 = 0.$$

Отсюда следует

$$b\left(2k_1{}^2 + \frac{\alpha^2}{\rho^2}\right) = 0,$$

т.е. возникают три возможности:

$$1)\ b = 0,\quad 2)\ 2k_1{}^2 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} = 0,\quad 3)\ b = 0, \alpha = 0.$$

Случаи 2), 3) не имеют места, так как приводят к равенствам $2k_1{}^2 = -\frac{\alpha^2}{\rho^2}$, $k = 0$. То и другое невозможно.

Переходим к рассмотрению первого случая: $b = 0$. Тогда из (1.10) и (2.7) следует

$$\alpha_{13} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0,$$

а равенства (1.10) примут вид

$$\begin{aligned}
&\omega_3^1 = -k_1\omega^1 + \rho\omega^2,\\
&\omega_3^2 = 0,\\
&\omega_2^1 = 0,\\
&dk = \alpha\omega^2 + k_1{}^2\omega^3,\\
&d\rho = -\alpha\omega^1 + \frac{2\alpha\rho}{k_1}\omega^2 + \rho k_1\omega^3,\\
&d\alpha = k_1{}^2\rho\omega^1 + \left(\frac{2\alpha^2}{k_1} - k_1\rho^2\right)\omega^2 + 2\alpha k_1\omega^3.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Нетрудно убедиться, что система дифференциальных уравнений (2.9) вполне интегрируема. Следовательно, рассматриваемый класс неголономных поверхностей вращения существует с параметрическим произволом.

Неголономные поверхности исследуемого класса, существование которых мы только что доказали, обладают следующими свойствами.

Одна из асимптотических совпадает с меридианом, а вторая ортогональна параллели. Действительно, из условия

$$\left(d^2\overline{r}, \overline{e}_1, \overline{e}_2\right) = 0$$

находим уравнения асимптотических

$$\begin{gathered}
k_1\left(\omega^1\right)^2 - \rho\omega^1\omega^2 + k_2\left(\omega^2\right)^2 = 0,\\
\omega^3 = 0.
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Из (2.10) видим, что при $k_2 = 0$ одна из асимптотических

$$\begin{gathered}
\omega^1 = \frac{\rho}{k_1}\omega^2,\\
\omega^3 = 0
\end{gathered} \tag{2.11}$$

совпадает с меридианом, а вторая

$$\omega^1 = \omega^3 = 0 \tag{2.12}$$

ортогональна параллели.

Линии тока нормалей $\overline{e}_3$ неголономной поверхности вращения – прямые линии. Действительно, в силу (2.9) $d\overline{e}_3 = \vec{0}$, вдоль линий тока $\omega^1 = \omega^2 = 0$. Следовательно, последние – прямые линии.

Векторное поле нормалей неголономной поверхности имеет эквидирекционные поверхности (поверхности, вдоль которых векторы поля параллельны [3]). Эти поверхности являются интегральными поверхностями вполне интегрируемого уравнения Пфаффа

$$k_1\omega^1 - \rho\omega^2 = 0. \tag{2.13}$$

Касательная плоскость $k_1\omega^1 - \rho\omega^2 = 0$ к эквидирекционной поверхности не меняется вдоль нее. Следовательно, эквидирекционные поверхности являются плоскостями. Линии тока лежат на этих плоскостях.

Зададимся целью найти уравнение неголономной поверхности вращения рассматриваемого класса в неподвижной системе координат. Так как $D\omega^2 = 0$ и $D\left(k_1\omega^1 - \rho\omega^2\right) = 0$, то это позволяет ввести параметры u и v следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\omega^2 = du,\\
&k_1\omega^1 - \rho\omega^2 = dv.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.9) следует

$$\begin{aligned}
&\omega^1 = \frac{dv + \rho\cdot du}{k_1},\\
&\omega^3 = \frac{dk_1 - \alpha\cdot du}{k_1{}^2},\\
&d\rho = -\frac{\alpha}{k_1}dv + \frac{\rho}{k_1}dk_1,\\
&d\alpha = \rho k_1 dv + \frac{2\alpha}{k_1}dk_1.
\end{aligned}$$

Проинтегрировав последние два уравнения, получим

$$\begin{aligned}
&\rho = k_1\left(c_1\cos v + c_2\sin v\right),\\
&\alpha = -k_1{}^2\left(-c_1\sin v + c_2\cos v\right),\\
&\omega^1 = \frac{1}{k_1}dv + \left(c_1\cos v + c_2\sin v\right)du,\\
&\omega^2 = du,\\
&\omega^3 = \frac{1}{k_1{}^2}dk_1 + \left(-c_1\sin v + c_2\cos v\right)du.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Деривационные формулы подвижного репера примут теперь вид:

$$\begin{gathered}
d\overline{r} = \left[\frac{1}{k_1}dv + \left(c_1\cos v + c_2\sin v\right)du\right]\overline{e}_1 + du\cdot\overline{e}_2 +\\
+\left[\frac{dk_1}{k_1{}^2} + \left(-c_1\sin v + c_2\cos v\right)du\right]\overline{e}_3,\\
d\overline{e}_1 = dv\cdot\overline{e}_3,\\
d\overline{e}_2 = \overline{0},\\
d\overline{e}_3 = -dv\cdot\overline{e}_1.
\end{gathered}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
&\overline{e}_1 = \overline{\varepsilon}_1\cos v + \overline{\varepsilon}_3\sin v,\\
&\overline{e}_2 = \overline{\varepsilon}_2,\\
&\overline{e}_3 = -\overline{\varepsilon}_1\sin v + \overline{\varepsilon}_3\cos v,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2, \overline{\varepsilon}_3$ – постоянные единичные взаимно перпендикулярные векторы. Примем их за базис неподвижной декартовой системы координат. Относительно нее

$$\begin{gathered}
d\overline{r} = \left(c_1\overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_2 + c_2\overline{\varepsilon}_3\right)du +\\
+\frac{1}{k_1}\left(\overline{\varepsilon}_1\cos v + \overline{\varepsilon}_3\sin v\right)dv + \frac{1}{k_1{}^2}dk_1\overline{\varepsilon}_3.
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Интегрируем уравнение (2.16):

$$\frac{\partial\overline{r}}{\partial v} = \frac{1}{k_1}\left(\overline{\varepsilon}_1\cos v + \overline{\varepsilon}_3\sin v\right),$$

следовательно,

$$\overline{r} = \frac{1}{k_1}\left(\overline{\varepsilon}_1\sin v - \overline{\varepsilon}_3\cos v\right) + \overline{f}\left(u, k_1\right). \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) следует

$$\frac{\partial\overline{f}}{\partial k_1} = \overline{0},$$

т.е. $\overline{f}$ является функцией только от u.

$$\frac{d\overline{f}}{du} = c_1\overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_2 + c_2\overline{\varepsilon}_3,$$

отсюда

$$\overline{f} = \left(c_1\overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_2 + c_2\overline{\varepsilon}_3\right)u + \overline{r}_0.$$

Помещая начало неподвижной декартовой системы координат в точку $M_0\left(\overline{r}_0\right)$, мы получаем выражение для радиус-вектора точки $M\left(\overline{r}\right) \in G$:

$$\overline{r} = \frac{1}{k_1}\left(\overline{\varepsilon}_1 \sin v - \overline{\varepsilon}_3 \cos v\right) + c_1 u\overline{\varepsilon}_1 + c_2 u\overline{\varepsilon}_3 + u\overline{\varepsilon}_2.$$

Координаты же точки M относительно неподвижной декартовой системы выражаются через параметры u, v, k_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{k_1}\sin v + c_1 u, \\ y &= u, \\ z &= -\frac{1}{k_1}\cos v + c_2 u. \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &k_1\left(x - c_1 y\right) = \sin v, \\ &k_1\left(-z + c_2 y\right) = \cos v, \\ &k_1^2\left[\left(x - c_1 y\right)^2 + \left(z - c_2 y\right)^2\right] = 1. \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Из (2.14) и (2.19) находим в декартовых координатах уравнение Пфаффа

$$\left(c_1 y - x\right)dx + \left(c_2 y - z\right)dz = 0, \qquad (2.20)$$

определяющее неголономную поверхность вращения, для которой полная кривизна 2-го рода равна нулю и всякая параллель является геодезической прямейшей. Определяется параллель уравнениями

$$\begin{aligned} &y = c, \\ &\left(x - cc_1\right)^2 + \left(z - cc_2\right)^2 = c^2\left(c_1^2 + c_2^2\right) + c_3, \end{aligned} \qquad (2.21)$$

т.е. всякая параллель представляет собой окружность.

Меридианы определяются уравнениями

$$\begin{aligned} &k_1\omega^1 - \rho\omega^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0, \end{aligned}$$

или, учитывая введенный ранее параметр v, следующей системой:

$$\begin{aligned} &dv = 0, \\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

Отсюда следует, что $v = \text{const}$, тогда из (2.16) получим уравнение

$$x - c_1 y = m_1\left(-z + c_2 y\right),$$

где m_1 – константа, $m_1 = \operatorname{tg} v$.

Из (2.18) получим

$$\frac{dz}{dx} = m_1,$$

откуда имеем

$$z = m_1 x + m_2,$$

где m_2 – постоянная интегрирования. Таким образом, меридианы определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} &m_1 x - z + m_2 = 0, \\ &x - \left(c_1 + c_2 m_1\right)y + m_1 z = 0, \end{aligned} \qquad (2.23)$$

т.е. меридианы – прямые линии.

Функция

$$\rho = \frac{c_2 x - c_1 z}{\left(x - c_1 y\right)^2 + \left(-z + c_2 y\right)^2}$$

для (2.20) является скаляром неголономности. Нетрудно показать, используя (2.14), (2.15), (2.19), что ось вращения

$$\begin{aligned} x &= c_1 y, \\ z &= c_2 y \end{aligned}$$

совпадает с особой прямой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роговой М.Р.* К дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности // Укр. геом. сб. 1970. Вып. 7. С. 98–108.
2. *Синцов Д.М.* Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972.
3. *Слухаев В.В.* Геометрия векторных полей. Томск, 1982.
4. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. С.432.

Статья представлена кафедрой геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 12 мая 2003 г.