УДК 515.12

*Л.В. Гензе, Т.Е. Хмылева*

# УДВОЕНИЕ ПО АЛЕКСАНДРОВУ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ

В работе рассматривается обобщение одной операции над топологическими пространствами, введенной Александровым и Урысоном. Рассматриваются свойства пространств, полученных таким образом, и пространств непрерывных функций на этих пространствах.

**Обозначения и соглашения.** В статье использованы терминология и обозначения из [2]. В частности, символами $c(X)$, $d(X)$, $w(X)$, $\chi(X)$, $\psi(X)$, $t(X)$ и $|X|$ обозначаем соответственно число Суслина, плотность, вес, характер, псевдохарактер, тесноту и мощность пространства *X*. Компактами называем компактные хаусдорфовы пространства.

**Определение.** Пусть $X$ – произвольное $T_1$-пространство и $n \in N$. Символом $X \otimes n$ будем обозначать множество $X \times \{0,\ 1,\ldots,n-1\}$, снабженное следующей топологией: объявим базой одноточечные множества вида $\{(x,k)\}$ для каждого $x \in X$ и $k = 1,\ 2,\ldots,n-1$ и множества вида $(U \times \{0,\ 1,\ldots,n-1\} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(x,k)\}$ для каждого $x \in X$ и каждого открытого в $X$ множества *U*, такого, что $x \in U$.

Из определения сразу следует, что пространства $X \otimes 1$ и $X$ гомеоморфны и что подпространство $X \times \{0\}$ пространства $X \otimes n$ гомеоморфно пространству $X$. Если $X$ – окружность и $n = 2$, то получим известный пример «Двойная окружность Александрова» [1]. Кроме того, несложно увидеть, что $(X \otimes m) \otimes n = X \otimes mn$.

Отметим простейшие соотношения между пространствами $X$ и $X \otimes n$.

**Теорема 1.** *Пусть $X$ – бесконечное $T_1$-пространство. Тогда* $c(X \otimes n) = d(X \otimes n) = |X|$, $w(X \otimes n) = \max\{|X|, w(X)\}$ (*в частности, если $X$ – компакт, то* $w(X \otimes n) = |X|$), $\chi(X \otimes n) = \chi(X)$, $\psi(X \otimes n) = \psi(X)$ *для любого* $n \in N$.

**Теорема 2.** *Пусть $n \in N$. Пространство X является компактом тогда и только тогда, когда пространство $X \otimes n$ является компактом.*

Оказывается, что мощность пространства *X* существенным образом сказывается на свойствах пространств $X \otimes n$: если *X* – счетный компакт, то при $m \neq n$ пространства $X \otimes m$ и $X \otimes n$ гомеоморфны, а если *X* – несчетный метрический компакт, то эти пространства не гомеоморфны.

**Теорема 3.** *Если X – несчетный метрический компакт, $m,n \in N$ и $m \neq n$, то пространства $X \otimes m$ и $X \otimes n$ не гомеоморфны.*

***Доказательство.*** Если $X$ – несчетный метрический компакт, то по теореме Кантора – Бендиксона [2. С. 102] *X* можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств: $X = Y \bigcup Z$, где $Y$ – несчетное совершенное (замкнутое и плотное в себе) множество, а $Z$ – не более чем счетное. Предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi : X \otimes m \to X \otimes n$ и пусть $m > n$. Тогда точки $(x,0) \in Y \times \{0\} \subset Y \otimes m$ при этом гомеоморфизме будут переходить в точки вида $(x',0) \in Y \times \{0\} \subset Y \otimes n$. Зафиксируем метрику $\rho$ на пространстве $X$. Пусть $\pi$ – отображение из $X \otimes n$ на свое подпространство $X \times \{0\}$, которое мы отождествляем с $X$, $\pi(x,k) = (x,0)$, для всех $k = 0,\ldots,n-1$. Очевидно, что $\pi$ – непрерывная ретракция. Докажем, что для любого $p \in N$ множество $A_p = \{(x,k) \in Y \otimes m : \rho(\varphi(x,0), \pi\varphi(x,k)) \geq 1/p\}$ конечно. Предположим, что $|A_p| \geq \aleph_0$. Пусть $(\tilde{x},0)$ – точка полного накопления множества $A_p$. Заметим, что $(\tilde{x},0) \in Y \otimes m$, так как $Y$ замкнуто в $X$. Выберем последовательность $\{(x_i,k_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset A_p$, сходящуюся к точке $(\tilde{x},0)$. Тогда последовательность $\{(x_i,0)\}_{i=1}^{\infty}$ тоже сходится к точке $(\tilde{x},0)$. В силу непрерывности отображения $\varphi$, $\varphi(x_i,0) \to \varphi(\tilde{x},0)$ и $\varphi(x_i,k_i) \to \varphi(\tilde{x},0)$, а в силу непрерывности $\pi$, $\pi\varphi(x_i,k_i) \to \pi\varphi(\tilde{x},0) = \varphi(\tilde{x},0)$ (последнее равенство следует из того, что $(\tilde{x},0) \in Y \times \{0\} \subset Y \otimes m$, и из того, что $\pi(x,0) = (x,0)$). Теперь для всех натуральных $i$ имеем $\frac{1}{p} \leq \rho(\varphi(x_i,0), \pi\varphi(x_i,k_i)) \leq \rho(\varphi(x_i,0), \varphi(\tilde{x},0)) + \rho(\varphi(\tilde{x},0), \pi\varphi(x_i,k_i))$, чего быть не может, так как оба слагаемых в правой части неравенства стремятся к нулю при $i \to \infty$. Таким образом, все множества $A_p$ конечны, следовательно, множество $A = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p = \{(x,k) \in Y \otimes m : \varphi(x,0) \neq \pi\varphi(x,k)\}$ не более чем счетно, а в силу счетности множества $Z$ и несчетности компакта $X$, окончательно получаем, что существует такой $\hat{x} \in Y$, что при всех $k \in \{1,\ldots,m-1\}$ $\pi\varphi(\hat{x},k) = \varphi(\hat{x},0)$, т.е. для каждого $k \in \{0,\ldots,m-1\}$ $\varphi(\hat{x},k) = (\hat{y},l)$, где $l \in \{0,\ldots,n-1\}$ для некоторого $\hat{y} \in Y$, что противоречит тому, что $m > n$ и что $\varphi$ – биекция. Теорема доказана.

**Замечание 1.** На самом деле мы доказали немного больше, чем утверждается в теореме, а именно, что при $m > n$ пространство $X \otimes m$ нельзя уплотнить на $X \otimes n$.

**Замечание 2.** Теорема 3 не верна для произвольных несчетных компактов – например, если $\alpha X$ – александровская компактификация несчетного дискретного пространства $X$, то пространства $\alpha X \otimes m$ и $\alpha X \otimes n$ гомеоморфны при любых натуральных $m$ и $n$.

**Теорема 4.** *Если $X$ – счетный бесконечный компакт, $m, n \in N$ и $m \neq n$, то пространства $X \otimes m$ и $X \otimes n$ гомеоморфны.*

***Доказательство.*** По теореме Мазуркевича – Серпинского [3], любой счетный компакт гомеоморфен отрезку ординалов $\left[0, \omega^{\alpha} \cdot n\right]$, где $\alpha$ – последний ординал со свойством, что производное множество $X^{(\alpha)}$ не пусто, а натуральное число $n$ – мощность множества $X^{(\alpha)}$. Таким образом, пара $(\alpha, n)$ полностью характеризует топологический тип счетного компакта. Осталось заметить, что если $X$ имеет тип $(\alpha, n)$, то и $X \otimes n$ имеет этот же тип. Теорема доказана.

Перейдем теперь к изучению пространств $C(X \otimes n)$ непрерывных функций на компактах вида $X \otimes n$. Оказывается, эти пространства имеют довольно простую структуру – они линейно гомеоморфны пространству $C(X) \times c_0(X)$, где $c_0(X) = \left\{g : X \to R : \forall \varepsilon > 0 \ \left|\left\{x \in X \mid \left|g(x)\right| \geq \varepsilon\right\}\right| < \aleph_0\right\}$. Сначала докажем техническую лемму.

**Лемма.** *Пусть $X$ – компакт. Функция $f : X \otimes n \to R$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f\big|_{X \times \{0\}}$ непрерывна и $f(\cdot, 0) - f(\cdot, k) \in c_0(X)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$.*

***Доказательство.*** Пусть функция $f : X \otimes n \to R$ непрерывна. Ясно, что $f\big|_{X \times \{0\}}$ непрерывна. Предположим теперь, что существует такое $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ и $\varepsilon > 0$, что множество $A = \{x \in X : \left|f(x,0) - f(x,k)\right| \geq \varepsilon\}$ бесконечно. Пусть $x^*$ – точка полного накопления множества $A$. Рассмотрим $U = U(f(x^*, 0), \varepsilon/2)$, где $\varepsilon/2$ – окрестность точки $f(x^*, 0)$. Ясно, что для любой базисной окрестности $V$ точки $\left(x^*, 0\right)$ будет выполняться $f(V) \not\subset U$, что противоречит непрерывности функции $f$. Пусть теперь $f\big|_{X \times \{0\}}$ непрерывна и $f(\cdot, 0) - f(\cdot, k) \in c_0(X)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Так как точки вида $(x, k)$ при $k = 1, \ldots, n-1$ являются изолированными точками пространства $X \otimes n$, то достаточно показать непрерывность функции *f* в точках вида $(x, 0)$. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, 0)$ и произвольную $\varepsilon$-окрестность $U = U\left(f(x_0, 0), \varepsilon\right)$ точки $f(x_0, 0)$. Так как $f\big|_{X \times \{0\}}$ непрерывна, то существует такая окрестность $V$ точки $(x_0, 0)$ в пространстве $X \times \{0\}$, что $f\big|_{X \times \{0\}}(V) \subset U\left(f(x_0, 0), \varepsilon/2\right)$. Рассмотрим множества

$$B_k = \left\{x \in X : \left|f(x, 0) - f(x, k)\right| \geq \varepsilon/2\right\},$$

$k = 1, 2, \ldots, n-1$. По условию, эти множества конечны, значит конечно и множество $B = \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$. Рассмотрим теперь окрестность $\tilde{V} = (V \setminus B) \bigcup \{x_0\}$ точки $x_0$. Тогда $W = (\tilde{V} \times \{0, 1, \ldots, n-1\} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(x_0, k)\}$ – такая окрестность точки $(x_0, 0)$, что $f(W) \subset U$, так как для $(x, k) \in W$ $\quad \left|f(x_0, 0) - f(x, k)\right| \leq \left|f(x_0, 0) - f(x, 0)\right| + \left|f(x, 0) - f(x, k)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Лемма доказана.

**Теорема 5.** *Пусть $X$ – бесконечный компакт, $n = 2, 3, \ldots$. Тогда пространства $C(X \otimes n)$ и $C(X) \times c_0(X)$ линейно гомеоморфны, когда они оба наделены нормированной топологией или когда оба наделены топологией поточечной сходимости. В частности, пространства $C(X \otimes n)$ и $C(X \otimes m)$ линейно гомеоморфны ($m = 2, 3, \ldots$).*

***Доказательство.*** Достаточно доказать, что пространство $C(X \otimes n)$ линейно гомеоморфно пространству $C(X) \times \left(c_0(X)\right)^{n-1}$. Заведем отображение $H : C(X \otimes n) \to C(X) \times \left(c_0(X)\right)^{n-1}$ по правилу $H(f) = \left(f\big|_{X \times \{0\}}, f\big|_{X \times \{0\}} - f\big|_{X \times \{1\}}, \ldots, f\big|_{X \times \{0\}} - f\big|_{X \times \{n-1\}}\right)$. По предыдущей лемме отображение $H$ определено корректно. Очевидно, что отображение $H$ биективно и линейно. Обратное отображение имеет вид

$$H^{-1}(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})(x, k) = \begin{cases} \varphi(x), & k = 0, \\ \varphi(x) - \varphi_k(x), & k \neq 0. \end{cases}$$

Если на произведении $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_p$ банаховых пространств $X_i$ с нормами $\|\cdot\|_i$ рассматривать норму $\left\|(x_1, x_2, \ldots, x_p)\right\| = \max_{i=1,\ldots,p}\left\{\|x_i\|_i\right\}$, то в случае, когда пространства $C(X \otimes n)$ и $C(X) \times \left(c_0(X)\right)^{n-1}$ наделены нормированной топологией, имеем $\|H\| = \left\|H^{-1}\right\| = 2$. Докажем теперь непрерывность отображений $H$ и $H^{-1}$ в том случае, когда эти пространства наделены топологией поточечной сходимости. В силу линейности этих отображений достаточно показать их непрерывность в нуле. Пусть $U = U(0, F_0, \varepsilon_0) \times U(0, F_1, \varepsilon_1) \times \ldots \times U(0, F_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$ – стандартная окрестность нуля в пространстве $C(X) \times \left(c_0(X)\right)^{n-1}$, т.е.

$$U(0, F_0, \varepsilon_0) = \left\{f \in C(X) : \left|f(x)\right| < \varepsilon, x \in F_0\right\}$$

и $\quad U(0, F_i, \varepsilon_i) = \left\{f \in c_0(X) : \left|f(x)\right| < \varepsilon, x \in F_i\right\}$,

$i=1,\ldots,n-1$, где $F_i \subset X$ – конечные множества и $\varepsilon_i > 0$, $i=0,\ldots,n-1$. Рассмотрим множество

$$F=\left\{(x,k)\in X\otimes n : x\in\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i,\ k=0,\ldots,n-1\right\},$$

$\varepsilon=\frac{1}{2}\min\limits_{i=0,\ldots,n-1}\{\varepsilon_i\}$ и окрестность $V(0,F,\varepsilon)$ нуля в пространстве $C(X\otimes n)$. Тогда $H(V(0,F,\varepsilon))\subset U$. Таким образом, отображение $H$ непрерывно. Пусть теперь $V(0,A,\delta)$ – окрестность нуля в пространстве $C(X\otimes n)$. Рассмотрим множество

$$\tilde{A}=\{x\in X : \exists k\ \ (x,k)\in A\}$$

и окрестность

$$U=U\left(0,\tilde{A},\delta/2\right)\times U\left(0,\tilde{A},\delta/2\right)\times\ldots\times U\left(0,\tilde{A},\delta/2\right)$$

нуля в пространстве $C(X)\times\left(c_0(X)\right)^{n-1}$. Тогда $H^{-1}(U)\subset V(0,A,\delta)$ и отображение $H^{-1}$ непрерывно. Теорема доказана.

В связи с последней теоремой заметим, что если $X$ – несчетный метрический компакт и $n=2,3,\ldots$, то пространства $C(X\otimes n)$ и $C(X)$, наделенные нормированной топологией или топологией поточечной сходимости, даже не гомеоморфны. В обоих случаях пространство $C(X)$ сепарабельно, а пространство $C(X\otimes n)$ сепарабельным не является.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Александров П.С., Урысон П.С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971. 144 с.
2. *Энгелькинг Р.* Общая топология: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. – 752 с.
3. *Mazurkiewicz S., Sierpinski W.* Contribution a la topologie des ensembles denombrales// Fund. Math. 1920. T. 1. P. 17–27.



Статья представлена кафедрой теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 20 октября 2003 г.