

СВОБОДНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ПРОСТРАНСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОРДИНАЛАХ

В работе дана полная классификация пространств непрерывных функций в топологии поточечной сходимости и свободных топологических групп на компактных отрезках ординалов.

Обозначения и соглашения. Все топологические пространства предполагаются вполне регулярными, а отображения – непрерывными. Кардиналы отождествляются с начальными ординалами данной мощности, однако операции произведения на ω и степени вида α^ω всегда будут пониматься как результат порядковых операций, а не кардинальнозначных (об арифметике ординалов см. [6]). Множества ординалов мы будем всегда считать наделенными обычной порядковой топологией, базу которой образуют обычные интервалы. Как обычно, ω – первый бесконечный и ω_1 – первый несчетный ординалы.

Введем следующие эквивалентности между топологическими пространствами:

- $X=Y$, если пространства X и Y гомеоморфны.
- $X \overset{M}{\sim} Y$, если свободные топологические группы $F(X)$ и $F(Y)$ (в смысле Маркова) являются топологически изоморфными; в этом случае пространства X и Y называются M -эквивалентными.
- $X \overset{l}{\sim} Y$, если пространства всех непрерывных функций $C_p(X)$ и $C_p(Y)$, наделенные топологией поточечной сходимости, линейно гомеоморфны; пространства X и Y называются l -эквивалентными.
- $X \overset{n}{\sim} Y$, если банаховы пространства $C(X)$ и $C(Y)$ линейно гомеоморфны (мы подразумеваем, что X и Y являются компактными); в этом случае пространства X и Y называются n -эквивалентными.

Компакт X называется *разреженным*, если любое его подпространство имеет изолированные точки. Для топологического пространства X определим по индукции обычные производные множества: X' – множество всех неизолированных точек в X , $X^{(0)} = X$, если $X^{(\omega)}$ уже определено, то полагаем $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$, если α – предельный ординал, то полагаем $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta < \alpha} X^{(\beta)}$. В статье Граева [3] был рассмотрен порядковый тип $\tau(X)$ счетного компакта X , он фактически может быть вычислен по формуле $\tau(X) = \sup\{\alpha; X^{(\alpha)} \neq \emptyset\}$. Любой счетный компакт является разреженным, поэтому его порядковый тип определен. Более того, по теореме Мазуркевича – Серпинского [10], любой счетный компакт гомеоморфен некоторому начальному отрезку ординалов $[1, \alpha]$.

Символ $\square$ будет обозначать конец доказательства.

Предварительные результаты. Архангельский [1] заметил, что из M -эквивалентности $X \sim Y$ следует l -эквивалентность. Павловский [8] доказал, что для полных по Дьедонне пространств X и Y из l -эквивалентности следует линейный гомеоморфизм пространств $C(X)$ и $C(Y)$, где оба последних пространства наделены компактно-открытой топологией. В случае, когда пространства X и Y являются компактными, это

заключение моментально следует из теоремы о замкнутом графике, следовательно, из l -эквивалентности следует n -эквивалентность.

Теорема 1 (Граев [3]). *Если X и Y – счетные бесконечные компакты, то $X \overset{M}{\sim} Y$ тогда и только тогда, когда $\tau(X) \leq \tau(Y) < \tau(X) \cdot \omega$.* $\square$

Бессага и Пелчинский дали полную классификацию банаховых пространств непрерывных функций на счетных отрезках ординалов.

Теорема 2 (Бессага, Пелчинский [9]). *Пусть $[1, \alpha]$ и $[1, \beta]$ – счетные бесконечные отрезки ординалов и $\alpha \leq \beta$. Тогда $[1, \alpha] \overset{n}{\sim} [1, \beta]$ в том и только в том случае, когда $\alpha \leq \beta < \alpha^\omega$.* $\square$

Сравнительно нетрудно проверить, что условия Граева и Бессаги – Пелчинского в этих двух теоремах на самом деле совпадают (ср. [12, теорема 8.6.6]). Следовательно, для счетных ординалов α и β M -эквивалентность равносильна n -эквивалентности. Так как l -эквивалентность занимает промежуточное положение между этими двумя эквивалентностями, то мы получаем следствие.

Следствие 3. *Пусть $X=[1, \alpha]$ и $Y=[1, \beta]$ – счетные компакты. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $X \overset{M}{\sim} Y$.
2. $X \overset{l}{\sim} Y$.
3. $X \overset{n}{\sim} Y$.
4. $\alpha \leq \beta < \alpha^\omega$. $\square$

Первый шаг по классификации банаховых пространств $C(X)$ на несчетных отрезках ординалов X сделал Семадени.

Теорема 4 (Семадени [11]). *Все конечные степени банахова пространства $C[1, \omega_1]$ попарно линейно не гомеоморфны между собой.* $\square$

Нетрудно видеть, что $(C[1, \omega_1])^n$ может быть отождествлено с пространством $C[1, \omega_1 \cdot n]$, и если $\omega_1 \leq \alpha < \omega_1 \cdot \omega$, то $[1, \alpha]$ гомеоморфно $[1, \omega_1 \cdot n]$ для некоторого натурального числа n . Таким образом теоремы Бессаги – Пелчинского и Семадени дали классификацию ординалов относительно n -эквивалентности для всех ординалов, не превосходящих $\omega_1 \cdot \omega$. В статье [4] и, независимо, в [5] была дана полная классификация относительно этой эквивалентности.

Теорема 5 (Гулько, Оськин [4], Кисляков [5]). *Пусть $[1, \alpha]$ и $[1, \beta]$ – бесконечные отрезки ординалов, причем $\alpha \leq \beta$. Тогда $[1, \alpha] \overset{n}{\sim} [1, \beta]$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из трех взаимоисключающих условий:*

- а) существует не совпадающий ни с каким начальным регулярным кардиналом ординал $\gamma \geq 0$, такой, что $\omega^{\omega^\gamma} \leq \alpha \leq \beta < \omega^{\omega^{\gamma+1}}$,

б) $\lambda \cdot \sigma \leq \alpha \leq \beta < \lambda \cdot \sigma^+$, где λ – регулярный кардинал и $\sigma < \lambda$ – произвольный кардинал (включая случай конечных кардиналов) и σ^+ – наименьший из кардиналов, больших σ ,

с) $\lambda^2 \leq \alpha \leq \beta < \lambda^\omega$, где λ – регулярный кардинал. $\square$

Дадим некоторые комментарии к последней теореме. Числа вида ω^γ имеют большое значение в арифметике порядковых чисел, и они называются главными числами умножения [6. С. 263]. Отметим также, что всякий кардинал λ является эпсилонным числом [6], т.е. для него $\omega^\lambda = \lambda$. Данные замечания позволяют сравнить между собой условия а), б) и с) в последней теореме.

Саму теорему удобно понимать следующим образом: существует класс ординалов Δ («верстовых столбов»), которые разбивают весь класс порядковых чисел на полуинтервалы $[\delta, \delta^+)$, концы которых принадлежат Δ и $\delta^+ = \min \{ \alpha \in \Delta; \alpha > \delta \}$, так что $[1, \alpha] \stackrel{n}{\sim} [1, \beta]$ тогда и только тогда, когда оба ординала α и β попадают в один такой полуинтервал. При такой трактовке класс Δ состоит из всех ординалов вида ω^γ при $\gamma \geq 0$ и всех ординалов вида $\lambda \cdot \sigma$, где λ – регулярный кардинал и σ – некоторый (включая все конечные) кардинал, удовлетворяющий неравенству $1 \leq \sigma \leq \lambda$. Заметим, что только вблизи регулярных кардиналов появляются дополнительные «верстовые столбы». Случай счетных ординалов (теорема Бессаги – Пелчинского) полностью укладывается в случай а) теоремы 5, а случай из теоремы 4 (Семадени) – в случай б).

Замечание. Все результаты этой статьи были получены автором в 1990 году и содержались в [13]. В виде статьи они публикуются впервые.

Основные результаты. Целью этой статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть $[1, \alpha]$ и $[1, \beta]$ – компактные бесконечные отрезки ординалов. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$а) [1, \alpha] \stackrel{M}{\sim} [1, \beta],$$

$$б) [1, \alpha] \stackrel{I}{\sim} [1, \beta],$$

$$с) [1, \alpha] \stackrel{n}{\sim} [1, \beta],$$

д) ординалы удовлетворяют одному из трех взаимноисключающих условий а), б) и с) теоремы 5.

Доказательство. Эквивалентность условий с) и д) доказана в теореме 5. Выше уже отмечалось, что введенные эквивалентности связаны между собой, и, в силу компактности рассматриваемых пространств, мы получаем импликации а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ с). Таким образом, остается только показать справедливость импликации д) $\Rightarrow$ а). Но это следует из теоремы 7 ниже, которая имеет самостоятельное значение. $\square$

Символом $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ мы будем обозначать дискретную сумму семейства топологических пространств, причем в случае $X_i \equiv Y$ мы будем просто писать $\bigoplus_\lambda Y$, где λ – мощность индексного множества I . Для локально компактного некомпактного пространства X через $a(X) = X \cup \{\infty\}$ мы будем обозначать его одноточечную компактификацию.

Теорема 7. Пусть β – бесконечное порядковое число. Тогда имеет место одно из трех взаимоисключающих утверждений:

а) если $\alpha = \omega^\gamma \leq \beta < \omega^{\gamma+1}$ для некоторого ординала $\gamma \geq 0$, отличного от всякого регулярного кардинала,

$$то [1, \beta] \stackrel{M}{\sim} a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha]);$$

б) если $\lambda \cdot \sigma \leq \beta < \lambda \cdot \sigma^+$, где λ – регулярный кардинал и $\sigma < \lambda$ – произвольный кардинал, то

$$[1, \beta] \stackrel{M}{\sim} a(\bigoplus_\sigma [1, \lambda]);$$

с) если $\lambda^2 \leq \beta < \lambda^\omega$, где λ – регулярный кардинал, то $[1, \beta] \stackrel{M}{\sim} a(\bigoplus_\lambda [1, \lambda])$.

Аналог последней теоремы можно сформулировать также для Ср-случая, но мы предоставляем это сделать читателю.

Итак, из последних теорем ясно, что нам нужно только разобраться с изоморфизмами свободных топологических групп. Для сокращения записи **условимся отсюда и всюду ниже писать значок $\cong$ вместо знака $\sim$** .

Напомним некоторые сведения о свободных топологических группах [1, 3]. Известны две разновидности таких групп: $F_G(X)$ – в смысле Граева и $F_M(X)$ – в смысле Маркова, причем группа $F_M(X)$ топологически изоморфна группе $F_G(X \oplus \{*\})$, где $*$ – некоторая точка, $* \notin X$. Так как у нас X есть бесконечный отрезок ординалов, то $X \oplus \{*\}$ гомеоморфно самому X . Следовательно, в этом случае $F_G(X) \cong F_M(X)$, и мы можем говорить просто о свободной топологической группе $F(X)$. Ниже для определенности мы принимаем терминологию Граева, тем более что она несколько удобнее в наших рассуждениях.

Определение. Пусть X – вполне регулярное топологическое пространство и x_0 – фиксированная точка в нем. Свободной топологической группой (в смысле Граева) пространства X с выделенной точкой x_0 называется топологическая группа $F(X, x_0)$ со свойствами:

X есть замкнутое подпространство в $F(X, x_0)$;

X алгебраически порождает $F(X, x_0)$ и x_0 является единицей этой группы.

Любое непрерывное отображение f из X в некоторую топологическую группу G , переводящее точку x_0 в единицу группы G , продолжается до непрерывного гомоморфизма $F(f): F(X, x_0) \rightarrow G$.

Граев показал [3], что группа $F(X, x_0)$ существует, единственна и не зависит от выбора точки x_0 с точностью до топологического изоморфизма. Поэтому мы часто будем писать просто $F(X)$ вместо $F(X, x_0)$. Из условия 2 следует, что произвольный элемент группы $F(X)$ может быть записан в виде слова $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, где $x_i \in X \setminus \{x_0\}$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ при $i = 1, \dots, n$. Число n называется длиной этого слова относительно базиса X . Через $F_n(X)$ обозначим совокупность всех слов длиной $\leq n$. Если u – изоморфизм группы $F(X, x_0)$ на группу $F(Y, y_0)$, то мы будем писать $\|u\| \leq n$, если $u(X) \subset F_n(Y, y_0)$ и $u(Y) \subset F_n(X, x_0)$. Разумность такого определения оправдывает следующая очевидная лемма.

Лемма 8. Если u и v – изоморфизмы свободных топологических групп, то $\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. $\square$

Пусть K – замкнутое подпространство в X . Обозначим через X/K пространство, полученное из X стягиванием множества K в точку и наделенное сильнейшей вполне регулярной топологией, относительно которой естественная проекция $p: X \rightarrow X/K$ непрерывны. Если пространство X нормально, то X/K является обычным факторпространством пространства X . Легко видеть, что из непрерывности композиции $f \circ p$, где $f: X/K \rightarrow Y$ – некоторое отображение в тихоновское пространство Y , следует непрерывность f . Очевидна следующая

Лемма 9. Пусть X – компакт и K – его замкнутое подмножество. Тогда X/K гомеоморфно одноточечной компактификации $a(X \setminus K)$. $\square$

Далее мы будем использовать теорему Окунева о построении M -эквивалентностей [7]. Аналог этой теоремы для случая l -эквивалентности см. в [2]. Для полноты изложения мы приводим здесь доказательство теоремы Окунева.

Теорема 10 (Окунев). Пусть K – ретракт X и пусть $y_0 = p(K)$, где $p: X \rightarrow X/K$ – естественная проекция. Пусть, далее, $X^+ = X \oplus \{*\}$, где $* \notin X$. Тогда существует топологический изоморфизм

$$u: F(X^+, x_0) \rightarrow F((X/K) \oplus K, y_0) \text{ с нормой } \|u\| \leq 2.$$

Доказательство. Пусть r – ретракция X на K . Определим отображение $g: X^+ \rightarrow F((X/K) \oplus K, y_0)$ формулой

$$g(x) = \begin{cases} y_0, & x = *, \\ p(x) \cdot r(x), & x \in X. \end{cases}$$

Так как $p(x) \in X/K$ и $r(x) \in K$, то отображение задано корректно. Оно непрерывно, ибо непрерывны операции умножения и отображения p и r . Определим также отображение

$$h(y) = \begin{cases} y, & y \in K, \\ x \cdot (r(x))^{-1}, & y \in X/K, y = p(x). \end{cases}$$

Отображение h определено корректно, так как при $y \neq y_0$ существует единственное $x \in X$, такое, что $y = p(x)$, а если $y = y_0$ и $y = p(x)$, то $x \in K$, значит $r(x) = x$ и $h(y_0) = *$. Непрерывность h в точках множества K очевидна. Для оставшегося случая рассмотрим отображение $f: X \rightarrow F(X^+, *)$, такое, что $f(x) = * \cdot x \cdot (r(x))^{-1}$. Очевидно, что отображение f непрерывно и $f = h \circ p$. Так как $F(X^+, *)$ есть вполне регулярное пространство, то получаем, что h непрерывно в точках X/K . Продолжим g и h до непрерывных гомоморфизмов $F(g)$ и $F(h)$. Несложные вычисления показывают, что эти гомоморфизмы являются взаимнообратными. Остается только положить $u = F(g)$. $\square$

Следствие 11. Пусть пространство X гомеоморфно своей копии, к которой добавлена одна изолированная точка. Пусть далее x_1 и x_2 – некоторые точки в X . Тогда $(X, x_1) \cong (X, x_2)$, причем норма изоморфизма не превосходит 4.

Доказательство. Пусть $K = \{x\}$ – одноточечное подмножество в X и y – та же точка x , но рассматри-

ваемая как элемент пространства X/K . Тогда пара $((X/K) \oplus K, y)$ гомеоморфна паре (X, x) . Возьмем теперь $K_1 = \{x_1\}$ и $K_2 = \{x_2\}$. По теореме 10 $(X, x_1) \cong X \oplus \{*\}$ и $(X, x_2) \cong (X \oplus \{*\}, *)$, причем нормы изоморфизмов не превосходят 2. Осталось применить лемму 8. $\square$

Замечание. Теорема 10 и следствие 11 являются аналогами хорошо известного в функциональном анализе метода разложения линейных топологических пространств в декартовы произведения (восходящего к Банаху и Борсуку – см., например, [14]), только перенесенного на свободные топологические группы. Роль его фактически та же самая, и наше доказательство фактически является перефразировкой доказательства из [4,5] на язык групп.

Следующее утверждение легко доказывается и хорошо известно (см., например, [15]).

Лемма 12. Каждое замкнутое подмножество произвольного отрезка ординалов является его ретрактом. $\square$

Лемма 13. Пусть $\{X_i; i \in I\}$ и $\{Y_i; i \in I\}$ – два семейства попарно дизъюнктивных локально компактных пространств. Тогда если $(a(X_i), \infty) \cong (a(Y_i), \infty)$ с нормой $\leq n$ для каждого $i \in I$, то $(a(\bigoplus_{i \in I} X_i), \infty) \cong (a(\bigoplus_{i \in I} Y_i), \infty)$ с нормой $\leq n$.

Доказательство этой леммы заключается в естественном построении искомого изоморфизма и несложной проверке всех необходимых условий. Поэтому мы его опускаем. $\square$

Замечание. Нетрудно понять, что без ограничения на норму изоморфизмов лемма 13 может быть и неверной. Это есть основная причина, по которой мы вынуждены в каждом последующем утверждении отслеживать оценку норм изоморфизмов.

Лемма 14. Если кардинал λ бесконечен и $(a(X), \infty) \cong (a(\bigoplus_\lambda Y), \infty)$ с нормой $\leq n$, то $(a(X), \infty) \cong (a(\bigoplus_\sigma Y), \infty)$ с нормой $\leq n^2$ для каждого кардинала $\sigma \leq \lambda$.

Доказательство. Представим $\bigoplus_\lambda Y$ в виде $\bigoplus_{l \in L} Y_l$, где $Y_l = Y$ для каждого $l \in L$, причем $|L| = \lambda$. Представим индексное множество L в виде произведения $L \times I$, где $|L| = \lambda$ и $|I| = \sigma$. По условию для каждого $i \in I$

$$(a(\bigoplus_{l \in L} Y_{(l,i)}), \infty) \cong (a(X), \infty)$$

с нормой $\leq n$. Отсюда и из леммы 13 получаем

$$(a(\bigoplus_\lambda Y), \infty) = (a(\bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{l \in L} Y_{(l,i)}), \infty) \cong (a(\bigoplus_\sigma Y), \infty),$$

причем норма этого изоморфизма также ограничена числом n . Осталось применить лемму 8. $\square$

Пусть X есть или отрезок ординалов $[1, \alpha]$, или его факторпространство $[1, \alpha]/K$, полученное стягиванием некоторого замкнутого подмножества K в точку (гомеоморфное по лемме 9 пространству $a([1, \alpha] \setminus K)$). Любое такое X в случае его бесконечности гомеоморфно $X \oplus \{*\}$. Значит, в силу следствия 11, у нас нет нужды фиксировать какую-либо особую точку в X , и мы будем выбирать ее произвольным образом. Из утверждений 8 – 12 мы заключаем

Лемма 15. Пусть K – замкнутое подмножество в бесконечном компактном отрезке ординалов $[1, \alpha]$. Тогда $[1, \alpha] \cong a([1, \alpha] \setminus K) \oplus K$, причем норма этого изоморфизма ≤ 32 . $\square$

Также из утверждений 13, 11, 8 и 14 вытекают следующие две леммы.

Лемма 16. Пусть $\{X_i; i \in I\}$ и $\{Y_i; i \in I\}$ – семейства попарно дизъюнктивных локально компактных пространств, каждое из которых гомеоморфно подпространству в некотором отрезке ординалов. Тогда если $a(X_i) \cong a(Y_i)$ с нормой $\leq n$ для каждого $i \in I$, то $a(\bigoplus_{i \in I} X_i) \cong a(\bigoplus_{i \in I} Y_i)$ с нормой $\leq 16n$. $\square$

Лемма 17. Если α – бесконечный ординал и $[1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{\lambda} Y)$ с нормой $\leq n$, то $[1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{\sigma} [1, \alpha])$ с нормой $\leq 256n^2$. $\square$

Лемма 18. Пусть $\alpha = \omega^{\gamma}$, $\xi < \alpha$, $n < \omega$ и $\eta < \alpha^n$. Тогда справедлива формула $\eta + \alpha^n \cdot \xi = \alpha^n \cdot \xi$, и имеют место гомеоморфизмы: $[1, \alpha^n \cdot \xi] = (\eta, \alpha^n \cdot \xi]$, $[1, \alpha^n \cdot \xi) = (\eta, \alpha^n \cdot \xi)$, $[1, \alpha^n \cdot \xi + \eta] = [1, \alpha^n \cdot \xi] \oplus [1, \eta] = [1, \alpha^n \cdot \xi]$, $[1, \alpha^n \cdot \xi) \oplus [1, \eta] = [1, \alpha^n \cdot \xi]$.

Доказательство. Записанная в условии леммы формула есть хорошо известные утверждения арифметики ординалов [6]. Из нее легко следуют все остальные утверждения леммы. $\square$

Лемма 19. Пусть $\alpha = \omega^{\gamma}$ и $\beta = \alpha^n \cdot \xi$, где $1 \leq n < \omega$, $1 \leq \xi < \alpha$. Тогда $[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{\xi} [1, \alpha^n])$ с нормой ≤ 32 .

Доказательство. Рассмотрим замкнутое подмножество $K = \{\alpha^n \cdot \zeta; 1 \leq \zeta \leq \xi\}$ в $[1, \beta]$. Имеем $[1, \beta] \setminus K = [1, \alpha^n) \cup \{(\alpha^n \cdot \zeta, \alpha^n \cdot (\zeta + 1)); 1 \leq \zeta < \xi\}$. Легко видеть, что K гомеоморфно $[1, \xi]$ и $(\alpha^n \cdot \zeta, \alpha^n \cdot (\zeta + 1))$ гомеоморфно $[1, \alpha^n)$. Из леммы 15 получаем $[1, \beta] \cong \cong a([1, \alpha] \setminus K) \oplus K$ с нормой ≤ 32 . Но последнее пространство гомеоморфно $a(\bigoplus_{\xi} [1, \alpha^n]) \oplus [1, \xi]$. По лемме 18 $[1, \alpha^n] \oplus [1, \xi]$ гомеоморфно $[1, \alpha^n]$, и поэтому отрезок $[1, \xi]$ можно присоединить к какому-либо экземпляру отрезка $[1, \alpha^n]$ в предыдущем слагаемом. $\square$

Лемма 20. Пусть $\alpha = \omega^{\gamma}$. Тогда $[1, \alpha^n] \cong \cong a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha^{n-1}])$ с нормой $\leq 32^2$ при $2 \leq n < \infty$.

Доказательство. Возьмем замкнутое подмножество $K = \{\alpha^{n-1} \cdot \zeta; 1 \leq \zeta \leq \alpha\}$ в $[1, \alpha]$ и так же, как в предыдущей лемме, получим $[1, \alpha^n] \cong a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha^{n-1}]) \oplus [1, \alpha]$.

Если $n > 2$, то с помощью леммы 18 мы опять можем присоединить отрезок $[1, \alpha]$ к одному из отрезков в дискретной сумме, и все доказано.

Пусть $n = 2$. Тогда мы имеем

$$[1, \alpha^2] \cong a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha]) \oplus [1, \alpha], \quad (1)$$

и норма изоморфизма не больше 32. Обозначим правую часть последней формулы через X , и пусть $L = \{\infty, \alpha\}$ – двухточечное множество в X , состоящее из бесконечно удаленной точки в первом слагаемом и из концевой точки – во втором. Из теоремы 10 и следствия 11 получаем $X/L \oplus L \cong X \oplus \{*\}$. Легко видеть, что имеют место гомеоморфизмы: $X/L = a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha])$, $X \oplus \{*\} = X$, $a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha]) \oplus L = a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha])$. Следовательно,

$$a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha]) \oplus [1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha]), \quad (2)$$

причем норма изоморфизма не больше 32. Из формул (1), (2) и леммы 8 теперь получаем $[1, \alpha^2] \cong \cong a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha])$ с нормой $\leq 32^2$. $\square$

Лемма 21. Пусть $\alpha = \omega^{\gamma}$ и $\alpha^n \leq \beta < \alpha^{n+1}$. Тогда $[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{\alpha} [1, \alpha])$ с нормой $\leq 16^{4n-2}$.

Доказательство. Мы можем записать $\beta = \alpha^n \cdot \xi + \eta$, где $\xi < \eta$ и $\eta < \alpha^n$. В силу лемм 18 и 19 получаем

$$[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{\xi} [1, \alpha^n]) \quad (3)$$

с нормой ≤ 32 . Очевидно, что $a([1, \alpha^n]) = [1, \alpha^n] \oplus \{\infty\} = [1, \alpha^n]$. Отсюда и из лемм 16 и 20 следует

$$a(\bigoplus_{\xi} [1, \alpha^n]) \cong a(\bigoplus_{\xi} \bigoplus_{\alpha} [1, \alpha^{n-1}]). \quad (4)$$

Так как $|\xi| \leq |\alpha|$, то из формул (3), (4) и из леммы 8 получаем изоморфизм $[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{|\alpha|} [1, \alpha^{n-1}])$ с нормой $\leq 2^{19}$. Опять, применяя леммы 16 и 20 и 8, заключаем $[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{|\xi|} [1, \alpha^{n-2}])$ с нормой $\leq 2^{33}$. Повторяя описанную процедуру еще $n - 3$ раза, мы приходим к нужной эквивалентности. $\square$

Лемма 22. Пусть $\alpha = \omega^{\gamma}$ и γ отлично от всякого регулярного кардинала. Тогда $[1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{|\alpha|} [1, \alpha])$.

Доказательство. Случай 1. Пусть γ есть предельный ординал. Тогда $\alpha = \beta^{\omega}$, где $\beta = \omega^{\gamma-1}$. Обозначим $K = \{\alpha\} \cup \{\beta^n; 2 \leq n < \infty\}$. Множество K замкнуто в $[1, \alpha]$ и $[1, \alpha] \setminus K = [1, \beta^2) \cup \{(\beta^n, \beta^{n+1}); 2 \leq n < \infty\}$. По лемме 18 интервал (β^n, β^{n+1}) гомеоморфен полуинтервалу $[1, \beta^{n+1})$. Согласно лемме 15, мы теперь имеем

$$[1, \alpha] \cong a\left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} [1, \beta^n]\right) \oplus [1, \omega] \quad (5)$$

с нормой ≤ 32 . Так как $\beta \geq \omega$, то по лемме 18 сумма $[1, \beta^2] \oplus [1, \omega]$ гомеоморфна $[1, \beta^2]$. Следовательно,

$$[1, \alpha] \cong a\left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} [1, \beta^n]\right) \quad \text{с нормой } \leq 32. \quad \text{По лемме 20}$$

$$[1, \beta^n] \cong a(\bigoplus_{|\beta|} [1, \beta^{n-1}]) \quad \text{с нормой } \leq 32^2 \quad \text{при } 2 \leq n < \omega.$$

Отсюда и из формулы (5) получаем $[1, \alpha] \cong$

$$\cong a\left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} \bigoplus_{|\beta|} [1, \beta^{n-1}]\right) = a\left(\bigoplus_{|\beta|} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{|\beta|} [1, \beta^n]\right), \quad \text{где изо-}$$

морфизм имеет норму $\leq 2^{19}$. По лемме 17 мы заключаем (заметим, что $|\beta| = |\alpha|$), что $[1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{|\alpha|} [1, \alpha])$ с нормой $\leq 2^{46}$.

Случай 2. Пусть γ – предельный ординал, не являющийся кардиналом.

В этом случае $\lambda = |\gamma| < \gamma$. Возьмем такое подмножество $F \subset [\lambda + 1, \gamma]$, что $\sup F = \gamma$. Можно считать, что порядковый тип F не превосходит λ . Тогда $K = \{\omega^{\xi+1}; \xi \in F\}$ есть замкнутое множество ордина-

лов, и легко видеть, что оно лежит в $[1, \alpha]$ и его верхней гранью является α . Согласно лемме 15, имеем $[1, \alpha] \cong a([1, \alpha] \setminus K) \oplus K$ с нормой изоморфизма ≤ 32 . Далее заметим, что разность $[1, \alpha] \setminus K$ представима в виде дизъюнктного объединения интервалов вида $(\beta, \omega^{\xi+1})$, причем, в силу леммы 18, последний гомеоморфен $[1, \omega^{\xi+1})$. Так как порядковый тип K не

выше λ , то можно с точностью до гомеоморфизма присоединить K к любому из этих промежутков. В итоге имеем

$$[1, \alpha] \cong a\left(\bigoplus_{\xi \in F} [1, \omega^{\xi+1}]\right) \quad (6)$$

с нормой ≤ 32 . В случае 1 мы уже установили, что

$$[1, \omega^{\xi+1}) \cong a\left(\bigoplus_{\lambda} [1, \omega^{\xi+1}]\right) \quad (7)$$

с нормой $\leq 2^{46}$. Из формул (6) и (7) выводим

$$[1, \alpha] \cong a\left(\bigotimes_{\lambda} \bigoplus_{\xi \in F} \left[1, \omega^{\xi+1}\right]\right) \quad [1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{\sigma} [1, \alpha]) \quad (11)$$

с нормой $\leq 2^{55}$. Теперь из леммы 17 следует требуемое: $[1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{\lambda} [1, \alpha])$.

Случай 3. Пусть γ – сингулярный кардинал.

Возьмем бесконечный кардинал $\sigma < \gamma$ и зафиксируем его. Тогда существует замкнутое множество $F \subset [1, \gamma]$, такое, что $\sup F = \gamma$ и $|\xi| \geq \sigma$ для каждого $\xi \in F$. Пусть, далее, $K = \left\{\omega^{\xi+1}; \xi \in F\right\}$. Согласно лемме 15 $[1, \alpha] \cong a([1, \alpha] \setminus K) \oplus K$, причем норма этого изоморфизма ≤ 32 . Как и в предыдущем случае 2, мы можем записать $[1, \alpha] \setminus K = \bigoplus_{\xi \in F} \left[1, \omega^{\xi+1}\right]$. Так как порядковый тип K меньше γ и $\sup F = \gamma$, то существует $\xi \in F$, такой, что пространства $K \oplus \left[1, \omega^{\xi+1}\right]$ и $\left[1, \omega^{\xi+1}\right]$ гомеоморфны. Суммируя сказанное, заключаем, что

$$[1, \alpha] \cong a\left(\bigoplus_{\xi \in F} \left[1, \omega^{\xi+1}\right]\right). \quad (8)$$

В случае 1 мы уже установили изоморфность

$$\left[1, \omega^{\xi+1}\right] \cong a\left(\bigoplus_{|\xi|} [1, \omega^{\xi+1}]\right) \quad (9)$$

с нормой $\leq 2^{46}$ для каждого $\xi \in F$. Так как $|\xi| \geq \sigma$ для каждого $\xi \in F$, то по лемме 17 из формулы (9) следует

$$\left[1, \omega^{\xi+1}\right] \cong a\left(\bigoplus_{\sigma} [1, \omega^{\xi+1}]\right) \quad (10)$$

с нормой $\leq 2^{100}$. Из формул (8) и (10) и из леммы 16 получаем $[1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{\sigma} \bigoplus_{\xi \in F} \left[1, \omega^{\xi+1}\right])$ с нормой $\leq 2^{109}$.

Применяя теперь лемму 17, получаем

с нормой $\leq 2^{226}$. Таким образом, мы установили, что для каждого кардинала σ , меньшего, чем γ , имеет место формула (11).

Так как γ – сингулярный кардинал, то $\gamma = \sum_{i \in I} \sigma_i$, где σ_i – кардиналы, строго меньшие γ и $|I| < \gamma$. Согласно формуле (11), имеем $[1, \alpha] = a([1, \alpha]) \cong \cong a(\bigoplus_{\sigma_i} [1, \alpha])$ с нормой $\leq 2^{226}$, откуда, в силу леммы 16, получаем

$$a(\bigoplus_{\Pi} [1, \alpha]) \cong a(\bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{\sigma_i} [1, \alpha]) = a(\bigoplus_{\gamma} [1, \alpha]),$$

причем норма изоморфизма ограничена числом 2^{230} . Поскольку $|I| < \gamma$, то по формуле (11) получаем $[1, \alpha] \cong \cong (a(\bigoplus_{\Pi} [1, \alpha]) \cong a(\bigoplus_{\gamma} [1, \alpha]))$. □

Доказательство теоремы 7. Случай а). Пусть

$\alpha = \omega^{\gamma}$, где γ не есть регулярный кардинал. Если $\alpha^2 \leq \beta < \alpha^{\omega}$, то $[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{|\alpha|} [1, \alpha])$ по лемме 21, и в этом случае все доказано. Пусть теперь $\alpha \leq \beta < \alpha^2$. Тогда $\beta = \alpha \cdot \xi + \eta$, где ξ и η строго меньше α . По лемме 19 $[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{|\xi|} [1, \alpha])$. С другой стороны, в силу леммы 22 $[1, \alpha] \cong a(\bigoplus_{|\alpha|} [1, \alpha])$. Так как $|\xi| \leq |\alpha|$, то с помощью леммы 17 выводим, что $[1, \alpha] \cong [1, \beta]$, что и требовалось.

Случай б). Пусть λ – регулярный кардинал и $\lambda \cdot \sigma \leq \beta < \lambda \cdot \sigma^+$ для некоторого кардинала $\sigma < \lambda$. Тогда $\beta = \lambda \cdot \xi + \eta$, где $\sigma \leq \xi < \sigma^+$ и $\eta < \lambda$. Так как любой кардинал является «эпсилонным» числом, о чем мы уже говорили выше, то в силу лемм 18 и 19 выполнено $[1, \beta] \cong a(\bigoplus_{|\xi|} [1, \lambda]) = a(\bigoplus_{\sigma} [1, \lambda])$.

Случай с) сразу следует из леммы 21. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А.В. О соотношениях между инвариантами топологических групп // Успехи матем. наук. 1980. Т. 35. № 3. С. 3–22.
2. Архангельский А.В., Ткачук В.В. Пространства функций и топологические инварианты. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
3. Граев М.И. Свободные топологические группы // Изв. АН СССР, сер. математ. 1948. Т. 12. № 3. С. 279–324.
4. Гулько С.П., Оськин А.В. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах // Функци. анализ и прил. 1975. Т. 9. № 1. С. 61–62.
5. Кисляков С.В. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на ординалах // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. С. 293–300.
6. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
7. Окунев О.Г. Метод построения M -эквивалентных пространств // 5-й Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее прил. 1985. С. 186.
8. Павловский Д.С. О пространствах, имеющих линейные гомеоморфные пространства непрерывных функций в топологии поточечной сходимости // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37. № 2. С. 185–186.
9. Bessaga C., Pelczynski A. Spaces of continuous functions (IV). On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia Math. 1960. V. 19. P. 53–62.
10. Mazurkiewicz S., Sierpinski W. Contributions a la topologie des ensembles denombrables // Fund. Math. 1920. V.1. P. 17–27.
11. Semadeni Z. Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math., Astron. et Phys. 1960. V. 8. P.81–84.
12. Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Monogr. Mat., 1971.
13. Гулько С.П. Σ -произведения и проблемы классификации в топологической теории пространств функций // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1991.
14. Borsuk K. Über Isomorphie der Funktionalräume // Bull. Int. Acad. Pol. Sci. 1933. P. 1–10.
15. Van Douwen E.K. Simultaneous extension of continuous functions. Amsterdam, 1975.

Статья представлена кафедрой теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 9 июня 2003 г.