

ПОДОБИЕ ОДНОРОДНО РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП

В работе вводится понятие подобия однородно разложимых групп и исследуется, в каких случаях почти изоморфные группы являются подобными.

Приведем основные обозначения и термины, используемые в работе.

Пусть X – множество всех последовательностей вида $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, где $v^{(i)}$ – целое неотрицательное число или символ ∞ ($i \in N$). Такие последовательности будем называть *характеристиками*.

В множестве X естественным образом вводится частичный порядок, а именно, $v \leq w$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in N$ $v^{(i)} \leq w^{(i)}$. Относительно этого частичного порядка X является полной решеткой. Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ – множество всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Если A – абелева группа без кручения, $a \in A$, то *характеристика* $\chi_A(a)$ *элемента* a *в группе* A – это такая характеристика $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, в которой каждое $v^{(i)}$ есть p_i -высота $h_{p_i}^A(a)$ элемента a в группе A (согласно определению, характеристика нулевого элемента есть последовательность $(\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$) [1. С. 129].

Напомним, что две характеристики v и w считаются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда множество $\{n \in N \mid v^{(n)} \neq w^{(n)}\}$ конечно, причем, если $v^{(n)} \neq w^{(n)}$, то $v^{(n)} \neq \infty$ и $w^{(n)} \neq \infty$.

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если характеристика элемента a абелевой группы без кручения A принадлежит типу t , то говорят, что *элемент* a *имеет тип* t (что записывается следующим образом: $t(a) = t$, или $t_A(a) = t$). Абелева группа без кручения, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип t , называется *однородной* [1. С. 130–131]. Чтобы подчеркнуть, что все ненулевые элементы однородной группы A имеют фиксированный тип t , будем говорить, что A – *однородная группа типа* t , и записывать это так: $t(A) = t$.

Множество типов будем рассматривать как частично упорядоченное множество относительно естественного отношения порядка (то есть $t_1 \leq t_2$ тогда и только тогда, когда существуют характеристики $\chi_1 \in t_1$ и $\chi_2 \in t_2$, такие, что $\chi_1 \leq \chi_2$).

Тип t будем называть p_k -*делимым* ($p_k \in \Pi$), если для всякой характеристики $v \in t$ имеем $v^{(k)} = \infty$.

Для всякого типа t обозначим через $P(t)$ следующее множество: $P(t) = \{p_k \in \Pi \mid \text{тип } t \text{ } p_k\text{-делим}\}$. Другими словами, $p_k \in P(t)$ в том и только в том случае, когда для всякой характеристики $v \in t$ имеем $v^{(k)} = \infty$.

Однородно разложимыми группами называются абелевы группы без кручения, являющиеся прямыми суммами однородных групп, то есть группы вида $A = \bigoplus_{j \in J} G_j$, где G_j – однородные группы [1, С. 211].

Собирая вместе слагаемые G_j одного и того же типа t и взяв их прямую сумму, мы получим каноническое (наименьшее однородное) разложение $A = \bigoplus_{t \in T} A_t$.

Пусть $A = \bigoplus_{t \in T} A_t$, $B = \bigoplus_{t \in T_1} B_t$ – однородно разложимые группы, где T и T_1 – некоторые множества типов, A_t и B_t – однородные компоненты типа t групп A и B соответственно. Группы A и B назовем *подобными*, если $T = T_1$ и для всякого типа $t \in T$ ранг $r(A_t)$ группы A_t равен рангу $r(B_t)$ группы B_t . Однородно разложимая группа $A = \bigoplus_{t \in T} A_t$ называется *вполне транзитивно разложимой*, если семейство групп $\{A_t\}_{t \in T}$ *вполне транзитивно*, то есть для любых двух групп A_{t_1} и A_{t_2} (t_1 может совпадать с t_2), принадлежащих этому семейству, из того, что $\chi_{A_{t_1}}(a) \leq \chi_{A_{t_2}}(b)$, где $a \in A_{t_1}$, $b \in A_{t_2}$, следует существование гомоморфизма $\eta \in \text{Hom}(A_{t_1}, A_{t_2})$, такого, что $\eta(a) = b$. Все вполне разложимые группы абелевы – группы без кручения и все прямые суммы однородных сепарабельных или однородных алгебраически компактных групп без кручения содержатся в классе вполне транзитивно разложимых групп. Абелева группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если семейство $\{A_t\}$ вполне транзитивно.

Пусть

$$A = \bigoplus_{t \in T} A_t \quad (1)$$

– однородно разложимая группа, S – ее вполне характеристическая подгруппа. Тогда

$$S = \bigoplus_{t \in T} S'_t, \quad (2)$$

где $S'_t = S \cap A_t$. Заметим, что если $A = \bigoplus_{t \in T} B_t$ – другое каноническое разложение группы A и $S = \bigoplus_{t \in T} S''_t$, где $S''_t = S \cap B_t$, то $S''_t \cong S'_t$. Действительно, так как любые два канонических разложения группы A изоморфны, то существует автоморфизм ϕ группы A , такой, что $\phi A_t = B_t$. Тогда $\phi S'_t \subset S$ и $\phi S'_t \subset B_t$, откуда $\phi S'_t \subset S \cap B_t = S''_t$. Аналогично, $\phi^{-1} S''_t \subset S'_t$ и, значит, $S''_t \subset \phi S'_t$. Следовательно, $\phi S'_t = S''_t$, то есть $S'_t \cong S''_t$. Поэтому $t(S'_t)$ – тип группы S'_t , если S'_t – однородная группа, и $r(S'_t)$ – ранг S'_t не зависят от канонического разложения группы A .

В [2] показано, что всякая вполне характеристическая подгруппа однородной вполне транзитивной группы является однородной группой, поэтому любая вполне характеристическая подгруппа вполне транзитивно разложимой группы является однородно разложимой.

Рассмотрим связь между типами и рангами прямых слагаемых S'_t разложения (2) и типами и рангами прямых слагаемых A_t ($t \in T$) разложения (1) в случае, когда A – вполне транзитивно разложимая группа.

Будем говорить, что семейство типов $\{\tau_t\}_{t \in T}$ соответствует вполне характеристической подгруппе $S = \bigoplus_{t \in T} S'_t$ ($S'_t = S \cap A_t$), где S'_t – однородные группы, если $t(S'_t) = \tau_t$ для всякого t .

Пусть t_1 и t_2 – два типа, $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}, \dots)$ – характеристики, принадлежащие соответственно типам t_1 и t_2 . Сумму типов $t_1 + t_2$ определим как тип, содержащий характеристику $v + w = (v^{(1)} + w^{(1)}, v^{(2)} + w^{(2)}, \dots, v^{(n)} + w^{(n)}, \dots)$, где $\infty + l = \infty$ для всякого l . Если $t_1 \geq t_2$, то разность типов $t_1 - t_2$ определим как тип, содержащий характеристику $v - w = (v^{(1)} - w^{(1)}, v^{(2)} - w^{(2)}, \dots, v^{(n)} - w^{(n)}, \dots)$, где $v \in t_1$, $w \in t_2$, $v \geq w$, и полагаем $\infty - l = \infty$ для всякого l . Заметим, что в [1. С. 133] для рассмотренных операций над типами применяется мультипликативная запись, для наших целей удобнее пользоваться аддитивной записью.

Если характеристика v принадлежит типу t и $v^{(k)} = \infty$, то будем писать $t^{(k)} = \infty$.

Условимся считать, что нулевой группе соответствует тип $t^{(0)}$ (несобственный тип), который обладает следующими свойствами: 1) $t^{(0)} < t$ для всякого типа t , отличного от $t^{(0)}$; 2) $t \pm t^{(0)} = t^{(0)}$ для всякого типа t .

Нам понадобится следующая теорема, доказанная в [2].

Теорема 1. Пусть $A = \bigoplus_{t \in T} A_t$ – вполне транзитивно разложимая группа.

1. Если семейство типов $\{\tau_t\}_{t \in T}$ соответствует некоторой вполне характеристической подгруппе $S = \bigoplus_{t \in T} S'_t$ ($S'_t = S \cap A_t$), то оно удовлетворяет следующим условиям: а) $\tau_t \leq t$ для всякого $t \in T$; б) для всякого $k \in N$, для которого $p_k A_t = A_t$ имеем $\tau_t^{(k)} = \infty$; в) если $t_1 > t_2$ ($t_1, t_2 \in T$), то $\tau_{t_1} \geq t_1 - t_2 + \tau_{t_2}$.

2. Если $S = \bigoplus_{t \in T} S'_t$ ($S'_t = S \cap A_t$) – вполне характеристическая подгруппа группы A и $S'_t \neq 0$, то $r(S'_t) = r(A_t)$.

Две абелевы группы называются почти изоморфными по вполне характеристическим подгруппам, если

каждая из них изоморфна вполне характеристической подгруппе другой группы.

Рассмотрим всевозможные множества типов M , содержащих несобственный тип $t^{(0)}$, в которых каждому типу t , отличному от $t^{(0)}$, поставлено в соответствие некоторое кардинальное число $n_M(t^{(0)})$. Будем называть такие множества типов *отмеченными множествами типов*.

Пусть M_1 и M_2 – два отмеченных множества типов. Будем говорить, что сюръективное отображение $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ является *отмеченным отображением*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\varphi(t) \leq t$ для всякого $t \in M_1$;
- 2) φ сохраняет символы ∞ (то есть, если $\varphi(t) \neq t^{(0)}$, то в характеристиках типов t и $\varphi(t)$ символы ∞ стоят на одних и тех же местах);
- 3) если $\varphi(t_2) \neq t^{(0)}$ и $t_1 > t_2$ ($t_1, t_2 \in M_1$), то $\varphi(t_1) > \varphi(t_2)$ и $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) \geq t_1 - t_2$;
- 4) $n_{M_2}(t) = \sum_{t'=\varphi(t')} n_{M_1}(t')$ для всякого $t \in M_2 \setminus \{t^{(0)}\}$.

Заметим, что для отмеченного отображения φ имеем $\varphi(t^{(0)}) = t^{(0)}$. Это вытекает из свойства 1) отмеченного отображения и из того, что $t^{(0)} < t$ для всякого типа t , отличного от $t^{(0)}$.

Пусть G – вполне транзитивно разложимая группа и $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – ее каноническое разложение. Обозначим через T^* множество $T \cup \{t^{(0)}\}$. Будем рассматривать T^* как отмеченное множество типов, где $n_{T^*}(t)$ при $t \in T$ – это ранг группы G_t .

Теорема 2. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – вполне транзитивно разложимая группа и верна следующая импликация:

(*) если M – отмеченное множество типов, для которого найдется пара отмеченных отображений $\varphi: T^* \rightarrow M$ и $\psi: M \rightarrow T^*$, то $M = T^*$ и $n_M(t) = n_{T^*}(t)$ для всякого $t \in T$.

Тогда, если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A – однородно разложимая группа, подобная группе G .

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что A – вполне характеристическая подгруппа группы G . Пусть $B \cong G$, $B \subset A \subset G$, где B и A – вполне характеристические подгруппы соответственно групп A и G . Имеем $A = \bigoplus_{t \in T} A'_t$, где A'_t – вполне ха-

рактеристическая подгруппа группы A_t и $A'_t = A \cap G_t$. Всякая группа A'_t , как вполне характеристическая подгруппа однородной вполне транзитивной группы, является однородной группой, и поэтому группа A – однородно разложимая группа. Обозначим через M множество всех типов однородных прямых слагаемых в каноническом разложении группы A , и пусть $M' = M \cup \{t^{(0)}\}$, а $n_{M'}(t)$ для всякого $t \in M'$ – это ранг компоненты типа t в каноническом разложении группы A . M' – отмеченное множество типов.

Построим отображение $\varphi: T^* \rightarrow M'$ следующим образом: $\varphi(t^{(0)}) = t^{(0)}$, $\varphi(t) = t(A'_i)$ для всякого $t \neq t^{(0)}$. Используя теорему 1, получаем, что φ – отмеченное отображение. Аналогично, учитывая вполне характеристичность подгруппы B в группе A и изоморфизм $B \cong G$, получаем, что существует отмеченное отображение $\psi: M' \rightarrow T^*$. Тогда в силу импликации (*) имеем $M' = T^*$ и $n_{M'}(t) = r(G_i)$ для всякого $t \in T$, и, следовательно, $A \cong G$.

Теорема 3. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – вполне транзитивно разложимая группа и для всякой возрастающей последовательности $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ типов из T , у которой $P(t_1) = P(t_2) = \dots = P(t_n) = \dots$, выполняется, по крайней мере, одно из двух условий:

- 1) $r(G_{t_i}) < r(G_{t_{i+1}})$ для некоторого $i \in N$;
- 2) $2t_{k+1} < t_k + t_{k+2}$ для некоторого $k \in N$.

Если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A – однородно разложимая группа, подобная группе G .

Доказательство. Пусть M – отмеченное множество типов, для которого найдется пара отмеченных отображений $\varphi: T^* \rightarrow M$ и $\psi: M \rightarrow T^*$. Предположим, что существует такой тип $t_1 \in T$, что $\varphi(t_1) < t_1$. Тогда $\psi\varphi(t_1) \leq \varphi(t_1) < t_1$. Так как ψ и φ – сюръективные отображения, то существует $t_2 \in T$, такой, что $\psi\varphi(t_2) = t_1$, причем $P(t_2) = P(t_1)$ в силу свойства 2) отмеченного отображения. Имеем $t_1 = \psi\varphi(t_2) \leq \varphi(t_2) \leq t_2$, и так как $\psi\varphi(t_1) < t_1$, то $t_1 \neq t_2$. Итак, получили $t_1 < t_2$ и $\psi\varphi(t_2) < t_2$.

Аналогичным образом по индукции можно построить возрастающую последовательность типов из T $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ такую, что $\psi\varphi(t_{i+1}) = t_i$ и $P(t_{i+1}) = P(t_i)$ для всякого $i \in N$. По свойству 3) отмеченного отображения имеем $\psi\varphi(t_{i+2}) - \psi\varphi(t_{i+1}) \geq \varphi(t_{i+2}) - \varphi(t_{i+1}) \geq t_{i+2} - t_{i+1}$. Тогда $t_{i+1} - t_i \geq t_{i+2} - t_{i+1}$ и $2t_{i+1} \geq t_i + t_{i+2}$ для всякого $i \in N$.

Используя свойство 4) отмеченного отображения, получаем для любого $i \in N$

$$r(G_{t_i}) = \sum_{\psi(t')=t_i} n_M(t') = n_M(\varphi(t_{i+1})) + \sum_{\substack{\psi(t')=t_i \\ t' \neq \varphi(t_{i+1})}} n_M(t') \quad \text{и}$$

$$n_M(\varphi(t_{i+1})) = \sum_{\psi(t'')=\varphi(t_{i+1})} r(G_{t''}) = r(G_{t_{i+1}}) + \sum_{\substack{\psi(t'')=\varphi(t_{i+1}) \\ t'' \neq t_{i+1}}} r(G_{t''}).$$

Отсюда следует, что $r(G_{t_i}) \geq n_M(\varphi(t_{i+1})) \geq r(G_{t_{i+1}})$.

Итак, получили, что если в множестве T существует тип t_1 , такой, что $\varphi(t_1) < t_1$, то в этом множестве можно построить возрастающую последовательность типов $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, у которой $P(t_1) = P(t_2) = \dots = P(t_n) = \dots$, и для всякого $i \in N$ имеем $r(G_{t_i}) \geq r(G_{t_{i+1}})$ и $2t_{i+1} \geq t_i + t_{i+2}$.

Поэтому, если любая возрастающая последовательность типов из T $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, у которой $P(t_1) = P(t_2) = \dots = P(t_n) = \dots$, удовлетворяет, по крайней мере, одному из условий 1), 2), то $\varphi(t) = t$ для любого типа $t \in T$. Следовательно, $M = T^*$ и $n_M(t) = n_{T^*}(t)$ для всякого типа $t \in T$. Тогда по теореме 2, если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A – однородно разложимая группа, подобная группе G . Теорема доказана.

Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – вполне транзитивно разложимая группа. Для всякого типа $t \in T$ обозначим через M_t следующее множество:

$$M_t = \{t' \in T \mid t' > t, P(t') = P(t), r(G_t) = r(G_{t'})\}.$$

Следствие 4. Пусть $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – вполне транзитивно разложимая группа и M_t – конечное множество для всякого типа $t \in T$. Если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A – однородно разложимая группа, подобная группе G .

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ – произвольная возрастающая последовательность типов из T , у которой $P(t_1) = P(t_2) = \dots = P(t_n) = \dots$. Предположим, что для всякого $k \in N$ выполняется $r(G_{t_k}) \geq r(G_{t_{k+1}})$. Так как всякое множество кардинальных чисел является вполне упорядоченным (относительно обычного порядка), то существует такое $j \in N$, что $r(G_{t_j}) = r(G_{t_{j+1}}) = r(G_{t_{j+2}}) = \dots$. Отсюда получаем $|M_{t_j}| = \aleph_0$, что противоречит условию данного следствия. Значит $r(G_{t_i}) < r(G_{t_{i+1}})$ для некоторого $i \in N$. Применение теоремы 3 завершает доказательство следствия.

Из следствия 4 непосредственно вытекает

Следствие 5. Пусть G – вполне транзитивно разложимая группа конечного ранга. Если группа A почти изоморфна группе G по вполне характеристическим подгруппам, то A – однородно разложимая группа конечного ранга, подобная группе G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Fuchs L. Infinite Abelian groups. V. II. N.Y. and London: Academic Press, 1973. 367 p.
2. Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1982. С. 56–92.

Статья представлена кафедрой алгебры Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 9 июня 2003 г.